La matemática de la votación ponderada. Los índices de Shapley-Shubik y de Deegan-Packel

01. Una breve introducción. Votar en forma ponderada

Una votación simple es aquella en la que cada votante emite un voto.

La votación ponderada corresponde al caso en que cada votante tiene un número distinto de votos, ya sea por representar a intereses financieros de diferente potencia económica, o porque tienen diferente implicación en la reunión asamblearia donde es necesario votar, o por representar colectivos de amplitud diferente, etc..

Para la toma de decisiones en votación ponderada es necesario que los votos que reciba la opción ganadora superen una cuota prefijada de antemano, que en general, aunque no necesariamente, es el 50% de los votos.

Veamos algunos ejemplos de votaciones ponderadas.

Ejemplo 1:
Supongamos una asamblea de 201 personas. Si se agrupan en los partidos políticos siguientes: 62 del PSOE, 58 del PP, 48 de PODEMOS, 21 de IU, 6 de CIUDADANOS y 6 de UPD. Sea la situación donde hay que votar por 3 opciones: A, B y C.

En una votación simple, cada persona votaría por la opción que le interesa, pudiéndose obtener resultado como, por ejemplo: Opción A: 71 votos, Opción B: 102 votos, Opción C: 28 votos. Obviamente, en este caso la mayoría la obtendría la opción B, que además es mayoría absoluta, pues supera a la mitad de los 201 votos emitidos (cada persona ha emitido un único voto).

En cambio, en una votación ponderada, los miembros de cada colectivo votarán lo mismo, es decir, hay solo seis votantes, PSOE, PP, PODEMOS, IU, CIUDADANOS y UPD. Cada votante emite un número diferente de votos: tantos como personas integren el grupo que representa cada votante. Ninguna de las tres opciones, A,B, C tendría menos de 5 votos, ya que el votante de menos votos emite cinco. La cuota que establece la mayoría absoluta es el 50% de los votos, esto es, 101 votos. Ninguno de los votantes, por si solo podría dar la mayoría absoluta a una de las tres opciones, aunque si lo harían si algunos de los votantes acordaran unir sus votos.

Se daría mayoría absoluta en una opción, supongamos la opción A, si se dieran las agrupaciones de votos (coaliciones) siguientes:

1) PSOE y PP (62+58=120).
2) PSOE y PODEMOS (62+48=110)
3) PP y PODEMOS (58+48=106)

Mientras que los restantes partidos, IU, CIUDADANOS y UPD nunca alcanzarían a lograr la mayoría absoluta, ni siquiera uniendo sus votos a uno de los tres grupos mayoritarios anteriores:

- Si unen sus votos al PSOE: 62+21+6+6=95, insuficiente.
- Si unen sus votos al PP: 58+21+6+6=91, insuficiente.
- Si unen sus votos a PODEMOS: 48+21+6+6=80, insuficiente.

Estos partidos, al no poder influir en la votación de ningún modo, podrían definirse como comparsas.

Ejemplo 2:
Supongamos que los cuatro socios mayoritarios de una empresa tienen los siguientes porcentajes de acciones:
socio 1: 26%, socio 2: 29%, socio 3:27%, socio 4: 12%
Resto de los socios R: 6%
El control de la empresa lo tendrían dos de los tres primeros socios mayoritarios en cuanto unan sus votos, ya que sobrepasarían la cuota del 50% de las acciones, con lo que nunca perderían una votación. El cuarto socio mayoritario (12%) nunca podría influir en decisión alguna, ni siquiera con el apoyo del resto de los socios minoritarios (6%). El cuarto socio mayoritario es un comparsa.

Ejemplo 3:
Supongamos que en un ayuntamiento es necesario que los concejales voten para elegir entre ellos al alcalde de la corporación. Al hacerlo, es claro que influirá en el resultado de la votación el número de concejales de cada partido político.
Así, si se da la situación de un total de 17 concejales, repartidos entre los cuatro partidos políticos siguientes: partido A: 8 concejales, partido B: 5 concejales, partido C: 3 concejales, y partido D: 1 concejal. Obviamente, la cuota que daría la mayoría absoluta es de 9 concejales.
Aunque el grupo mas fuerte ha resultado ser el partido A (8 concejales), no es seguro que el alcalde sea elegido entre sus miembros, pues la mayoría absoluta es de 9 concejales, y si los restantes partidos unieran sus votos, el alcalde sería elegido entre uno de los restantes grupos, B, C o D (5+3+1=9). En este caso, todos los partidos políticos A,B,C y D son imprescindibles, no hay comparsas. Todos ellos, incluso el partido D que tiene un solo concejal, tienen un alto índice de poder, ya que su decisión puede influir en la elección del alcalde.

Ejemplo 4:
El Consejo de Seguridad de las Naciones Unidas antes de 1965 estaba compuesto por cinco miembros permanentes (EEUU, FRANCIA, INGLATERRA, RUSIA, CHINA) y seis miembros no permanentes. Se asignó un número de cinco votos a cada uno de los miembros permanentes y de un solo voto a cada uno de los miembros no permanentes. La cuota de decisión fue establecida en 27 votos.
Para aprobar una moción es obvio que tenían que estar a favor los cinco miembros permanentes (5+5+5+5+5=25 votos) mas al menos dos de los miembros no permanentes (1+1=2 votos). Es decir, cualquiera de los miembros permanentes adquiría el derecho a vetar cualquier moción, mientras que para que una moción fuera vetada por los miembros no permanentes habrían de unir sus votos al menos cinco de ellos, ya que con uno solo mas los cinco miembros permanentes solo alcanzarían 26 votos.

Con estos ejemplos podemos vislumbrar que en el juego de la votación ponderada, los votantes tienen distinto poder. Y el poder de cada votante depende no solo del número de votos que puede emitir, sino del número de votos que emite cada uno de los restantes votantes del juego y también de la cuota fijada.

¿Cómo medir el poder de cada uno de los votantes en el juego?. Se han ideado diversos índices de poder, apelando a criterios diversos. En un artículo anterior, donde incluimos esta misma introducción al tema, hemos expuesto el llamado Índice de Banzhaf. Vamos ahora a mostrar el fundamento de otros dos índices de poder, los llamados Índice de Shapley-Shubik y Índice de Deegan-Packel, con aplicación a algunos ejemplos.

02. Definiciones:

Representaremos por $[q: v(A), v(B), ..., v(\Gamma)]$ a la votación ponderada cuya cuota es q y cuyos votantes, $A, B, ..., \Gamma$ emiten el número respectivo de votos dado por $v(A), .v(B), ..., v(\Gamma)$.

02.1. Coaliciones:
Dos votantes, A_i y A_j, se dice que forman coalición, $\{A_i, A_j\}$, en un determinado juego de votación si suman sus votos actuando en el juego como un votante único: $v(A_i, A_j) = v(A_i) + v(A_j)$.

Reglas de formación de coaliciones:
Si llamamos Φ al conjunto de todas las coaliciones posibles en un juego de votación ponderada, $[q: v(A), v(B), ..., v(\Gamma)]$, se han de cumplir las reglas siguientes:

1) $\phi \notin \Phi$, es decir, el vacío no es una coalición.
2) $\{A, B, ..., \Gamma\} \in \Phi$, esto es, el conjunto de todos los votantes es una coalición.
3) $\forall H \in P(\{A, B, ..., \Gamma\}) / H \neq \phi, H \in \Phi$, esto es, una parte no vacía de una coalición, es también coalición .

Se deduce de lo anterior que todo votante es, por si mismo, una coalición: $A_k \in \Phi$.

¿Qué es una coalición ganadora?
Es una coalición tal que la suma de los votos de los miembros de la coalición igualan o superan la cuota.

¿Qué es una coalición de bloqueo?
Es una coalición tal que sin ser ganadora impide que otra coalición cualquiera pueda alcanzar la cuota, esto es, pueda ser ganadora.

¿Qué es una coalición perdedora?
Una coalición que no es ganadora ni de bloqueo, es una coalición perdedora.

02.2. Votantes:
Los votantes que integran una coalición pueden clasificarse en dos tipos:

a) Votantes basculantes, decisivos o críticos.
b) Votantes comparsas.

Un votante crítico o decisivo es aquel que si está en una coalición ganadora (o de bloqueo), ésta deja de serlo si abandona la coalición, o bien, si incluyéndose en una coalición perdedera, ésta deja de serlo para pasar a ser ganadora o de bloqueo.
Un votante es *comparsa* si no se modifica el carácter de una coalición al entrar o salir de ella, es decir, si la coalición es ganadora o de bloqueo sigue siéndolo si el votante la abandona, y si una coalición es perdedora, sigue siéndolo aunque el votante se integre en ella.

Un votante tal que el número de votos que emite iguala o supera a la cuota es, él mismo, una coalición ganadora, y se denomina *votante dictatorial*. Los restantes votantes son comparsas.

Aquellas coaliciones ganadoras que no tienen votantes comparsas se dice que son *coaliciones ganadoras minimales o mínimas.* Análogamente, una *coalición perdedora mínima* es aquella que solo tiene votantes críticos. Del mismo modo pueden definirse las *coaliciones de bloqueo mínimas o minimales*.

De un votante crítico en una coalición ganadora o de bloqueo que abandona la coalición para convertirla en perdedora se dice que realiza un *movimiento negativo*. Mientras que se dirá que *realiza un movimiento positivo* si se incorpora en una coalición perdedora convirtiendola en ganadora o de bloqueo.

02.3. Análisis de los ejemplos de la introducción:
Ejemplo1:
PSOE: 62, PP: 58, PODEMOS: 48, IU: 21, CIUDADANOS: 6, UPD: 6. Cuota: 101
Notación: $[101:62,58,48,21,6,6]$
Coaliciones:
Ganadoras minimales: $\{PSOE, PP\}, \{PSOE, PODEMOS\}, \{PP, PODEMOS\}$, pues se obtiene, al sumar los votos: 120, 110, 106, respectivamente, que superan la cuota (101). Estas coaliciones seguirán siendo ganadoras si se integran en cualquiera de ellas los partidos IU, CIUDADANOS y UPD (comparsas).
En cada una de las coaliciones ganadoras indicadas son críticos los dos votantes indicados, ya que si alguno abandona la coalición, ésta se convertiría en perdedora.
De bloqueo: No hay
Perdedoras: son las restantes coaliciones posibles:
$\{PSOE, CIUDADANOS, IU, UPD\}, \{PP, CIUDADANOS, IU, UPD\}, \{PODEMOS, CIUDADANOS, IU, UPD\}$
Si consideramos la coalición $\{PSOE, PP, PODEMOS\}$, dos cualesquiera de los tres votantes son críticos mientras el tercero sería comparsa.

Ejemplo 2:
socio 1: 26%, socio 2: 29%, socio 3:27%, socio 4: 12%, Resto: 6%. Cuota: 51%.
Notación: $[51\%:29\%,27\%,26\%,12\%,6\%]$
Coaliciones ganadoras: $\{socio1, socio2\}, \{socio1, socio3\}, \{socio2, socio3\}$. El cuarto socio (12%) o el conjunto de los restantes socios (6%) son comparsas, ya que no influyen a la hora de obtener una coalición ganadora por incorporación, ni convierten en perdedora una coalición ganadora dada si la abandonan.
No hay coaliciones de bloqueo.
Si los tres socios mayoritarios formasen coalición $\{socio1, socio2, socio3\}$, uno cualquiera de ellos es comparsa, mientras que los dos restantes son críticos.

Ejemplo 3:
Partidos A: 8, B: 5, C: 3, y D: 1. Obviamente, la cuota que daría la mayoría absoluta es de 9 concejales.
Notación: $[9:8,5,3,1]$
Coaliciones ganadoras $\{8,1\}, \{8,3\}, \{8,5\}, \{5,3,1\}, \{8,5,1\}, \{8,3,1\}, \{8,3,5\}$,.... Salvo las cuatro primeras, las restantes tienen algún comparsa.
No hay coaliciones de bloqueo.

Ejemplo 4:
EEUU=5, FRANCIA=5, INGLATERRA=5, RUSIA=5, CHINA=5, nperm1=1, nperm2=1, nperm3=1, nperm4=1, nperm5=1, nperm6=1.
Notación: $[27:5,5,5,5,5,1,1,1,1,1,1]$
Coaliciones ganadoras: todas aquellas en las que intervengan los cinco miembros permanentes y al menos dos de los miembros no permanentes.
Coaliciones perdedoras: aquellas en las que interviniendo los cinco miembros permanentes no interviene mas de uno de los miembros no permanentes.
Coaliciones de bloqueo: cada uno de los miembros permanentes es coalición de bloqueo, ya que ninguna coalición podrá ser ganadora si falta uno de los miembros permanentes. Asimismo, cinco miembros no permanentes son una coalición de bloqueo, ya que los restantes miembros nunca alcanzarían la cuota (suman solo 26 votos)

03. El índice de Shapley-Shubik

El índice de Shapley-Shubik, ideado originariamente en 1954 por Lloyd Shapley (1923-), matemático y economista norteamericano, actualmente profesor emérito de la Universidad de California, Los Ángeles, que obtuvo el Premio Nobel de Economía en 2012, y por Martin Shubik (1926-) que es también economista, profesor emérito del Instituto de Economía de la Universidad de Yale.


Lloyd Shapley en 1980


Martin Shubik en 1960

Para definir el índice de poder correspondiente a un votante dado P_i es necesario obtener en primer lugar el número de permutaciones de los n votantes en el juego, $n!$, y, a continuación, observar en aquellas permutaciones en las que figura P_i si los votantes que le preceden en el orden de la permutación forman coalición no ganadora que se convertiría en ganadora si se le sumara P_i. Esta permutación es lo que denominaríamos un pivote del votante P_i.

Definición:
Se denomina ïndice de poder de Shapley-Shubik, $I_{SS}(P_i)$, de un votante dado P_i en un juego de votación ponderada al cociente de dividir el número de pivotes $piv(P_i)$ de P_i por el total de permutaciones, $n!$, de los votantes en el juego:

$$I_{ss}(P_i) = \frac{piv(P_i)}{n!}$$

Veamos en primer lugar el ejemplo 3:
Los partidos son: A_8, B_5, C_3, y D_1. La cuota que da la mayoría absoluta es de 9 concejales.
Notación: $[9:8,5,3,1]$
Total de permutaciones posibles: $n! = 4! = 24$
Determinamos los pivotes:

- Pivotes de A:
  BACD, BADC, CADB, CABD, DACB, DABC, BCAD, CBAD, BDAC, DBAC, CDAB, DCAB. Total: 12
- Pivotes de B:
  ABCD, ABDC, CDBA, DCBA. Total: 4
- Pivotes de C:
  ACBD, ACDB, BDCA, DBCA. Total: 4
- Pivotes de D:
  ADBC, ADCB, BCDA, CBDA. Total: 4

Índices de Shapley-Shubik:

$$I_{ss}(A) = \frac{piv(A)}{4!} = \frac{12}{24},\ I_{ss}(B) = \frac{piv(B)}{4!} = \frac{4}{24},$$
$$I_{ss}(C) = \frac{piv(C)}{4!} = \frac{4}{24},\ I_{ss}(D) = \frac{piv(D)}{4!} = \frac{4}{24}$$

En porcentajes:

$$I_{ss}(A) = 50\%,\ I_{ss}(B) = I_{ss}(C) = I_{ss}(D) = 16.666\%$$

Por consiguiente, se establece mediante el índice de Shapley-Shubik, que el mayor poder lo tiene el partido A, la mitad del total, y el triple que cualquiera de los restantes 3 partidos, igualados en poder a pesar de tener diferente número de votos.

Realicemos ahora el cálculo para el caso del ejemplo1:
PSOE: 62, PP: 58, PODEMOS: 48, IU: 21, CIUDADANOS: 6, UPD: 6. Cuota: 101
Notación: $[101:62,58,48,21,6,6]$
Total de permutaciones posibles: $n! = 6! = 720$
Determinamos los pivotes:

- Pivotes de PSOE:
  PP-PSOE- - - -, $4! = 24$
  IU-PP-PSOE- - -, $2.3! = 12$
  UPD-PP-PSOE- - -, $2.3! = 12$
  CIUD-PP-PSOE- - -, $2.3! = 12$
  PP-IU-CIU-PSOE,- -, $2.3! = 12$
  PP-IU-UPD-PSOE,- -, $2.3! = 12$
  PP-UPD-CIUD-PSOE,-- $2.3! = 12$
  PP-UPD-CIUD-IU-PSOE,- $4! = 24$
  POD-PSOE- - - - , $4! = 24$
  IU-POD-PSOE- - -,
  UPD-POD-PSOE- - -, $2.3! = 12$
  CIUD-POD-PSOE- - -, $2.3! = 12$
  POD-IU-CIU-PSOE,- -, $2.3! = 12$
  POD-IU-UPD-PSOE,- -, $2.3! = 12$
  POD-UPD-CIUD-PSOE,-- $2.3! = 12$
  POD-UPD-CIUD-IU-PSOE,- $4! = 24$

Total pivotes de PSOE: 240
- Pivotes de PP:
  Repetimos como en PSOE. Total pivotes de PP: 240
- Pivotes de PODEMOS:
- Repetimos como en PSOE. Total pivotes de PP: 240
- Pivotes de IU:
  No hay pivotes.
- Pivotes de UPD:
  No hay pivotes.
- Pivotes de CIUD:
  No hay pivotes.

Índices de Shapley-Shubik:

$$I_{SS}(PSOE) = \frac{piv(PSOE)}{6!} = \frac{240}{720},$$
$$I_{SS}(PP) = \frac{piv(PP)}{6!} = \frac{240}{720},$$
$$I_{SS}(POD) = \frac{piv(POD)}{6!} = \frac{240}{720},$$
$$I_{SS}(IU) = \frac{piv(IU)}{6!} = \frac{0}{720},$$
$$I_{SS}(UPD) = \frac{piv(UPD)}{6!} = \frac{0}{720},$$
$$I_{SS}(CIU) = \frac{piv(CIU)}{6!} = \frac{0}{720}$$

Observamos en este ejemplo que el índice de Shapley-Shubik otorga el mismo poder (la tercera parte del total) a cada uno de los tres votantes mayoritarios, PSOE, PP y PODEMOS, mientras que no otorga ningún poder a los restantes votantes.

04. El índice de Deegan-Packel

Fue ideado en 1978 por Jim Deegan, profesor del Departamento de Economía de la Universidad de Limerik, en Irlanda, y por Edward W. Packel, que es profesor de Matemática e informática en el Lake Forest College de Chicago.


Jim Deegan


Edward W Packel

El índice de poder correspondiente a un miembro *P* del juego se obtiene encontrando en primer lugar el número total *g* de coaliciones ganadoras minimales, es decir, de coaliciones ganadoras en las que todos los votantes son críticos. Encontrar a continuación entre todas estas *g* coaliciones minimales aquellas coaliciones $x(P)$ que contengan al votante P y calcular en cada una de ellas el inverso del número total de votantes, $n(x(P))$, que la componen. El índice de poder se obtiene dividiendo la suma de estos inversos por el número total g de coaliciones minimales.

Así, si hay g coaliciones minimales, y de ellas hay h en las que aparece el votante *P*, obtendríamos el número de votantes que componen cada una de estas coaliciones en las que participa *P*, $n_1(x(p)), n_2(x(p)),\ldots,n_h(x(p))$, y sus respectivos inversos $1/n_1(x(p)),\ 1/n_2(x(p)),\ \ldots,1/n_h(x(p))$. El índice de Deegan-Packel viene dado por la expresión

$$I_{dp}(P)=\frac{1}{g}\sum_{i=1}^{h}\frac{1}{n_i(x(P))}$$

Veamos el cálculo del índice para el ejemplo 3:
Los partidos son: A_8, B_5, C_3, y D_1. La cuota que da la mayoría absoluta es de 9 concejales.
Notación: $[9:8,5,3,1]$

- Coaliciones ganadoras minimales: $[8,1], [8,3], [8,5], [5,3,1]$. Total $g=4$.
- Votante A_8: Aparece en tres de estas coaliciones, $[8,1], [8,3], [8,5]$, cada una de ellas con 2 votantes: $n_1=n([8,1])=2$, $n_2=n([8,3])=2$, $n_3=n([8,5])=2$. Sus inversos son $1/n_1=1/2$, $n_2=1/2$, $1/n_3=1/2$.

Índice de poder:

$$I_{dp}(A)=\frac{1}{g}\sum_{i=1}^{h}\frac{1}{n_i(x(P))}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$$

- Votante B_5: Aparece en dos de estas coaliciones, $[8,5], [5,3,1]$, una de ellas con 2 votantes y la otra con tres: $n_1=n([8,5])=2$, $n_2=n([5,3,1])=3$. Sus inversos son $1/n_1=1/2$, $1/n_2=1/3$.

Índice de poder:

$$I_{dp}(B)=\frac{1}{g}\sum_{i=1}^{h}\frac{1}{n_i(x(P))}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{24}$$

- Votante C_3: Aparece tambien en dos coaliciones, $[8,3], [5,3,1]$, una de ellas con 2 votantes y la otra con tres: $n_1=n([8,3])=2$, $n_2=n([5,3,1])=3$. Sus inversos son $1/n_1=1/2$, $1/n_2=1/3$.

Índice de poder:

$$I_{dp}(C)=\frac{1}{g}\sum_{i=1}^{h}\frac{1}{n_i(x(P))}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{24}$$

- Votante D_1: Aparece asimismo en dos de las coaliciones minimales, $[8,1], [5,3,1]$, una con 2 votantes y la otra con tres: $n_1=n([8,1])=2$, $n_2=n([5,3,1])=3$. Sus inversos son $1/n_1=1/2$, $1/n_2=1/3$.

Índice de poder:

$$I_{dp}(D)=\frac{1}{g}\sum_{i=1}^{h}\frac{1}{n_i(x(P))}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{24}$$

En porcentajes:

$$I_{dp}(A) = 37.5\%,\ I_{dp}(B) = I_{dp}(C) = I_{dp}(D) = 20.833\%$$

Por consiguiente, se establece mediante el índice de Deegan-Packel, que el mayor poder lo tiene el partido A, 37.5%, y cada uno de los tres restantes tiene un 20.833%, todos igual, a pesar de tener diferente número de votos.

Si ahora analizamos el ejemplo 1:
PSOE: 62, PP: 58, PODEMOS: 48, IU: 21, CIUDADANOS: 6, UPD: 6. Cuota: 101
Notación: $[101 : 62, 58, 48, 21, 6, 6]$
Coaliciones minimales ganadoras:
$[PSOE\_62, PP\_58], [PSOE\_62, PPODEMOS\_48], [PP\_58, PODEMOS\_48]$
Por tanto es $g = 3$.
PSOE aparece en dos coaliciones, de dos elementos cada una. Lo mismo ocurre con PP Y PODEMOS. Los restantes partidos no pertenecen a ninguna coalición ganadora minimal. En definitiva:

$$I_{dp}(PSOE) = I_{dp}(PP) = I_{dp}(PODEMOS) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$$

$$I_{dp}(IU) = I_{dp}(CIUDADANOS) = I_{dp}(UPD) = 0$$

Todo el poder se reparte por igual entre los tres partidos mayoritarios, sin que tengan poder alguno los restantes.
En este ejemplo, por tanto, los valores del índice de Deegan-Packel coinciden, como vemos, con los valores que se obtienen mediante el índice de Shapley-Shubik.

05. Bibliografía

Shapley, L.S., Shubik, M.; "A Method for evaluating the distribution of power in a committee system". American Political Science Review 48, 787-792. 1954

Deegan, J. y Packel, EW.; "A new index of power for simple n-person Games". Int J Game Theory 7, 113-123. 1978