

Una introducción al concepto de VARIEDAD REAL DIFERENCIABLE Y GRUPO DE LIE

- 01. Sobre topología y espacio topológico.**
- 02. Separabilidad. Espacios de Hausdorff.**
- 03. El mapeado de un espacio de Hausdorff.**
- 04. Variedad real diferenciable y función diferenciable.**
- 05. Producto de variedades reales diferenciables y grupos de Lie.**

01. Sobre topología y espacio topológico:

Dado un conjunto C , una familia T de subconjuntos de C se dice que es una topología o estructura topológica en C si se verifican las condiciones de que:

1. Los conjuntos $\emptyset$ (vacío) y C pertenecen a T .
2. La intersección de un número finito de elementos de T es un elemento de T .
3. La unión de un número cualquiera, finito o infinito, de elementos de T es un elemento de T .

En realidad, todo conjunto C , cualquiera que sea, admite alguna topología:

El par constituido por el conjunto vacío y el conjunto C , $T = \{\emptyset, C\}$, es una topología en el conjunto C , que se llama "topología indiscreta en C ".

Si es $T = P(C)$, conjunto de las partes de C , es también una topología en C , que se da en llamar "topología discreta en C ".

Un conjunto cualquiera, pues, admite varias topologías. Se dice que la topología T' es "mas fina" que la topología T si $T \subseteq T'$. El conjunto de todas las topologías definidas sobre un conjunto C está, en definitiva, parcialmente ordenado, con una topología máxima -la topología discreta- y una topología mínima -la topología indiscreta.

Un Espacio Topológico es un par (C, T) donde C es un conjunto, "conjunto de los puntos del espacio topológico", y T es una topología en el conjunto C . Los elementos de la familia T se denominan "abierto del espacio topológico (C, T) ".

Un conjunto de puntos del espacio topológico será un conjunto "cerrado" si su complementario es abierto, es decir, si su complementario es un elemento de la topología T del espacio.

En relación con el concepto de cerrado en un espacio topológico (C, T) se encuentra el de "clausura de un subconjunto M de C ", como la intersección de todos los cerrados que contienen al conjunto M . El concepto de clausura es muy corriente en el campo de la topología.

Es interesante, también, el concepto de "base de una topología". En un espacio topológico (C, T) se dice que un conjunto B de partes de C es base de la topología T , si todo elemento de T , es decir, si todo abierto de la topología T , es expresable como unión de elementos de B .

02. Separabilidad. Espacios de Hausdorff:

La separación de puntos o conjuntos cerrados mediante vecindades o entornos, dentro de un espacio topológico (C, T) se puede enunciar de diferentes maneras, existiendo espacios topológicos que cumplen unas condiciones de separación y no otras. Veamos algunas afirmaciones sobre separación de puntos y conjuntos cerrados, usando el concepto de vecindad o entorno:

- 1) Dados dos puntos distintos del espacio, existe al menos un entorno de uno de ellos al que no pertenece el otro.
- 2) Para dos puntos distintos del espacio, cada uno de ellos admite un entorno al que no pertenece el otro.
- 3) Para dos puntos distintos del espacio, existen siempre respectivos entornos disjuntos.
- 4) Para todo conjunto cerrado y todo punto no perteneciente al mismo, existe un entorno del conjunto cerrado y un entorno del punto que son disjuntos.
- 5) Para dos conjuntos cerrados existen siempre respectivos entornos que son disjuntos.

Es inmediato que en los espacios topológicos donde se cumplen las condiciones 5) y 2) también se cumplen las condiciones 4) y 3) lo cual implica que se cumple la condición 3), implicando esta que se cumple la condición 2), y ésta, a su vez, la condición 1).

Se dice que el espacio topológico (C, T) es normal si se cumple que:

- Para dos puntos distintos del espacio, existen siempre respectivos entornos disjuntos.
- Para dos conjuntos cerrados existen siempre respectivos entornos que son disjuntos.

Se dice que el espacio topológico (C, T) es regular si se cumple que:

- Para dos puntos distintos del espacio, existen siempre respectivos entornos disjuntos.
- Para todo conjunto cerrado y todo punto no perteneciente al mismo, existe un entorno del conjunto cerrado y un entorno del punto que son disjuntos.

Espacios topológicos de Hausdorff:

Se dice que el espacio topológico (C, T) es Hausdorffi si se cumple que:

- Para dos puntos distintos del espacio, existen siempre respectivos entornos disjuntos.

De lo anterior resulta inmediato que todo espacio topológico normal es también espacio topológico regular, y, también, que todo espacio regular es un espacio topológico de Hausdorff.

03.El mapeado de un espacio de Hausdorff:

Si es (X, T) un espacio de Hausdorff, y es $(\mathbb{R}^n, T_n)$ el espacio de las n -plas de números reales $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dotado de la topología usual T_n de las bolas abiertas en $\mathbb{R}^n$, se puede definir un mapeado de (X, T) en $(\mathbb{R}^n, T_n)$ mediante el concepto de homomorfismo.

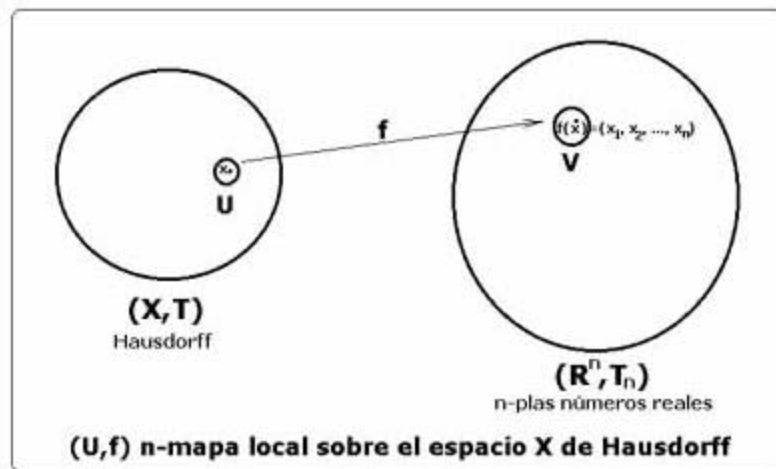
03.1. Mapas y atlas:

Llamamos n -mapa local en X , o n -carta local en X , a todo par (U, f) , donde es U un abierto de T , y es f un homomorfismo de U en un abierto V de T_n .

$$(U, f) \text{ } n\text{-mapa en } X \leftrightarrow \begin{cases} U \in T \\ f : U \rightarrow V \in T_n \end{cases}$$

En realidad, tenemos que un n -mapa es simplemente una representación de un abierto del espacio de Hausdorff en el espacio $(\mathbb{R}^n, T_n)$ de las n -plas de números reales, de forma que a cada punto $x \in U \subset T$ del n -mapa le corresponde una n -pla $f(x) \in V \subset T_n$ de números reales, que se denominan *coordenadas locales del punto x en el n -mapa (U, f)* .

$$\forall x \in U \in T, \quad f(x) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in V \in T_n$$

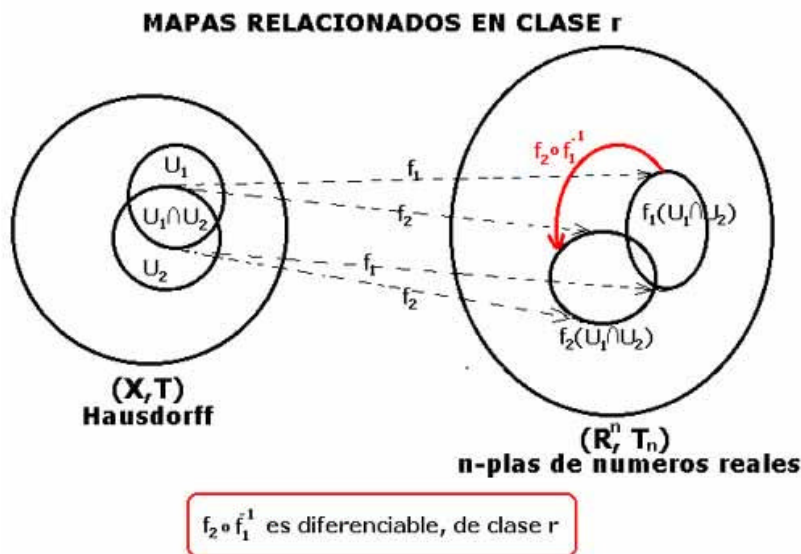


Un n -atlas en un espacio de Hausdorff (X, T) es una colección de n -mapas locales:

$$A = \{(U_i, f_i)\}_{i \in I}$$

que verifican en (X, T) la condición

$$X \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$



03.2. Mapas y atlas de clase r :

Dos n -mapas, (U_1, f_1) y (U_2, f_2) , se dicen *relacionados en clase c^r* , si se verifica algunas de estas dos condiciones:

- a) $U_1 \cap U_2 = \emptyset$
- b) si $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset \rightarrow f_2 \circ f_1^{-1} : f_1(U_1 \cap U_2) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow f_2(U_1 \cap U_2) \subseteq \mathbb{R}^n$
es diferenciable c^r

Un n -atlas, A , es de clase c^r en el espacio (X, T) si dos n -mapas cualesquiera del mismo están relacionados en clase c^r .

03.3. Atlas maximales de clase r :

Un n -atlas A' de clase r en el espacio (X, T) se dice *maximal* si no está contenido en ningún otro atlas de clase r del espacio (X, T) .

La unicidad de un n -atlas maximal para cada uno de los n -atlas del espacio de Hausdorff dado, es el fundamental concepto que permite definir las variedades reales diferenciables. Esto lo podemos hacer mediante la siguiente proposición.

Teorema:

Dado un n -atlas cualquiera A de clase c^r , existe un único n -atlas maximal A' que lo contiene.

En efecto:

- 1) Consideremos en primer lugar la variedad real diferenciable (X, A) y la familia A' de los n -mapas $\{(U'_i, f_i)\}_{i \in I}$ del espacio X que están relacionados en clase r con todos

los n -mapas de A . Esto implicaría que A está contenido en A' , y, por consiguiente, que el espacio X está recubierto por los n -mapas de la familia A' . Esto es, que

$$A \subseteq A' \rightarrow X \subseteq \bigcup_{i \in I} U'_i$$

- 2) Veamos en segundo lugar que la familia A' es un atlas de clase r en el espacio X . Para ello hemos de probar que para todo par de n -mapas de A' , $(U'_i, f_i), (U'_j, f_j)$ se verifica que

$$f_j \circ f_i^{-1} : f_i(U'_i \cap U'_j) \rightarrow f_j(U'_i \cap U'_j)$$

Por la definición de A' sabemos que todo mapa de A está relacionado con cada uno de los mapas de A' , por lo que es:

$$\forall (U, f) \in A, \exists (U'_i, f'_i) \in A' / f \circ f_i'^{-1} : f'_i(U \cap U'_i) \rightarrow f(U \cap U'_i) \text{ es de clase } r$$

y siendo evidentemente $U \cap U'_i \cap U'_j \subseteq U \cap U'_i$ podemos restringir la función anterior al conjunto que está contenido:

$$f \circ f_i'^{-1} : f'_i(U \cap U'_i \cap U'_j) \rightarrow f(U \cap U'_i \cap U'_j) \text{ es de clase } r$$

Análogamente, se tiene que

$$f_i' \circ f^{-1} : f(U \cap U'_i \cap U'_j) \rightarrow f'_i(U \cap U'_i \cap U'_j) \text{ es de clase } r$$

Componiendo ambas funciones:

$$f_i' \circ f^{-1} \circ f \circ f_i'^{-1} = f_j' \circ f_i'^{-1} : f'_i(U \cap U'_i \cap U'_j) \rightarrow f'_j(U \cap U'_i \cap U'_j) \text{ es de clase } r$$

y, en definitiva, al ser $f'_i(U \cap U'_i \cap U'_j)$ un entorno abierto de cualquier punto q de la imagen $f'_i(U'_i \cap U'_j)$ se puede afirmar que $f_j' \circ f_i'^{-1}$ es de clase r en un entorno abierto de cada uno de los puntos de $f'_i(U'_i \cap U'_j)$, lo que indica que es A' un n -atlas de clase r .

04. Variedad real diferenciable y función diferenciable:

04.1. Variedad real diferenciable:

Se llama *variedad diferenciable real de clase r y dimensión n* al par (X, A') formado por un espacio topológico de Hausdorff y un n -atlas maximal de clase r en X .

Cuando $r=0$, la variedad diferenciable real se denomina *variedad topológica*, o bien, *espacio localmente euclidiano*.

En definitiva, y en virtud del teorema anterior, para dar una variedad diferenciable real (X, A') sobre un espacio de Hausdorff, X , bastará dar un n -atlas cualquiera A tal que sea A' el n -atlas maximal y único que contiene a A .

Un ejemplo de variedad real diferenciable lo tenemos en la esfera de radio r :

Sea X la esfera de radio r : $X_r = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$

Y sean los 2-mapas (U_1, f_1) , (U_2, f_2) , donde son:

Abiertos de X_r :

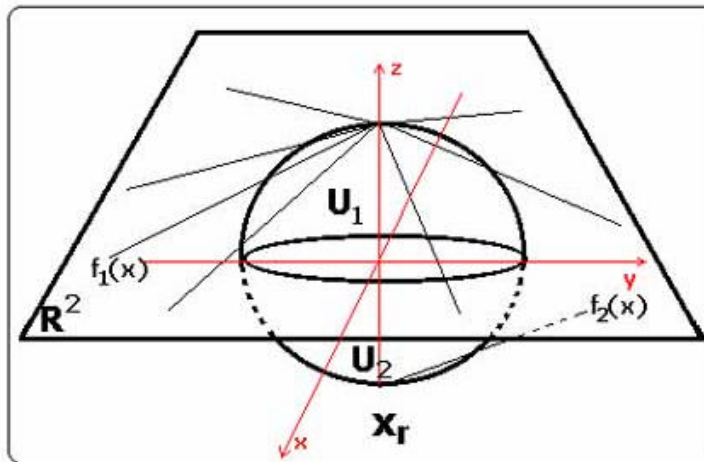
$$U_1 = \{(x, y, z) \in X_r / z \neq 1\}, \quad U_2 = \{(x, y, z) \in X_r / z \neq -1\}$$

Homomorfismos:

$$f_1 : U_1 \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n, \quad f_1(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right) \in \mathbb{R}^n$$

$$f_2 : U_2 \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n, \quad f_2(x, y, z) = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right) \in \mathbb{R}^n$$

En realidad, ambos homomorfismos son las proyecciones estereoscópicas en el plano $\mathbb{R}^2$ desde los polos de la esfera.



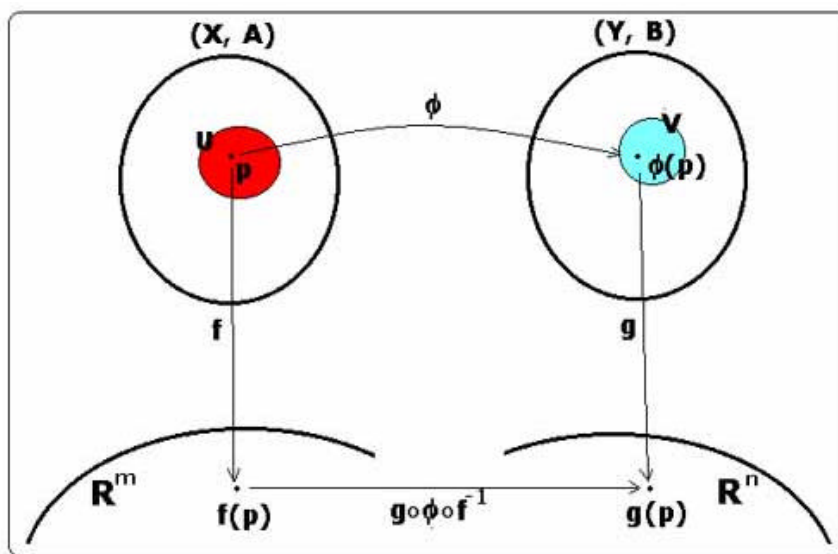
04.2. Función diferenciable:

Dadas (X, A) y (Y, B) dos variedades reales diferenciables de clase r y de dimensiones m y n respectivas, sea la función

$$j : X \rightarrow Y$$

diremos que esta función es *diferenciable de clase $h \leq r$* en el punto $p \in X$ si para todo m -mapa $(U, f) \in A$ al que pertenezca p y para todo n -mapa $(V, g) \in B$ al que pertenezca $j(p)$ se verifica que la función compuesta $g \circ j \circ f^{-1}$ es diferenciable de clase h en un entorno de $j(p)$.

Se dice que j es diferenciable de clase h si es diferenciable en todo punto de la variedad X .



Una aplicación f definida desde el espacio X en el espacio Y se dice que es un *difeomorfismo de clase h* si es biyectiva y tanto f como su inversa f^{-1} son diferenciables de clase h .

Trivialmente se prueba que es difeomorfismo la identidad, asimismo se prueba que si las funciones $f_a : X \rightarrow Y$, $f_b : Y \rightarrow Z$ son difeomorfismos, también resulta ser difeomorfismo la función compuesta $f_b \circ f_a : X \rightarrow Z$, por lo que se puede establecer que es de equivalencia la relación de difeomorfismo entre variedades reales diferenciables de clase r .

05. Producto de variedades reales diferenciables y grupos de Lie:

05.1. Producto de variedades:

Podemos definir el producto de variedades reales diferenciables considerando el producto topológico de los espacios de Hausdorff sobre los que estén definidas.

Así, sean las variedades reales diferenciables de clases m y n respectivamente dadas por

$$(X_1, A_1), (X_2, A_2)$$

y consideremos el espacio topológico producto $X = X_1 \times X_2$, con topología producto dada por $T = T_1 \times T_2$, también espacio de Hausdorff. Ambos atlas son:

m -atlas $A_1 = \{(U_{i1}, f_{i1})\}_{i \in I}$ n -atlas $A_2 = \{(U_{i2}, f_{i2})\}_{i \in I}$, y los homomorfismos correspondientes son $f_{i1} : U_{i1} \rightarrow R^m$ $f_{i2} : U_{i2} \rightarrow R^n$ definidos por:

$$\forall x \in U_{i1}, f_{i1}(x) = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m$$

$$\forall y \in U_{i2}, f_{i2}(y) = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^n$$

El $(m+n)$ -atlas producto sería:

$$A = A_1 \times A_2 = \{(W_{ij}, f_{ij})\}_{ij \in I \times J} = \{(U_i \times U_j, f_{ij})\}_{ij \in I \times J}$$

estando cada uno de los homomorfismos $f_{ij} : U_i \times U_j \rightarrow R^{m+n}$, dado por

$$\forall (x, y) \in U_i \times U_j, f_{ij}(x, y) = (f_{i1}(x), f_{j2}(y)) \in R^{m+n}$$

Es inmediato, en definitiva, que también $(X_1 \times X_2, A_1 \times A_2)$ es una variedad real diferenciable de dimensión suma de las dimensiones de ambas variedades reales.

05.2. Los grupos de Lie:

Dado un espacio topológico de Hausdorff, X , y , en él, una operación interna, $*$, que le confiere estructura de grupo, se dice que $(X, *)$ es un *grupo de Lie* si, y solo si, existe un n -atlas A tal que (X, A) es una variedad real diferenciable y, además, la función

$$L : X \times X \rightarrow X, \text{ tal que } \forall (x, y) \in X \times X, L(x, y) = x * y^{-1}$$

es diferenciable.