

# Introduciéndonos en la Teoría del caos

Javier de Lucas

En el presente ensayo sobre la "Teoría del Caos" se realiza un análisis partiendo de las diferencias surgidas entre la Ciencia del siglo XIX y XX, es decir, la posición determinista y la "Nueva Física". Hasta principios del siglo XX, la Física se sitúa en la certeza de la predicción de los fenómenos, a pesar de los antecedentes de Poincaré en el siglo XIX sobre el problema de los tres cuerpos, donde se expresa que sólo podemos tener una "aproximación" y que la predicción se vuelve imposible. Sin embargo, se ignora tal postura y se continúa en la misma línea hasta el fin de la "Revolución de la Física"; es entonces que se retoman las consecuencias del descubrimiento de Poincaré y se observa que las variables pueden desarrollar un comportamiento caótico, complicado e impredecible pero dentro de un orden geométrico observable. Es así que, a partir de este enfoque, se desarrolla la "Teoría de Caos" , aportando un paradigma donde los problemas científicos pueden resolverse desde esta nueva óptica.

Desde hace algunos años oímos mencionar vagamente una "Teoría" a la que se dio por llamar "del Caos". No obstante, pocas de las referencias han sido claras. Para comprender el significado de la Teoría del Caos es conveniente analizar las diferencias entre la Ciencia del siglo XIX y la del XX.

Durante el siglo XIX, la Ciencia llegó a un triunfalismo determinista. Se creía que la Física, la más rigurosa e importante de las Ciencias, estaba a punto de cerrarse, ya que casi estaba todo concluido. Las leyes se expresaban en la Física de manera estrictamente determinista. Aunque ninguna otra Ciencia (excluiremos a las Matemáticas por ser otra su naturaleza y metodología) podía jactarse de lo mismo, se suponía que como la Física expresaba las leyes fundamentales del Universo, éstas eran igualmente aplicables en Química, Biología, Psicología, etc. sólo que en éstas, los temas de estudio se presentaban con mayor complejidad (una bacteria es mucho más compleja que el Sol mismo).

Pierre Simon de Laplace, el gran matemático, ya desde el siglo XVIII había expresado la idea dominante: "El estado presente del sistema de la Naturaleza es evidentemente una consecuencia de lo que fue en el momento precedente, y si concebimos una inteligencia tal que a un instante dado conociera todas las fuerzas que animan la Naturaleza y las posiciones de los seres que las forman, podría condensar en una única fórmula el movimiento de los objetos más grandes del Universo y de los átomos más ligeros: **nada** sería incierto para dicho ser, y tanto el futuro como el pasado estarían presentes ante sus ojos". Ese era el anhelo de la Ciencia: ser capaz de predecirlo todo.

Pero en la misma Física, hacia finales del siglo XIX, aparecieron unos problemas que no parecían encontrar solución dentro del marco científico existente: eran

llamados "el problema del éter" y la "catástrofe ultravioleta". Estos problemas llevaron a la Física a una revolución que desembocó en la Teoría de la Relatividad por un lado, y la Mecánica Cuántica, por el otro. Ambas teorías parecen desafiar el sentido común al proponer que el tiempo es relativo o que existen partículas virtuales llenando el Universo. La Mecánica Cuántica, en particular, postuló un principio devastador para la fe del científico en la posibilidad de hacer predicciones de todo; en pocas palabras, el Principio de Incertidumbre de Heisenberg afirma que nunca es posible tener mediciones exactas: sólo se podrán hacer aproximaciones. Nunca podremos conocer con exactitud la magnitud de lo ancho de esta hoja, sólo podremos decir, realmente que está entre 21.55 y 21.65, por ejemplo.

Muchos científicos se resistían a aceptar este principio, entre ellos Albert Einstein, quien trató de demostrar su inconsistencia, pero lo único que logró fue fortalecerlo aún más.

Los físicos se hallaban extremadamente atareados en desarrollar estas nuevas ideas. Algunos químicos se interesaban por el efecto de la Mecánica Cuántica en su disciplina. Los demás científicos, en tanto, se encontraban ocupados en sus propias disciplinas, menos maduras. Ninguno de ellos veían efectos importantes de las nuevas teorías de la Física sobre sus áreas. En efecto, la Teoría de la Relatividad se aplica a lo muy grande (del tamaño del Sol o mayor) o lo muy veloz (a velocidades cercanas a las de la luz); mientras que la Mecánica Cuántica se ocupa de lo muy pequeño (de tamaño menor que el átomo).

Mientras esto ocurría, pocos reparaban en un tercer problema insoluble de la Física que traería consecuencias insospechadas en el examen científico de los fenómenos cotidianos: el problema de los tres cuerpos.

El problema de los tres cuerpos era más que nada astronómico: si se tienen dos cuerpos en el espacio, es fácil deducir las ecuaciones del movimiento: se moverán en elipses, por ejemplo. Pero si se tienen tres cuerpos, ya no hay manera de encontrar tales ecuaciones exactas, solamente aproximaciones válidas para un intervalo. Al salir de ese intervalo de validez, se debe hacer otras aproximaciones.

Henri Poincaré decidió atacar el problema de los tres cuerpos a finales del siglo XIX, con motivo de un concurso de Matemáticas organizado en Suecia. Al estudiarlo, encontró algo que le sorprendió: un sistema tan sencillo de plantear como el de los tres cuerpos podría dar un comportamiento extremadamente complicado, tanto que imposibilitaba hacer predicciones a largo plazo en el mismo.

Poincaré mismo lo expresa de esta manera: "Una pequeña causa que nos pasa desapercibida determina un considerable efecto que es imposible de ignorar, y entonces decimos que el efecto es debido al azar. Si conocemos exactamente las leyes de la Naturaleza y la situación del Universo en el momento inicial, podemos predecir exactamente la situación de este mismo Universo en un momento posterior. Pero aun si fuera el caso que las leyes de la Naturaleza no nos guardasen ningún secreto, todavía nosotros conoceríamos la situación inicial sólo **aproximadamente**. Si esto nos permitiera predecir la situación posterior con la **misma aproximación**, que es todo lo que necesitamos, podríamos afirmar que el fenómeno ha sido predicho, que es gobernado por leyes conocidas. Pero esto no es siempre así; puede pasar que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales produzcan grandes diferencias en el fenómeno final. Un pequeño error al principio produce un error enorme al final. La predicción se vuelve imposible, y tenemos un fenómeno fortuito".

Los físicos y demás científicos hicieron poco caso de este descubrimiento matemático (de hecho sólo los matemáticos continuaron trabajando en ello). Hasta el último cuarto del siglo XX donde, una vez apaciguada la llama de la Revolución de la Física, se observaron las consecuencias del descubrimiento de Poincaré. Y sobre todo por la ayuda de los ordenadores.

Se pretendía hacer predicciones a medio plazo del clima apoyándose en cálculo computacional intensivo. Pero se vio que era imposible porque simplemente tres variables podían desarrollar un comportamiento "caótico", es decir, muy complicado e impredecible (cambios no periódicos y crecimiento del efecto de las pequeñas diferencias en el inicio). Sin embargo, este caos es distinto del comportamiento al azar. Existe un orden dentro del caos que puede observarse geométricamente.

Imaginemos una curva en el espacio. La curva nunca se cruza, pero es infinita. Se construyó con unas determinadas condiciones iniciales (es decir, a partir de un punto determinado en el espacio). Si hubiésemos iniciado desde otro punto, por muy cercano que estuviera al punto original, la trayectoria hubiera sido distinta en el sentido de que si en la primera dio 4 vueltas alrededor del un lóbulo antes de pasarse al otro, en la segunda trayectoria daría, digamos 17 vueltas antes de pasar al otro lóbulo. Pero las dos trayectorias, en conjunto se verían como la curva imaginada. Siempre la misma figura. Ninguna trayectoria puede alejarse de los lóbulos ni entrar dentro de ellos, no son trayectorias al azar, aunque no sean predictibles.

Ahora, ¿qué importancia tenía para las Ciencias? Si tres variables generan un comportamiento complicado, no aleatorio, ¿qué no harán más variables? Aquí acaba la posibilidad de predicción a largo plazo de la Ciencia. Sin embargo, visto al revés, un comportamiento complejo, en lugar de ser causado por un enorme número de variables, la mayoría indeterminadas, ¿no será en realidad manejado por un puñado de variables en comportamiento caótico?

La teoría del Caos aporta un nuevo enfoque a la complejidad que es la característica común en la inmensa mayoría de los problemas de la Ciencia: reacciones químicas en el suelo, el comportamiento humano... todo eso rebosa complejidad. Y el caos no es desorden simplemente, sino un orden diferente, que debe verse de otro modo. Más aún, muchas variables no necesariamente han de generar un comportamiento tan complicado que parezca al azar. Muchas veces, de sus interacciones emerge un orden diferente. Por ejemplo, de la interacción de muchos seres humanos puede surgir una sociedad, que contiene un orden evidente. No es predecible a largo plazo, pero el orden existe, como en el atractor de Lorentz.

Así, la teoría del Caos puede aplicarse a toda Ciencia, pero hay que entender el enfoque nuevo que aporta, una especie de paradigma que no descarta ni el desorden aparente ni lo que parece ser "ruido de fondo" de un comportamiento lineal perfecto. Muchos problemas científicos podrían resolverse con una nueva óptica.

El **caos** es impredecible, pero determinable. O dicho de otro modo, el **caos** no es aleatorio, tiene un orden subyacente. En un principio, la **teoría del caos** se aplicaba al análisis de circuitos electrónicos, encontrando resultados tales como el aumento de la potencia de láseres (Ditto y Pecora) y la sincronización de circuitos. Se demostró entonces, que era posible sincronizar dos sistemas caóticos, siempre y cuando fuesen excitados por la misma señal, independientemente del estado inicial de cada sistema (Neff y Carroll). O sea, que al perturbar adecuadamente un sistema caótico, se le está forzando a tomar uno de los muchos comportamientos posibles. Lo que ocurre es que el **caos** es sensible a las condiciones iniciales. Sin



encontrar una explicación. Así surgió la **Teoría** que está tan de moda en nuestros días: la **Teoría del Caos**.

Según las ideas convencionales, los resultados habrían tenido que ser prácticamente los mismos. Lorentz ejecutó el mismo programa, y los datos de inicio casi fueron iguales (" esas diferencias muy pequeñas no pueden tener efecto verdadero en los resultados finales"). Lorentz demostró que esa idea era falsa. Al efecto que tienen las diferencias pequeñas e iniciales, después se le dió el nombre del 'efecto mariposa': "El movimiento de una simple ala de mariposa hoy, produce un diminuto cambio en el estado de la atmósfera. Después de un cierto período de tiempo, el comportamiento de la atmósfera diverge del que debería haber tenido. Así que, en un período de un mes, un tornado que habría devastado la costa de Indonesia no se forma. O quizás, uno que no se iba a formar, se forma."

Este fenómeno, y toda la **Teoría del Caos** es también conocido como dependencia sensitiva de las condiciones iniciales. Un cambio pequeño puede cambiar drásticamente el comportamiento a largas distancias de un sistema. Al medir, una diferencia tan pequeña puede ser considerada 'ruido experimental' o impuntualidad del equipo. Esas cosas son imposibles de evitar, incluso en el laboratorio más moderno. Con un número inicial 1,001 el resultado puede ser totalmente diferente que con 1,000543.

Es simplemente imposible alcanzar este nivel de eficacia al medir. De esta idea, Lorentz concluyó que era imposible predecir exactamente el tiempo. Pero esto llevó a Lorentz a otros aspectos de lo que viene llamándose **Teoría del Caos**. Lorentz intentó encontrar un sistema menos complejo que dependiera sensitivamente de las condiciones iniciales. Estudió las ecuaciones de convección y los simplificó. El sistema ya no tuvo que ver con la convección, pero sí dependía mucho de los datos iniciales, y esta vez solo había 3 ecuaciones. Después se vió que sus ecuaciones describen precisamente una "rueda de agua".

En 1963 Lorenzo publicó lo que había descubierto, pero como lo publicó en un periódico meteorológico, nadie le lo tomó en consideración. Su descubrimiento solo fue reconocido más tarde, cuando fueron redescubiertos por otros científicos. Lorentz descubrió algo revolucionario, pero tuvo que esperar a alguien que le descubriera a él.

Así surgió la nueva Ciencia que todavía en nuestros día también es muy joven. Hay muchas ideas falsas sobre el **caos**, según las cuales la **Teoría del Caos** es un tratado del desorden. Nada más lejos de la verdad. Es cierto que la **Teoría** dice que cambios pequeños pueden causar cambios enormes, pero no dice que no hay orden absolutamente. Una de las ideas más principales es que mientras es casi imposible predecir exactamente el estado futuro de un sistema, es posible, y aún más, muchas veces fácil, modelar el comportamiento general del sistema. Eso es lo que se muestra en el "Atractor" de Lorentz. O sea, el **Caos** no se trata del desorden, incluso en cierto sentido podemos decir que es determinista.

¿Qué es un atractor? Consta de múltiples órbitas periódicas, representa un sistema cuya velocidad y posición cambian a lo largo de una sola dirección. Consta de dos ejes; uno representa la posición, el otro la velocidad. Los atractores pueden ser multidimensionales, pues los sistemas pueden tener muchas variables, que equivalen a otras tantas dimensiones en el espacio de estados: por ejemplo, posiciones y velocidades que varíen en tres dimensiones. Pero veamos un ejemplo.

"La rueda de agua" de Lorentz, antes mencionada, es parecida a la rueda en el parque de atracciones. Tiene cajitas (generalmente más de siete), que están colgadas a la rueda, o sea, su 'boca' siempre mira para arriba. Abajo todas tienen un hueco pequeño. Y todo eso está dispuesto bajo un flujo de agua. Si le echamos agua a velocidad pequeña, el agua después de entrar en el cajón, sale inmediatamente por el hueco. Así que no pasa nada. Si aumentamos la corriente del agua un poco, la rueda empieza a rotar, porque el agua entra más rápido a las cajitas que sale. Así, las cajas pesadas por el agua descienden dejando el agua, y cuando están vacías y ligeras, ascienden para ser llenadas de nuevo. El sistema está en un estado fijo, y va a continuar rotando a una velocidad prácticamente constante. Pero si aumentamos la corriente más, van a pasar cosas extrañas. La rueda va a seguir rotando en la misma dirección, pero su velocidad va a decrecer, se para y luego gira en la dirección contraria. Las condiciones de las cajitas ya no están suficientemente sincronizadas como para facilitar solamente una rotación simple, el **caos** ha conseguido el mando en este sistema aparentemente tan sencillo. Ahora no podemos decir nada del estado de la rueda en concreto, porque el movimiento nos parece hecho totalmente al azar.

Los sistemas caóticos están presentes todos los días. Y en vez de mirarlos cada uno, investigamos los comportamientos de los sistemas parecidos. Por ejemplo, si cambiamos un poco los números iniciales del atractor, siempre nos dará números distintos que en el caso anterior, y la diferencia con el tiempo va a ser cada vez más grande, de tal forma que después de un tiempo, los dos casos aparentemente ya no tendrán que ver, pero sus gráficas serán iguales.

¿Y por qué no se desarrolló esta Ciencia hasta ahora? El 'padre' del conjunto Mandelbrot fue un libro publicado por Gaston Maurice Julia, y aunque recibió el 'Grand Prix de l'Académie des Sciences', sin visualizar sus funciones nadie le dio mucha importancia. La respuesta es simple: ordenadores. Para poner un conjunto Mandelbrot en la pantalla se necesitan 6 millones de cálculos (operaciones), que son mucho para ser calculados por científicos, pero para los ordenadores actuales es una tarea de todos los días. Y de verdad, la **Teoría** surgió cuando los matemáticos empezaron a introducir números al ordenador y miraron lo que éste hacía con ellos. Después trataron de visualizarlo todo de alguna forma.

Pasado un tiempo, las imágenes se veían como la naturaleza. Nubes, montañas y bacterias. Así indicaron por qué no podemos predecir el tiempo. Parecían ser iguales al comportamiento de la bolsa y de las reacciones químicas a la vez. Sus investigaciones dieron respuestas a preguntas puestas hace 100 años sobre el flujo de fluidos, cómo pasaban de un flujo suave hacia un flujo caótico, o sobre el comportamiento del corazón, o las formaciones de rocas. Los sistemas caóticos no son hechos al azar, y se conocen por unos rasgos muy simples.

Los sistemas caóticos son deterministas, o sea hay algo que determina su comportamiento.

Los sistemas caóticos son muy sensitivos a las condiciones iniciales. Un cambio muy pequeño en los datos de inicio producen resultados totalmente diferentes.

Los sistemas caóticos parecen desordenados, o hechos al azar. Pero no lo son. Hay reglas que determinan su comportamiento. Sistemas de verdad hechos al azar no son caóticos. Los sistemas regulares, descritos por la Física clásica, son las excepciones. En este mundo de orden, reglas caóticas...

Las nuevas investigaciones muestran que sí hay esperanzas de 'domesticar' el **caos**. Edward Ott, Ceslo Grebogi (físicos) y James A. Yorke (matemático)

elaboraron un algoritmo matemático con el que un **caos** puede ser transformado en procesos periódicos sencillos. Y ya superaron experimentos, de los que probablemente el más importante es el experimento de A. Garfinkel de la Universidad de California. Logró transformar el movimiento caótico de un corazón sacado de un conejo en un movimiento regular. Obviamente el uso de esto en la medicina significaría un avance enorme.

La idea nueva es que no hace falta comprenderlo todo sobre el movimiento caótico para regularlo. El algoritmo Ott-Grebogi-Yorke mira continuamente a qué 'dirección' tiende el proceso, y variarlo con perturbaciones pequeñas para lograr que esté de nuevo en el 'camino' antes deseado. Naturalmente aquí no se termina de vigilar el sistema, porque después el **caos** aparecerá de nuevo. Yorke dice que el método es como "ayudar a andar a un elefante con un palito".

Parece que habrá más avances en la regulación del **caos**, lo cual nos daría respuesta a muchas preguntas, nos ayudaría evitar catástrofes, y daría un avance enorme a toda la Ciencia, todo el saber logrado hasta ahora.

Los sistemas caóticos son muy flexibles. Si tiramos una piedra al río, su choque con las partículas del agua no cambia el cauce del río, sino que el **caos** se adapta al cambio. Sin embargo, si el río hubiese sido creado por nosotros con un orden artificial, donde cada partícula de agua tuviera una trayectoria determinada, el orden se hubiera derrumbado completamente. El **caos** en realidad es mucho más perfecto que nuestro orden artificial; hemos de comprender el **caos** y no intentar crear un orden rígido, que no sea flexible ni abierto a la interacción con el medio.

Siempre hemos estado obsesionados por el control, creemos que cuantas más técnicas creemos, más control tendremos sobre el mundo. Pero con cada tecnología nueva que introducimos se nos echan encima muchos problemas, para cada uno de los cuales hemos de inventar nuevas tecnologías. Volvamos al ejemplo del río: si tiramos una piedra el cauce no cambia, pero si tiramos una roca gigante la flexibilidad del sistema caótico no será suficiente. Es lo que ocurre en la Tierra: es un sistema caótico, siempre cambiante y adaptándose, pero si nos pasamos de la raya el sistema se puede romper. De echo lo está haciendo y por eso tenemos problemas con la capa de ozono, el aumento de la temperatura global y el deshielo, problemas con los recursos como el petróleo, etc.

Aprender a vivir en el **caos** no significaría aprender a controlarlo, ni a predecirlo. Al contrario: hemos de enfocar la cuestión desde el punto de vista de que nosotros también somos parte del **caos**, no nos podemos considerar como elementos aparte. Desde esa perspectiva lo que podemos hacer es vivir de la creatividad del **caos**, sin intentar imponernos: si conseguimos realmente formar parte del sistema, el concepto de sujeto y objeto desaparecerán, con lo cual el problema del control también.

Veamos unos ejemplos donde se ve claramente que la Tierra es una unidad caótica: un bosque, por citar algo, puede llegar a ser muy flexible y adaptable debido a su rica red de rizados retroalimentadores que interactúan con el medio constantemente. Algunos bosques, incluso, se han ajustado a cambios drásticos. Per cuando este sistema caótico se desestabiliza (porque empezamos a talar bosques, por ejemplo), la conducta no lineal puede hacer que su dinámica cambie abruptamente o que incluso se colapse. Ya tenemos el ejemplo de tierras sobre las que hace años hubo ricos bosques que creaban su propio microclima y ellos mismos hacían que las condiciones les fueran favorables; sin embargo, ahora no se puede plantar ni una sola planta ahí. Cortar un árbol puede significar que el bosque se quede con un árbol menos. Cortar diez árboles también. Pero cortar mil árboles puede no

significar que el bosque se quede con mil menos, sino que a partir de ahí se extingan todos. Los procesos naturales de la Tierra son indivisibles y constituyen un holismo capaz de mantenerse y alimentarse, al menos que en el sistema caótico intervenga algún factor que lo desestabilice.

En la atmósfera de nuestro planeta hay considerables cantidades de metano. Por lógica, todo el metano y el oxígeno libres deberían haber entrado en una reacción de combustión. Como Lovelock remarcó, metano, oxígeno, sulfuro, amoníaco y cloruro de metilo están en la atmósfera en diferentes niveles de concentración de lo que podríamos esperar que ocurriera en una probeta. Lo mismo ocurre con el porcentaje de sal del mar. Estas concentraciones aparentemente extrañas resultan ser las óptimas para la supervivencia de la vida sobre la Tierra, es decir, la Tierra se comporta como un ser vivo, con los bosques, los océanos y la atmósfera como sus órganos.

Cuando un automóvil (fruto de la visión mecanicista) se avería, buscamos la parte averiada. Es una parte la que hace que todo el coche deje de comportarse como una unidad (porque por mucho que metamos la llave no arranca). Pero en los sistemas caóticos, como son las familias, las sociedades o los sistemas ecológicos, el problema se desarrolla siempre a partir de todo el sistema, nunca a partir de una "parte" defectuosa. Siempre es necesario tener en cuenta todo el contexto en el que se manifiesta un problema.

El cuerpo humano también es un sistema caótico. Está claro que es imposible predecir el recorrido que una partícula cualquiera tendrá dentro de nuestro cuerpo. También está claro que la medicina todavía no puede hacer una predicción acerca de la evolución del cuerpo de determinado individuo. Sin embargo, el cuerpo humano, a pesar de las muy diferentes condiciones externas a que puede estar expuesto (clima, alimento, esfuerzo físico, etc), siempre mantiene una forma general. Es tan resistente a cambios (dentro de lo que cabe) porque los sistemas caóticos son muy flexibles. Una enfermedad es algo impredecible, pero si el cuerpo no tuviera la libertad de ponerse enfermo, con cualquier cambio producido el sistema se desmoronaría.

Hasta tal punto es flexible dicho sistema, que mantiene una forma más o menos parecida durante más de 70 años, a pesar de que ningún átomo de los que hoy forman nuestro cuerpo era el mismo hace 7 años. La explicación de que un sistema tan impredecible como el cuerpo humano sea tan estable está en que es un atractor extraño y está lleno de atractores extraños. El sistema siempre es atraído hacia un determinado modelo de conducta; si cambiamos algo en el sistema éste vuelve cuanto antes hacia el atractor extraño. Esto no significa que la conducta sea mecánica, todo lo contrario: es impredecible. Sólo sabemos hacia dónde va a tender.

Por ejemplo, en el corazón la conducta atractora es el disparo de una secuencia de neuronas. Conocemos aproximadamente el ritmo que debería tener el corazón, pero éste siempre tiene pequeñas irregularidades. Estas pequeñas alteraciones son una señal de salud del corazón, una muestra del vigor del sistema caótico, que es flexible a los cambios. El **caos** permite al corazón un abanico de comportamientos (grados de libertad) que le permiten volver a su ritmo normal después de un cambio.

Un organismo sano, animal o vegetal, es un atractor extraño, cada uno con su particular grado de libertad y grado de regularidad

## **BIBLIOGRAFÍA**

1. Alligood, K. T.; Sauer, T.; Yorke, J. A. 1996.- *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. Springer-Verlag. New York.
2. Crutchfield, J. P.; Farmer, J.D.; Packard, N.H.; Shaw, R.1986.- *Chaos, Sci. Am.*255(6) 46-57.
3. Gleick, J. 1988.- *Chaos: making a new science*. Penguin Books, New York.
4. Lorenz, E.N. 1963.-"Deterministic Nonperiodic Flow", *J. Atmos. Sci.*20 130-141.
5. Lorenz, E.N. 1993.-*The essence of Chaos*. University of Washington Press. New York.
6. Ott, E. 1993.-*Chaos in Dynamical Systems*.Cambridge University Press. New York.
7. Robertson, R.; Combs, A. eds. 1995.-*Chaos Theory in Psychology and the Life Sciences*. Lawrence Erlbaum Associates: Mahwah, New Jersey.
8. Stewart, I. 1991.-*¿Juega Dios a los dados? La Nueva matemática del Caos*. Grijalbo Mondadori.Barcelona

**Javier de Lucas**  
**javier@javiardelucas.es**