LAS ECUACIONES VARIACIONALES DE EULER

Los conceptos de máximo y de mínimo -de extremo o extremal, en definitiva- de una expresión funcional, es algo corriente en el análisis matemático, y las condiciones por las que se verifica el extremo son en general de gran utilidad en la resolución de problemas.

Veamos en este texto cómo las ecuaciones variacionales de Euler son la condición de extremal de una integral curvilinea y su aplicación simple y elegante en la resolución de algunos problemas clásicos.

1. Cálculo variacional. Ecuaciones de Euler:

1.1. La curva extremal de una integral curvilinea:

Para toda integral de la forma

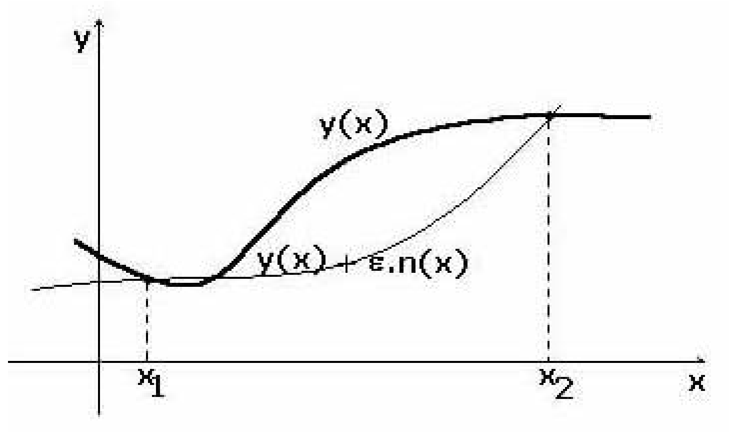
$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y').dx$$

existe una función $y = y(x)$ para la cual dicha integral se hace máxima o se hace mínima en el intervalo de integración $[x_1, x_2]$. Se dice, entonces, que la curva $y=y(x)$ es una "extremal" de dicha integral I en el intervalo de integración.

Podemos considerar al haz de curvas que contiene la extremal definido por el parámetro ε de la forma:

$$y(x, \varepsilon) = y(x) + \varepsilon n(x)$$

de forma que al variar el parámetro se obtiene una curva del haz al que pertenece la extremal $y(x)$, la cual pasa por los puntos de abcisa x_1 y x_2 : $n(x_1) = n(x_2) = 0$.



Naturalmente, al variar el parametro ε pasamos de una curva a otra del haz, de forma que la extremal es aquella curva en la que dicho parámetro es nulo. En todas ellas, se cumple que $n(x_1) = n(x_2) = 0$.

$$\begin{array}{l} y(x) + \varepsilon_1 . n(x) \\ y(x) + \varepsilon_2 . n(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

en donde es *y(x)* la extremal.

La extremal, *y=y(x)*, de la integral *I* es la curva a lo largo de la cual la variación de la integral con respecto al parámetro ε, independiente de *x*, es nula:

$$\delta I = \frac{dI}{d\varepsilon} . d\varepsilon = 0$$

Para una variación infinitesimal, $d\varepsilon$, del parámetro obtenemos una curva del haz infinitamente próxima a la extremal. Se tiene que cada punto *(x,y)* de la extremal se convierte en el punto (x, y+d ε .n(x)) de la curva infinitamente próxima (se trata, naturalmente, de una variacion del parámetro a *x* constante).

Si consideramos la derivada de la curva con respecto a la variable *x*, se tiene que, para cualquier curva del haz:

$$\frac{d}{dx} y(x, \varepsilon) = \frac{dy(x)}{dx} + \varepsilon \frac{dn(x)}{dx}$$

O bien, en notación más simple:

$$y'(x, \varepsilon) = y'(x) + \varepsilon n'(x)$$

Para una variación $d\varepsilon$ del parámetro manteniendo *x* constante, se tiene una variación de cada curva del haz que es de la forma

$$\delta y(x, \varepsilon) = d\varepsilon n(x)$$

análogamente, una variación de la derivada, que es:

$$\delta y'(x,\varepsilon) = \delta\frac{dy}{dx} = d\varepsilon\frac{dn(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(d\varepsilon n(x)) = \frac{d}{dx}\,\delta y(x,\varepsilon)$$

es decir, se tiene la permutatividad de los signos de variación respecto al parámetro y de derivación usual:

$$\delta\frac{d}{dx}y(x,\varepsilon) = \frac{d}{dx}\,\delta y(x,\varepsilon)$$

resumiendo, se tiene:

$$\delta y = d\varepsilon n, \qquad \delta y' = d\varepsilon n' \quad [1]$$

1.2. La ecuación de Euler:

Veamos la condición que debe cumplir la extremal de la integral curvilinea

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x,\varepsilon), y'(x,\varepsilon)).dx$$

en el intervalo de integración.

Si imponemos la condición de máximo o mínimo: $\delta I = \frac{dI}{d\varepsilon}.d\varepsilon = 0$

Por tanto:

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{d\varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{d\varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial y'}\cdot\frac{dy'}{d\varepsilon}\right).dx = 0$$

y siendo ε independiente de *x*, se tiene que $\frac{dx}{d\varepsilon} = 0$. Por otra parte, de las relaciones [1], se tiene:

$$\frac{dy}{d\varepsilon} = n, \qquad \frac{dy'}{d\varepsilon} = n'$$

por tanto, es

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{d\varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{d\varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial y'}\cdot\frac{dy'}{d\varepsilon}\right).dx = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}.n + \frac{\partial f}{\partial y'}.n'\right).dx = 0$$

Si resolvemos por partes la segunda integral:

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial y'}\cdot\frac{dn}{dx}.dx = \int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial y'}.dn = \left.\frac{\partial f}{\partial y'}.n\right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}.n.dx = 0 - \int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}.n.dx = -\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}.n$$

Por tanto, al sustituir, queda:

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}.n + \frac{\partial f}{\partial y'}.n'\right).dx = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}.n - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}.n\right).dx = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right).n.dx = 0$$

y de aquí se deduce que la extremal y=y(x) ha de cumplir la relación siguiente, conocida como *Ecuación variacional de Euler*:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$$

Este resultado, obtenido para una función *f=f(x, y, y')* puede generalizarse a funciones de varias variables funcionales:

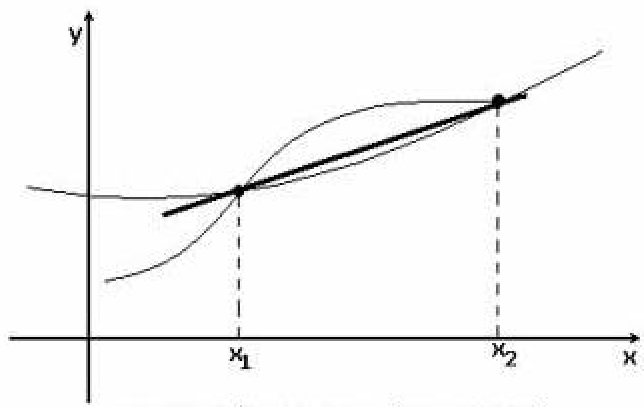
$$f(x, y_1, y_1', y_2, y_2', \ldots, y_n, y_n')$$

estando en este caso la condicion de extremal definida por las *Ecuaciones variacionales de Euler*:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots n$$

2. Aplicación a la determinación de la curva de longitud más corta entre dos puntos:

Una elemental aplicación de las ecuaciones variacionales de Euler nos permite probar de forma inmediata que la trayectoria más corta entre dos puntos en el plano es una línea recta.



La curva más corta entre dos puntos es la línea recta

Si llamamos $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ al elemento diferencial de trayectoria, se tiene que la longitud, en el intervalo $[x_1, x_2]$, es:

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \frac{ds}{dx}.dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}.dx$$

por tanto, la función f(x,y,y') de las ecuaciones de Euler es, ahora, $f(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}$,

debiendo cumplirse que

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$$

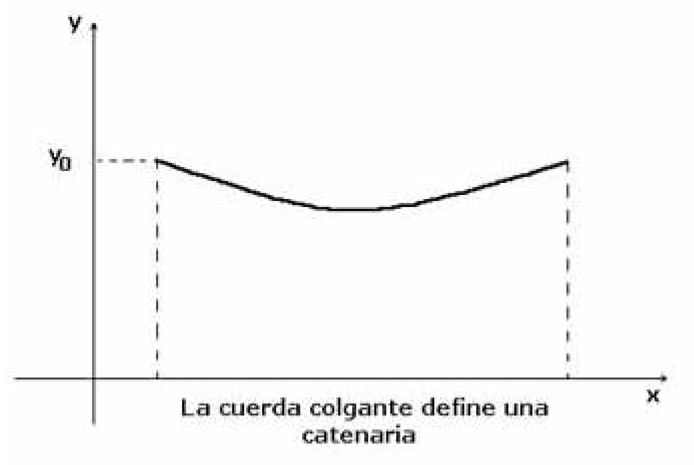
ahora bien, en este caso es $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, luego, también será $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$, por lo cual:

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = c \quad (const) \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = c \Rightarrow y'^2 = c^2 + c^2.y'^2 \Rightarrow y' = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} = m \quad (const)$$

y la curva *y = y(x)* sería *y = m.x + n,* que es una linea recta de pendiente *m* y ordenada en el orígen *n*.

3. Aplicación a la determinación de la curva que define la cuerda colgante:

Es muy sencillo aplicar las ecuaciones de Euler al estudio de la curva que describe una cuerda que cuelga de sus extremos bajo la única acción del campo gravitatorio del lugar. Veamos que se trata de una catenaria.



Hemos de considerar que la cuerda tiende a la situación en donde su energía potencial es mínima, esto es, en donde se cumple que es nula la variación de la energía potencial a x e y constantes.

$$\delta V = \frac{dV}{d\varepsilon}.d\varepsilon = 0$$

La energía potencial de cada elemento diferencial de masa de la cuerda, dm, es:

$$dV = dm.g.y = g.\rho.y.ds = g.\rho.y.\sqrt{dx^2 + dy^2} = g.\rho.y.\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}.dy \Rightarrow$$
$$\Rightarrow dV = g.\rho.y.\sqrt{1+x'^2}.dy$$

en donde se ha llamado ρ a la densidad lineal de masa de la cuerda y asimismo: $x' = \frac{dx}{dy}$.

La integral que da el potencial gravitatorio es:

$$V = g.\rho\int_{y_2}^{y_1} y.\sqrt{1+x'^2}.dy$$

En definitiva, se tiene, en este caso, que el problema se puede plantear así:

$$\begin{aligned} f(x,y,y') &= y.\sqrt{1+x'^2} \\ x &= x(y) \\ \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces, se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow -\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x'} = c\ (const) \Rightarrow \frac{y.x'}{\sqrt{1+x'^2}} = c$$

Despejando dx:

$$x' = \frac{c}{\sqrt{y^2 - c^2}} \Rightarrow dx = \frac{c}{\sqrt{y^2 - c^2}}.dy = \frac{c}{\sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^2 - 1}}.\left(\frac{dy}{c}\right) = \frac{c.dz}{\sqrt{z^2 - 1}}$$

en definitiva, al integrar:

$$x = c.\operatorname{argch}\left(\frac{y}{c}\right) + k\ (const) \Rightarrow \operatorname{argch}\left(\frac{y}{c}\right) = \frac{x-k}{c} \Rightarrow y/c = ch\left(\frac{x-k}{c}\right)$$

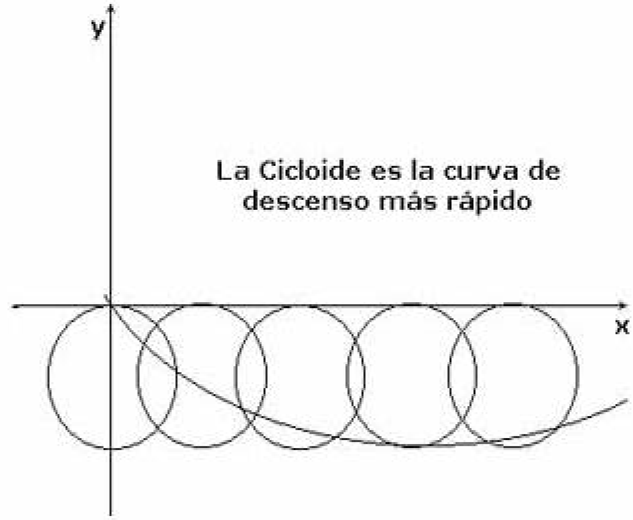
y la ecuación resultante para la curva es:

$$y = c.ch\left(\frac{x-k}{c}\right)$$

(catenaria)

4. Aplicación a la determinación de la curva de descenso más rápido (braquistocrona):

Si pretendemos encontrar cuál es la curva a lo largo de la cual un aro que fuera atravezado físicamente por la misma se deslizaría en el mínimo tiempo, en virtud de la sola acción gravitatoria, podemos usar, también, las ecuaciones variacionales de Euler. Nos encontrariamos con el caso de una curva muy especial: la Cicloide.



Despejamos el tiempo, que es la función que ha de ser mínima:

$$\left.\begin{array}{l} v = \dfrac{ds}{dt} \\ v = \sqrt{2gy} \end{array}\right\} \Rightarrow dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{1+x'^2}{y}}.dy$$

por tanto, se tiene:

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{\frac{1+x'^2}{y}}.dy$$

en definitiva, planteamos la situación desde las relaciones:

$$\left.\begin{array}{ccc} f(x,y,y') & = & \sqrt{\dfrac{1+x'^2}{y}} \\ x & = & x(y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x'}\right) & = & 0 \end{array}\right\}$$

se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x'} = c\ (const) \Rightarrow \frac{x'}{\sqrt{y(1+x'^2)}} = c$$

haciendo a la constante $c = \dfrac{1}{\sqrt{2R}}$, se puede escribir que

$$\frac{x'}{\sqrt{y(1+x'^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2R}}$$

y despejando x':

$$x'^2 = \frac{y}{2R - y} \Rightarrow x' = \sqrt{\frac{y}{2R - y}} = \frac{y}{\sqrt{2Ry - y^2}} \Rightarrow x = \int_{y_1}^{y_2} \frac{y}{\sqrt{2Ry - y^2}}.dy$$

Para resolver la integral hagamos un cambio de variables:

$$y = R.(1 - \cos\theta) \rightarrow dy = R.sen\,\theta.d\theta$$

y la raíz que figura en la integral se convierte en:

$$2.R.y - y^2 = 2.R^2 - 2.R^2.\cos\theta - R^2 + 2.R^2.\cos\theta - R^2.\cos^2\theta = R^2 - R^2.\cos^2\theta =$$
$$= R^2.sen^2\theta \Rightarrow \sqrt{2.R.y - y^2} = R.sen\,\theta$$

Resolvermos ya la integral:

$$x = \int_0^y \frac{y}{\sqrt{2Ry - y^2}}.dy = \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{R(1 - \cos\theta)}{R.sen\,\theta}.R.sen\,\theta.d\theta = \int_0^{\theta} R(1 - \cos\theta).d\theta = R(\theta - sen\,\theta)$$

Con lo cual resultan ya las ecuaciones paramétricas de la curva:

$$\begin{cases} x = R(\theta - sen\,\theta) \\ y = R(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

que corresponden a la Cicloide.

5. Un Principio variacional para la Mecánica Teórica:

Hamilton postuló que la trayectoria real de un sistema conservativo, esto es, de un sistema no sometido a fuerzas disipativas, es la extremal de la integral que define la acción del sistema, esto es, de la integral en el tiempo de la función lagrangiana:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, q_i', t).dt$$

y las correspondientes ecuaciones variacionales de Euler se llaman en la teoría de la mecánica, *Ecuaciones de Euler-Lagrange,* o bien, simplemente, *Ecuaciones de Lagrange*:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_i'} = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

donde es n el número de dimensiones del espacio de configuración en el que se desplaza el sistema, en general, diferencia entre el número de dimensiones de su partículas y el número de las restrictivas condiciones de ligadura.

Para el caso de sistemas no conservativos, esto es, sometidos a fuerzas de disipación, el principio de Hamilton se aplica a la integral

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \left(\Gamma - \sum_{j=1}^{N} F_j . r_j \right) . dt$$

en donde es Γ la energía potencial del sistema y cada F_j representa la fuerza actuante sobre la partícula del sistema de vector de posición r_j.

Las ecuaciones de Lagrange, en el caso de sistemas no conservativos, adquieren la forma:

$$Q_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial \Gamma}{\partial q_i'} - \frac{\partial \Gamma}{\partial q_i}, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

El postulado de Hamilton, también llamado Principio de Mínima Acción, es un principio de formulación de la Mecánica equivalente a la formulación a partir de las tres leyes de Newton (Formulación Newtoniana de la Mecánica), o mediante la formulación a partir del Principio de D'Alembert de los Trabajos Virtuales (Formulación Lagrangiana de la Mecánica).

El Principio de Mínima Acción es el fundamento de la llamada *Formulación Hamiltoniana de la Mecánica.*