Los 23 Problemas de Hilbert y su Trasfondo Histórico

Leo Corry
Universidad de Tel Aviv

Nada debe sorprendernos que con la llegada del nuevo milenio pocos quieran perder la oportunidad de hacer grandes recuentos históricos retrospectivos, analizando cómo hemos llegado hasta aquí y a dónde nos dirigimos ahora. Aunque los matemáticos deberían saber mejor que nadie el valor convencional (es decir, la falta de valor real) de tal efemérides,[1] todo parece indicar que también dentro de esta comunidad asistiremos a los recuentos de rigor al apuntar el año 2000. Sea como sea, cualquier oportunidad es buena para evaluaciones, así que podemos tratar de aprovechar ésta que se nos ofrece aquí.

Se trata antes de todo de dos centenarios relacionados con el nombre del gran David Hilbert (1862-1943). Hilbert, el último universalista, y sin duda el matemático más influyente de la primera mitad de este siglo, publicó en 1899 el famoso *Grundlagen der Geometrie* ("Fundamentos de la geometría"), cuyo impacto a corto y a largo plazo sobre la matemática contemporánea no ha dejado de alabarse. Luego, en el congreso internacional de las matemáticas realizado en 1900 en París, Hilbert pronunció una de las ponencias centrales, en la cual presentó una lista de problemas abiertos a los cuales los matemáticos deberían prestar gran atención en el siglo que estaba por iniciarse.

Desde ese momento la lista se convirtió en un verdadero objeto de culto: a lo largo de los años, innumerables matemáticos trataron sus fuerzas en resolverlos, y quienes tuvieron éxito en la empresa se cubrieron de gloria profesional. Más de una vez se reunieron importantes grupos de matemáticos para evaluar el presente estado de la lista, y ahora, al acercarse el año dos mil, el tema vuelve a ser relevante. Muchos son de la opinión que una semejante lista no puede ser elaborada hoy en día por un solo individuo, pero hay sin duda quien no se amedrentará por el tamaño del precedente histórico y tratará de repetir la hazaña.

El impacto de la lista de problemas anunciada por Hilbert en 1900 es indicativa de su gran capacidad de visión integrativa dentro de la profesión. No es exagerado afirmar que tal vez sólo él hubiera podido cubrir todo ese campo y producir una lista coherente de los problemas que se le hacían más urgentes a lo largo y ancho de la disciplina. Pero por otro lado, este interesante capítulo de la historia de las matemáticas nos enseña también algo sobre la manera en que ciertos campos de interés adquieren mayor o menor prominencia durante un determinado período de tiempo, a consecuencia de las opiniones coherentes y claramente formuladas de ciertas figuras destacadas en la comunidad, más que por razones intrínsecas y objetivas.

Al transcurrir cien años del congreso de París y de la famosa ponencia de Hilbert, entonces, me parece útil describir aquí, aunque sea en breve, el trasfondo histórico sobre el cual se desarrollaron estos acontecimientos, intentando así contribuir a una apreciación más balanceada de su significado.

----

1. Espero que no se me considere demasiado quisquilloso al apuntar que se trata tan sólo del año 3E8 (hexagesimal) en la cuenta gregoriana, 5760 (1680 hexa) en la cuenta judía, o 1378 (562 hexa) desde la héjira musulmama. Éstas son las únicas tres que yo conozco, pero sin duda hay muchas más.

Los estudios de Hilbert y toda la primera parte de su carrera investigativa transcurrieron en su ciudad natal de Königsberg excepto por un breve período de viaje, en el cual Hilbert visitó a Felix Klein (1849-1925) en Leipzig y a Charles Hermite (1822-1901) en Paris. La tradición de análisis y física matemática que se había desarrollado en Königsberg bajo el liderazgo de Carl Gustav Jacobi (1804-1851) y Franz Neumann (1798-1895) jugó un papel decisivo en el ascenso de la matemática alemana a una posición de predominancia mundial. Esta es la tradición en la cual se educó Hilbert, pero la influencia más decisiva sobre la formación de su horizonte matemático provino de su entrañable amistad con dos jóvenes compañeros: Adolf Hurwitz (1859-1919), quien en un principio fue maestro de Hilbert y luego su colega, y Hermann Minkowski (1864-1909).

En sus años como joven profesor en Königsberg Hilbert nunca contó con numerosos estudiantes. Sin embargo, siempre preparó sus cursos con esmero, y llegó a cubrir en pocos años los más variados temas: teoría de invariantes, teoría de números, geometría proyectiva, diferencial y algébrica, teoría de Galois, ecuaciones diferenciales, teoría de potencial, hidrodinámica, y otras.

La primera fase de la carrera investigativa de Hilbert—de 1885 a 1893—estuvo claramente dominada por una sola disciplina: la teoría de los invariantes algebraicos. En 1888 publicó el primer trabajo que le valió amplio reconocimiento. Se trataba de la generalización de un resultado de Paul Gordan (1837-1912), en la que se establecía la existencia de una base finita para cualquier sistema de invariantes de grado arbitrario. La demostración de Hilbert era elegante y sucinta, y se basaba en un argumento de reducción al absurdo. Una demostración de existencia de este tipo constituyó una innovación absoluta, e inicialmente fue recibida con recelo por algunos matemáticos. La principal contribución de Hilbert a la teoría de invariantes consistió ante todo en haber introducido métodos aritméticos a este dominio.

Entre 1892 y 1899 el principal campo de investigación de Hilbert fue la teoría de los cuerpos de números algebraicos. Aunque Hilbert abandonó después de 1893 la investigación de los invariantes, el nuevo dominio que abordó no implicó en modo alguno una ruptura total con su pasado. En efecto, Hilbert ya había dictado cursos en Königsberg sobre la teoría algebraica de los números y, más aún, al trabajar los invariantes, él había implementado técnicas que fueron originalmente introducidas en el estudio de este segundo dominio de trabajo. En 1893 la asociación de matemáticos alemanes (*DMV*) comisionó a Hilbert y a Minkowski la preparación de un recuento sistemático y comprensivo del estado de desarrollo actual de la teoría de los números, para el uso de la comunidad matemática en general. El mismo hecho de la comisión indica de por sí que Hilbert era considerado a la sazón como una autoridad en el campo, aún sin haber publicado ninguna obra mayor. A fin de cuentas, Minkowski resultó estar tremendamente ocupado con su propio libro sobre la geometría de los números y debió abandonar el proyecto. Hilbert culminó la parte que le fue encomendada y la publicó en 1897.

El reporte sobre los números de Hilbert —o *Zahlbericht* como llegó conocerse— no era un recuento en el sentido usual de la palabra. Hilbert presentó en efecto la visión sistemática y comprensiva que le fue encomendada, pero en realidad hizo mucho más que eso, contribuyendo con una cantidad enorme de nuevos y significativos resultados originales.

En el semestre de invierno de 1898-99 Hilbert dictó por primera vez en Göttingen un curso sobre los fundamentos de la geometría. Su interés en este campo pareció a muchos significar un marcado corte con los dos dominios en los cuales había sobresalido con su investigaciones desde 1885. Pero en realidad, las cuestiones de fundamentos de la geometría habían ocupado los pensamientos de Hilbert desde hacía bastante tiempo, y de hecho él ya había dictado cursos similares en Königsberg.17 Hilbert se basó en muy variadas fuentes de inspiración, entre las cuales podemos mencionar las obras de Arthur Cayley (1821-1895) y Klein sobre la coordinación de la geometría proyectiva, los trabajos de la escuela italiana sobre los fundamentos axiomáticos de la geometría euclidiana, los recientes trabajos de Heinrich Hertz (1857-1894) sobre los fundamentos de la geometría, y otros. Basado en el contenido de este curso, Hilbert escribió su *Grundlagen der Geometrie*, publicado por primera vez en 1899.

Hilbert trató de investigar los varios tipos de geometrías que pueden desarrollarse al asumir la validez de algunos de los axiomas básicos. De esta manera demostró, por ejemplo, que los teoremas de Pascal y Desargues no requieren ningún tipo de suposiciones de continuidad para su demostración. Asimismo demostró que la geometría euclídea es compatible con un sistema aritmético de propiedades similares a las de los números reales, y que por tanto su integridad lógica era paralela a la de otras ramas de la matemática, como por ejemplo el análisis. Sus conclusiones resultaban ser igualmente válidas para otras geometrías que no satisfacían todos los axiomas.

Si queremos entonces resumir la carrera de Hilbert en sus fases iniciales debemos enfatizar su amplio conocimiento de una gran variedad de disciplinas, y una muy fuerte conección con las tradiciones que se desarrollaron en el siglo 19 tanto en Alemania como en las islas británicas, en Francia y en Italia. El pensamiento axiomático domina tan sólo una pequeña parte de su pensamiento y de su actividad temprana, y esto de manera muy diferente de las tendencias formalistas a las cuales su nombre he quedado asociado posteriormente. A diferencia de matemáticos del tipo de Giuseppe Peano (1858-1939) o Felix Hausdorff (1868-1942), Hilbert puede ser calificado de "modernista moderado", cuya mayor habilidad consistió, no tanto en introducir innovaciones radicales sino más bien en profundizar y desarrollar las tradiciones existentes, clarificando sus puntos más esenciales, preparando concisas síntesis de vastos territorios, y ofreciendo nuevos puntos de partida para una renovada investigación de los campos clásicos cultivados por sus predecesores. Los famosos problemas de 1900 encajan claramente dentro de esta descripción.

Al recibir la invitación a dirigirse al congreso matemático en París, Hilbert era ya no de los matemáticos más destacados de Alemania, y ampliamente reconocido fuera de su país. Tres años antes, Henri Poincaré (1854-1912), el único matemático contemporáneo cuyos campos de interés y conocimiento se comparaban en amplitud y variedad con los de Hilbert, había escrito la charla central que fue leída en su nombre en el congreso de Zurich. La charla trató de las relaciones entre el análisis puro y la física matemática, y Hilbert pensó inicialmente que la mejor manera de afrontar debidamente el importante honor que se le hizo al invitarlo sería referirse a las ideas de Poincaré y presentar una visión alternativa. Su amigo Minkowski, sin embargo, lo disuadió de tal plan, y a cambio le sugirió una dirección totalmente distinta:

> *Lo más atractivo —escribía Minowski desde Zurich—sería que intentes dar un vistazo al futuro, al enumerar los problemas a los cuales deberían dedicarse los matemáticos en adelante. Así podrías crear las circunstancias para que se siga hablando de tu charla en las décadas venideras. Eso sí, debes tener en cuenta que la profecía tiene sus dificultades*.

Pero si de profecías hablamos, las palabras mismas de Minkowski resultaron ser lo más proféticas que cabe esperar. En realidad Minkowski pudo comprender el papel de esta charla en términos más amplios que los puramente matemáticos (aunque tal vez menos objetivos), como vemos en otra carta enviada posteriormente, y en la cual escribía a Hilbert:

> *Desde este momento has realmente tomados las riendas de la matemática y serás ampliamente reconocido como su director general.*

Hilbert trató, entonces, de delinear un plan de trabajo para los años venideros que no se limitara a una rama particular de la matemática sino que diera una visión general y tuviera una resonancia mucho más amplia. El haber planteado su visión en forma de problemas derivaba de la centralidad que él otorgaba a éstos como fuente necesaria de vitalidad para la disciplina toda. Aquellos campos donde los problemas no resueltos abundan son los campos vitales de la matemática. Estos problemas deben ser suficientemente complicados para que atraigan nuestra atención, pero suficientemente simples en su planteamiento, para que se vea claramente lo que persiguen: debe ser posible explicar estos problemas a la primera persona que encontremos al salir a la calle. Los problemas tampoco deben ser del todo inaccesibles, explicaba Hilbert, ya que de lo contrario desistiremos rápidamente de nuestra intención de resolverlos.

En París Hilbert expuso tan sólo diez problemas. La versión escrita de la charla es la que contiene los veintitrés. Éstos pueden ser clasificados en cuatro amplias categorías:

1. Fundamentos (análisis, geometría, física) – problemas 1 al 6, y 18

2. Teoría de números – problemas 7 al 12

3. Álgebra (Invariantes y geometría algébrica) – problemas 13 al 17

4. Análisis (cálculo variacional y análisis complejo) – problemas 19 al 23

Los problemas del grupo uno exploran diferentes aspectos de los fundamentos de las matemáticas: la hipótesis del continuo, la relación entre axiomas de congruencia y de continuidad en la geometría del espacio, la caracterización de las geometrías que satisfacen la desigualdad triangular pero no el axioma euclidiano de la congruencia de triángulos, y, finalmente, la posible fundamentación de las teorías físicas en términos axiomáticos similares a los usados por Hilbert en su análisis de la física.

Los problemas del grupo dos se sitúan directamente dentro del campo de acción hilbertiano. Primero dos problemas de la teoría analítica (los números trascendentales y la hipótesis de Riemann), y luego tres problemas especializados de la teoría algebraica: una demostración general de las leyes de reciprocidad en un cuerpo algebraico arbitrario, la determinación de un procedimiento de decisión para ecuaciones diofánticas, y el desarrollo de una teoría de las formas en *n* variables con coeficientes en un cuerpo algebraico arbitrario.

El tercer grupo significaba para Hilbert el más alto rango dentro de la matemática pura: álgebra y la teoría de las funciones. Especialmente conocido entre éstos es el diecisiete, tocante a la representación en sumas de cuadrados de funciones reales, positivas definidas. El dieciocho trata un problema de grupos de Lie.

El último de los grupos discute problemas de análisis. Los problemas diecinueve y veinte proponen clasificar las soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales para decidir si ellas son necesariamente analíticas. El veintiuno pregunta si cierto sistema de ecuaciones diferenciales puede ser formulado de manera que su grupo de monodromía coincide con uno que nos es dado con anticipación. El veintidós trata de funciones automórficas y el veintitrés del cálculo de variaciones.

Obviamente, Hilbert no habría sugerido que esta lista sea comprensiva o balanceada. Algunos de los problemas eran muy generales en su formulaciones, otros muy específicos. En algunos se trataba simplemente de un vago plan de trabajo. En este breve recuento no podremos describir en detalle el desarrollo de cada uno de los problemas aquí planteados y de qué manera fueron atacados en las décadas siguientes por los matemáticos de las próximas generaciones. Lo que si podemos hacer es describir sucintamente la manera en que los matemáticos de Göttingen, cercanos a Hilbert y siempre fuertemente influenciados por él, dedicaron sus esfuerzos a los temas sugeridos por él en la lista de 1900.

Si nos fijamos por ejemplo en la lista de los sesenta trabajos de doctorado dirigidos por Hilbert entre 1898 y 1915, observaremos que sólo uno de ellos trata un problema de la teoría de los invariantes, el primer campo de acción de Hilbert. En la lista de problemas, tal vez sólo el número catorce pertenece a esta disciplina. Tres estudiantes abordaron problemas de geometría algébrica, relacionados de alguna manera con el problema diecisiete. A pesar de que en esta época se registro en Alemania una gran actividad en los nuevos campos de investigación del álgebra (teoría de anillos, anillos de polinomios, grupos y cuerpos), ni Hilbert ni sus alumnos en Göttingen contribuyeron a ellos.

Por contraste, la teoría de los cuerpos de números algebraicos siguió ocupando un lugar predominante en los intereses de Hilbert y de sus colaboradores. Hilbert mismo no publicó ya en esta área, pero once de sus estudiantes escribieron disertaciones en tópicos relacionados con ella. Tres de ellos trabajaron en problemas directamente asociados con el problema doce.

También los fundamentos de la geometría atrajeron los esfuerzos de varios de sus estudiantes. Doce de sus estudiantes escribieron doctorados relacionados con geometría, de los cuales cinco tenían que ver con cuestiones de fundamentos. Max Dehn (1878-1952), por ejemplo, uno de sus alumnos más destacados, demostró en una serie de trabajos que la relación entre los teoremas de congruencia y los referentes a figuras de igual volumen en la geometría del espacio difieren esencialmente de sus paralelos en la geometría plana.

Hasta el inicio de la primera guerra mundial, la disciplina a la cual dedicaron los alumnos de Hilbert la mayor cantidad de doctorados fue el análisis. Veintinueve de sus alumnos escribieron disertaciones en esta campo, concentrándose especialmente en dos direcciones: el cálculo de variaciones (prestando especial interés a los métodos derivados del principio de Dirichlet), y la teoría de las ecuaciones integrales, que ocupó los esfuerzos investigativos del propio Hilbert entre 1902 y 1915, pero que no había sido mencionada de forma alguna en la lista de 1900.

Posteriormente, entre 1918 y 1933, los fundamentos de la aritmética ocuparon la atención de Hilbert y de sus discípulos, cinco de los cuales escribieron sus disertaciones en este campo. Entre ellos cabe destacar a Wilhelm Ackermann

(1896-1962) quien analizó la ley del tercero excluido en el marco de la teoría de la demostración de Hilbert.

Podemos entonces resumir diciendo que la lista de problemas de 1900 no fue la única ni la mayor fuente de inspiración para los trabajos de Hilbert y sus círculo en Göttingen. Algunos de los problemas sirvieron de trasfondo tan sólo a nivel programático. Otros ofrecieron oportunidades más concretas de trabajo, pero uno se pregunta en qué medida Hilbert mismo pensó en 1900 que éste podría ser el resultado de su sugestión. Es claro, por otra parte, que en muchos casos Hilbert no pudo haber sabido con certeza el gran esfuerzo que la resolución de un determinado problema de su lista implicaría. Minkowski tenía sin duda razón al afirmar que la profecía tiene sus dificultades. Sin embargo, considerables esfuerzos fueron dedicados a lo largo de los años a los diferentes problemas de la lista, y muchas ideas matemáticas que se desarrollaron en este siglo tienen origen en esos esfuerzos.

Lecturas Relacionadas

Corry, L. (1996) *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, Basel and Boston, Birkhäuser (Science Networks Vol. 17).

Corry, L. (1997) "David Hilbert and the Axiomatization of Physics (1894-1905)", *Archive for History of Exact Sciences* 51, 83-198.

Rowe, D.E. (1989) "Klein, Hilbert, and the Göttingen Mathematical Tradition", *Osiris* 5, 186-213.

Sinaceur, H. (1984) "De D. Hilbert à E. Artin: les différents aspects du dix-septième problème et les filiations conceptuelles de la théorie des corps réels clos", *Archive for History of Exact Sciences* 29, 267-287.

Sinaceur, H. (1991) *Corps at Modèles. Essai sur l'histoire de l'algèbre réelle*, Paris, Vrin.

Este artículo se publicó originariamente en el Boletín de la Asociación Matemática Venezolana Vol. V, No. 2 (1998)