VARIABLES ALEATORIAS. UNA INCURSION EN LOS ESPACIOS PROBABILIZABLES

1. Variables aleatorias

Sabemos que cuando hablamos de funciones $f : A \to B$ definidas desde un conjunto inicial A en un conjunto final B, usamos letras para representar tanto a cualquier elemento del dominio, que está contenido en A, como a cualquier elemento del recorrido o rango, obviamente contenido en B. Estas letras, generalmente la x para los elementos del dominio y la y para los elementos del rango, se denominan variables. La x se llama *variable independiente* y la y *variable dependiente* de la función $f : A \to B$ dada.

Si representamos, por ejemplo, la función $f : T \to V$ que define la velocidad de un móvil en relación al tiempo, $\forall t \in T, f(t) = v \in V$, la v es la variable velocidad y los valores que toma dependen de los valores de la variable tiempo t. A cada instante t_0 le corresponde una velocidad v_0. Aquí es t la variable independiente y es v la variable dependiente en la función indicada.

La variable aleatoria surge cuando consideramos una función definida desde un conjunto inicial que es el conjunto U de los sucesos elementales de un experimento aleatorio dado y cuyo conjunto final es el cuerpo R de los números reales con el orden inducido por la habitual medida euclidiana.

Así, si consideramos la función $X : U \to R$, definida desde el espacio muestral U en el cuerpo R:

$$\forall u \in U, X(u) \in R$$

podemos, por ejemplo, representar mediante la expresión $[X\Gamma x], \forall x \in R,$ al conjunto de los sucesos del dominio de la función cuyo recorrido o rango son los números reales relacionados por Γ con el número real x:

$$[X\Gamma x] = \{u \in U / X(u)\Gamma x \in R\}, \forall x \in R$$

La función X será una variable aleatoria si, $\forall x \in R, [X\Gamma x] \in \Phi$, esto es, si el conjunto de los números que se relacionan con cada x es una parte de la σ-álgebra Φ de las partes de U. (Véase "*De las álgebras de Sucesos a los espacios probabilísticos", en http://casanchi.com/mat/sucesospro01.htm*).

$$[X\Gamma x] = \{u \in U / X(u)\Gamma x \in R\} \in \Phi$$

en definitiva es

$$[X\Gamma x] \in \Phi$$

Lo que permite establecer la definición de variable aleatoria del modo siguiente.

Definición 1
Dado un espacio probabilizable, (U,Φ), se llama *variable aleatoria* a una función definida de U en R, $X: U \rightarrow R$, cuyo rango es una familia no vacía de números reales, de modo que para cada número real x es $X(u)\Gamma x, \forall u \in U$, siendo el significado del símbolo Γ el de "comparable con el orden de R", es decir, este símbolo puede significar cualquiera de los "$\leq, \geq, <, >$".

o, equivalentemente,

Se llama *variable aleatoria* al conjunto $[X\Gamma x]=\{u / X(u)\Gamma x \in R\}$ sii se cumple que $\forall x \in R, \{u / X(u)\Gamma x \in R\} \in \Phi$.

Ejemplos de variables aleatorias:

$$[X \leq x]=\{u \in U / X(u) \leq x \in R\} \in \Phi$$
$$[X < x]=\{u \in U / X(u) < x \in R\} \in \Phi$$
$$[X > x]=\{u \in U / X(u) > x \in R\} \in \Phi$$
$$[X \geq x]=\{u \in U / X(u) \geq x \in R\} \in \Phi$$
$$[x_1 < X \leq x_2]=\{u \in U / x_1 < X(u) \leq x_2 \in R\} \in \Phi$$
$$[x_1 < X < x_2]=\{u \in U / x_1 < X(u) < x_2 \in R\} \in \Phi$$
$$[x_1 \leq X \leq x_2]=\{u \in U / x_1 \leq X(u) \leq x_2 \in R\} \in \Phi$$
$$[x_1 \leq X < x_2]=\{u \in U / x_1 \leq X(u) < x_2 \in R\} \in \Phi$$

Teorema 1
Sea $X: U \rightarrow R$ tal que $rang(X) \neq \phi$. Se verifica:

1) $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[X \leq x-2^{-n}\right]=[X < x]$

2) $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[X < x+2^{-n}\right]=[X \leq x]$

Demostración:

$\forall u \in U,$

1) $u \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[X \leq x-2^{-n}\right] \Leftrightarrow \exists n \in N / u \in \left[X \leq x-2^{-n}\right] \Leftrightarrow X(u) < x \Leftrightarrow u \in [X < x]$

luego: $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[X \leq x-2^{-n}\right]=[X < x]$

2) $u \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\left[X < x+2^{-n}\right] \Leftrightarrow \forall n \in N, u \in \left[X < x+2^{-n}\right] \Leftrightarrow X(u) < x+2^{-n} \Leftrightarrow X(u) \leq x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u \in [X \leq x]$

luego: $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[X < x+2^{-n}\right]=[X \leq x]$

Teorema 2

Sea $X:U\to R$ tal que $rang(X)\neq\phi$. Son equivalentes las condiciones siguientes, es decir, si una de ellas es variable aleatoria en (U,Φ) ello es condición necesaria y suficiente para que lo sean las restantes:

a) $[X\leq x]=\{u\in U/X(u)\leq x\in R\}\in\Phi$
b) $[X<x]=\{u\in U/X(u)<x\in R\}\in\Phi$
c) $[X>x]=\{u\in U/X(u)>x\in R\}\in\Phi$
d) $[X\geq x]=\{u\in U/X(u)\geq x\in R\}\in\Phi$
e) $[x_1<X\leq x_2]=\{u\in U/x_1<X(u)\leq x_2\in R\}\in\Phi$
f) $[x_1<X<x_2]=\{u\in U/x_1<X(u)<x_2\in R\}\in\Phi$
g) $[x_1\leq X\leq x_2]=\{u\in U/x_1\leq X(u)\leq x_2\in R\}\in\Phi$
h) $[x_1\leq X<x_2]=\{u\in U/x_1\leq X(u)<x_2\in R\}\in\Phi$

Demostración:

a) $\Leftrightarrow$ b) Se trata de probar que $[X\leq x]\in\Phi$ es equivalente a que $[X<x]\in\Phi$, lo cual es inmediato, pues, por teorema 1, 1) vemos que la unión infinita de variables de la forma $[X\leq x]\in\Phi$ es igual a una variable de la forma $[X<x]\in\Phi$, y al ser Φ una sigma álgebra, dicha unión infinita pertenece también a Φ. Así pues:

$$[X\leq x]\in\Phi\Leftrightarrow[X<x]\in\Phi$$

a) $\Leftrightarrow$ c) Ahora se trata de ver la equivalencia $[X\leq x]\in\Phi$ con $[X>x]\in\Phi$, que resulta evidente si consideramos que $[X>x]=U-[X\leq x]$, esto es, son complementarios, luego también:

$$[X\leq x]\in\Phi\Leftrightarrow[X>x]\in\Phi$$

b) $\Leftrightarrow$ d) Es decir, $[X<x]\in\Phi$ es equivalente a $[X\geq x]\in\Phi$, lo cual también resulta obvio si consideramos la complementariedad $[X\geq x]=U-[X<x]$, por lo cual:

$$[X\geq x]\in\Phi\Leftrightarrow[X<x]\in\Phi$$

a)$\Leftrightarrow$e) O sea, $[X\leq x]\in\Phi\Leftrightarrow[x_1<X\leq x_2]\in\Phi$, es inmediato, pues basta considerar que $[x_1<X\leq x_2]=[X\leq x_2]-[X\leq x_1]\in\Phi$. Se tiene que

$$[X\leq x]\in\Phi\Leftrightarrow[x_1<X\leq x_2]\in\Phi$$

a)$\Leftrightarrow$f) $[X\leq x]\in\Phi\Leftrightarrow[x_1<X<x_2]\in\Phi$, pues $[x_1<X<x_2]=[X<x_2]-[X\leq x_1]$, por lo cual también es

$$[X\leq x]\in\Phi\Leftrightarrow[x_1<X<x_2]\in\Phi$$

a)$\Leftrightarrow$g) $[X\leq x]\in\Phi\Leftrightarrow[x_1\leq X\leq x_2]\in\Phi$, pues $[x_1\leq X\leq x_2]=[X\leq x_2]-[X<x_1]$ de lo cual

$$[X\leq x]\in\Phi\Leftrightarrow[x_1\leq X\leq x_2]\in\Phi$$

a)$\Leftrightarrow$g) $[X\leq x]\in\Phi\Leftrightarrow[x_1\leq X<x_2]\in\Phi$, pues $[x_1\leq X<x_2]=[X<x_2]-[X<x_1]$ y se tiene

$$[X\leq x]\in\Phi\Leftrightarrow[x_1\leq X\leq x_2]\in\Phi$$

2. Operando con variables aleatorias. Estructura de álgebra asociativa, conmutativa y unitaria para el conjunto de las variables aleatorias sobre un espacio probabilizable (U,Φ)

Definición 2

Dadas las variables aleatorias, X e Y, del espacio probabilizable (U,Φ) se define:

- Igualdad:
$$X = Y \leftrightarrow \forall u \in U,\ X(u) = Y(u)$$
- Suma:
$$X + Y : U \to R,\ \forall u \in U, (X+Y)(u) = X(u) + Y(u)$$
- Producto:
$$X.Y : U \to R,\ \forall u \in U, (X.Y)(u) = X(u).Y(u)$$
- Producto por un número real:
$$\forall \alpha \in R,\ \alpha X : U \to R,\ (\alpha X)(u) = \alpha.X(u), \forall u \in U$$
- Cociente:
$$X / Y : U \to R,\ \forall u \in U / Y(u) \neq 0, (X/Y)(u) = X(u)/Y(u)$$
- Máxima:
$$\max\{X,Y\} : U \to R,\ \forall u \in U, \max\{X,Y\}(u) = \max\{X(u),Y(u)\}$$

Teorema 3

Si X y Y son variables aleatorias en el espacio probabilizable (U,Φ) también son variables aleatorias:

a) $X+Y$, b) $\alpha.X, \forall \alpha \in R$, c) $X.Y$, d) X/Y, e) $\max\{X,Y\}$

Demostración:

a) Llamemos $Z = X+Y$ y veamos que $[Z < x] \in \Phi$.

$$u \in [Z < x] \leftrightarrow Z(u) < x \leftrightarrow (X+Y)(u) < x \leftrightarrow X(u) + Y(u) < x \leftrightarrow X(u) < x - Y(u) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \exists r \in Q / X(u) < r < z - Y(u) \leftrightarrow \exists r \in Q / (X(u) < r) \wedge (Y(u) < x - r) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \exists r \in Q / (u \in [X < r]) \wedge (u \in [Y < x - r]) \leftrightarrow \exists r \in Q / u \in [X < r] \bigcap [Y < x - r] \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow u \in \bigcup_{r \in Q} ([X < r] \cap [Y < x - r])$$

por tanto $[Z < x] = \bigcup_{r \in Q} ([X < r] \cap [Y < x - r])$. como Q es numerable, se tiene que $\bigcup_{r \in Q} ([X < r] \cap [Y < x - r]) \in \Phi$, y deducimos en consecuencia que $[Z < x] \in \Phi$, siendo, por tanto, $Z = X + Y$ variable aleatoria.

b) Sea $Z = \alpha.X$ y veamos que $[Z \leq x] = \Phi$.

Pueden darse los tres casos para el numero real α:

b.1) Si $\alpha = 0 \to [Z \leq x] = [\alpha X \leq x] = [0 \leq x] = \begin{cases} \phi, & si\ x < 0 \\ U, & si\ x \geq 0 \end{cases} \to [Z \leq x] \in \Phi$

b.2) Si $\alpha > 0 \to [Z \leq x] = [\alpha X \leq x] = [X \leq x/\alpha] \in \Phi \to [Z \leq x] \in \Phi$

b.3) Si $\alpha < 0 \to [Z \leq x] = [\alpha X \leq x] \to [X \geq x/\alpha] \in \Phi \to [Z \geq x] \in \Phi$

Luego, efectivamente es $Z = \alpha.X$ variable aleatoria.

c) Hagamos $Z = X.Y$ y probemos que $[Z < x] \in \Phi$.
Veamos previamente que el cuadrado de una variable aleatoria es también variable aleatoria, ya que el producto se puede expresar en forma de diferencia de cuadrados:
$$[X^2 \le x] = \begin{cases} \phi, & si\ x < 0 \\ [-\sqrt{x} \le X \le \sqrt{x}], & si\ x \ge 0 \end{cases} \to [X^2 < x] \in \Phi$$
Veamos ahora el producto $X.Y$:
$$[Z < x] = [X.Y < x] = \left[\frac{(X+Y)^2 - (X-Y)^2}{4} < x \right] \in \Phi \to Z = X.Y$$ es variable aleatoria.

d) Sea ahora $Z = X / Y$. Veamos que se verifica que $[Z < x] \in \Phi$.
Puesto que $\forall u \in U, Y(u) \ne 0$, se tendrá que $Y(u) < 0$ o bien $Y(u) > 0$, por lo que
$$[X / Y \le x] = ([X / Y \le x] \cap [Y < 0]) \cup ([X / Y \le x] \cap [Y > 0]) =$$
$$= ([X \le xY] \cap [Y < 0]) \cup ([X \le xY] \cap [Y > 0]) =$$
$$= ([X - xY \le 0] \cap [Y < 0]) \cup ([X - xY \le 0] \cap [Y > 0]) \in \Phi$$
En definitiva es $[X / Y \le x] \in \Phi \to X / Y$ es variable aleatoria

e) Llamando $Z = \max\{X, Y\}$, probemos que $[Z \le x] \in \Phi$.
$$[Z \le x] = [\max\{X, Y\} \le x] = [X \le x] \cap [Y \le x] \in \Phi \to [Z \le x] \in \Phi$$
en definitiva $[\max\{X, Y\} \le x] \in \Phi$ y por tanto $\max\{X, Y\}$ es variable aleatoria

Definición 3
Sea el espacio probabilizable (U, Φ). Se dice que una función $I_A : U \to R$ es un *indicador del suceso* $A \in \Phi$ sii
$$\forall u \in U,\ I_A(u) = \begin{cases} 1, & si\ u \in A \\ 0, & si\ u \in \overline{A} \end{cases}$$

Teorema 4
El indicador I_A de un suceso $A \in \Phi$ es una variable aleatoria tal que
$$\forall x \in R, [I_A \le x] = \begin{cases} \phi, & si\ x < 0 \\ \overline{A}, & si\ 0 \le x < 1 \\ U, & si\ x \ge 1 \end{cases}$$
Demostración:
- Si $x < 0$, como $I_A(u) = 0$ o bien $I_A(u) = 1$, nunca será $I_A(u) \le x$, por lo que en este caso es $[I_A \le x] = \phi$.
- Si $0 \le x < 1$, la única situación en que $I_A(u) \le x$ es cuando $I_A(u) = 0$ que, por definición, corresponde a $u \in \overline{A}$, luego es $[I_A \le x] = \overline{A}$ en este caso.
- Si $x \ge 1$ será siempre $I_A(u) \le x$, tanto si $u \in A\ (I_A(u) = 1)$ como si $u \in \overline{A}$ que corresponde $I_A(u) = 0$, luego es $[I_A \le x] = U$.

Trivialmente, $[I_A \le x] \in \Phi$.

Teorema 5

La variable aleatoria $[I_A \leq x], \forall A \in \Phi$ cumple las siguientes condiciones:

1) $I_U(u) = 1, \forall u \in U$, es decir, I_U es elemento neutro para el producto de variables aleatorias.

2) $(I_A)^2 = I_A, \forall A \in \Phi$, idempotencia.

3) $I_U - I_A = I_{\overline{A}}, \forall A \in \Phi$

4) $I_A.I_B = I_{A\cap B}, \forall A, B \in \Phi$

5) $I_{A\cup B} = \max\{I_A, I_B\} \forall A, B \in \Phi$

6) $I_A + I_B = I_{A\cup B}, \forall A, B \in \Phi / A \cap B = \phi$

Demostración:

1) Por definición es

$$\forall u \in U, I_A(u) = \begin{cases} 1, & si\ u \in A \\ 0, & si\ u \in \overline{A} \end{cases}$$

pero siendo U el espacio muestral, $u \in U$ siempre, por lo que $I_U(u) = 1, \forall u \in U$

2) Veamos las dos alternativas:

- Si $u \in A \rightarrow I_A = 1 \rightarrow I_A.I_A = 1.1 = 1 \rightarrow I_A^2 = 1$
- Si $u \in \overline{A} \rightarrow I_A = 0 \rightarrow I_A.I_A = 0.0 = 0 \rightarrow I_A^2 = 0$

O sea:

$$\forall u \in U, I_A^2(u) = \begin{cases} 1, & si\ u \in A \\ 0, & si\ u \in \overline{A} \end{cases} \rightarrow I_A^2 = I_A$$

3) De ser $I_U = 1$ se tiene que $I_U - I_A = 1 - I_A$

por lo cual:

- Si $u \in A \rightarrow (I_U - I_A)(u) = 1 - I_A(u) = 1 - 1 = 0$
- Si $u \in \overline{A} \rightarrow (I_U - I_A)(u) = 1 - I_A(u) = 1 - 0 = 1$

O sea:

$$\forall u \in U, (I_U - I_A)(u) = \begin{cases} 0, & si\ u \in A \\ 1, & si\ u \in \overline{A} \end{cases} \rightarrow I_U - I_A = I_{\overline{A}}$$

4) Las dos alternativas:

- Si $u \in A \bigcap B \rightarrow u \in A \wedge u \in B \rightarrow I_A(u) = 1 \wedge I_B(u) = 1 \rightarrow I_A.I_B = 1$
- Si $u \notin A \bigcap B \rightarrow \begin{cases} u \notin A \wedge u \in B \\ u \in A \wedge u \notin B \\ u \notin A \wedge u \notin B \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I_A = 0 \wedge I_B = 1 \\ I_A = 1 \wedge I_B = 0 \\ I_A = 0 \wedge I_B = 0 \end{cases} \rightarrow I_A.I_B = 0$

O sea:

$$\forall u \in U, (I_A.I_B)(u) = \begin{cases} 1, & si\ u \in A \bigcap B \\ 0, & si\ u \in \overline{A \bigcap B} \end{cases} \rightarrow I_A.I_B = I_{A\cap B}$$

5) Las alternativas posibles son ahora:

- Si $u \in A \wedge u \notin B \rightarrow I_A(u) = 1 \wedge I_B(u) = 0 \rightarrow \max\{I_A, I_B\} = I_A(u) = 1$
- Si $u \notin A \wedge u \in B \rightarrow I_A(u) = 0 \wedge I_B(u) = 1 \rightarrow \max\{I_A, I_B\} = I_B(u) = 1$
- Si $u \notin A \wedge u \notin B \rightarrow I_A(u) = 0 \wedge I_B(u) = 0 \rightarrow \max\{I_A, I_B\} = I_A(u) = I_B(u) = 0$
- Si $u \in A \wedge u \in B \rightarrow I_A(u) = 1 \wedge I_B(u) = 1 \rightarrow \max\{I_A, I_B\} = I_A(u) = I_B(u) = 1$

En resumen:

$$\max\{I_A, I_B\} = \begin{cases} 1, & si\, u \in A \bigcup B \\ 0, & si\, u \notin A \bigcup B \end{cases} \rightarrow \max\{I_A, I_B\} = I_{A \cup B}$$

6) Si $A \bigcap B = \phi$, no existe el caso $u \in A \bigcap B$, luego, las únicas alternativas son:

- Si $u \in A \wedge u \notin B \rightarrow I_A(u) = 1 \wedge I_B(u) = 0 \rightarrow (I_A + I_B)(u) = 1 + 0 = 1$
- Si $u \notin A \wedge u \in B \rightarrow I_A(u) = 0 \wedge I_B(u) = 1 \rightarrow (I_A + I_B)(u) = 0 + 1$
- Si $u \notin A \wedge u \notin B \rightarrow I_A(u) = 0 \wedge I_B(u) = 0 \rightarrow (I_A + I_B)(u) = 0 + 0 = 0$

O sea:

$$\forall u \in U, (I_A + I_B)(u) = \begin{cases} 1, & si\, u \in A \bigcup B \\ 0, & si\, u \in \overline{A \bigcup B} \end{cases} \rightarrow I_A + I_B = I_{A \cup B},\, si\ A \bigcap B = \phi$$

En definitiva, el conjunto de las variables aleatorias sobre un espacio probabilizable (U, Φ), con las operaciones indicadas, es un Álgebra Asociativa, Conmutativa y Unitaria, cuyo elemento unidad es precisamente el indicador del espacio muestral (I_U).

3. Variables aleatorias y medida de Borel

La clase β de los conjuntos de Borel de la recta R está constituida por el sigma-álgebra engendrada por todos los intervalos de números reales, es decir, es el sigma-álgebra obtenida mediante unión, intersección o diferencia de intervalos de R, incluyendo el mismo R, ya sea un número finito o bien un número infinito numerable de veces.

La clase β resulta ser, en definitiva, la clase de los intervalos abiertos, cerrados, semiabiertos, intervalos degenerados y no degenerados, finitos o infinitos de la recta real, incluyendo la misma recta R.

Sabemos que una variable aleatoria X aplica un elemento B de la sigma-álgebra Φ en la recta R haciéndole corresponder un conjunto b de Borel de R, por lo que la imagen inversa $X^{-1}(b)$ de un conjunto de Borel de R está en el sigma-álgebra Φ:

$$\forall b \in \beta, \exists B \in \Phi / X^{-1}(b) = B$$

cumpliéndose también que la imagen inversa de una operación cualquiera en β se corresponde con la misma operación en Φ de las imágenes inversas:

$$\forall a, b \in \beta,\ X^{-1}(a * b) = X^{-1}(a) * X^{-1}(b) \in \Phi$$

Se dice que una función de R en R, $f : R \rightarrow R$, es medible Borel si y solo si

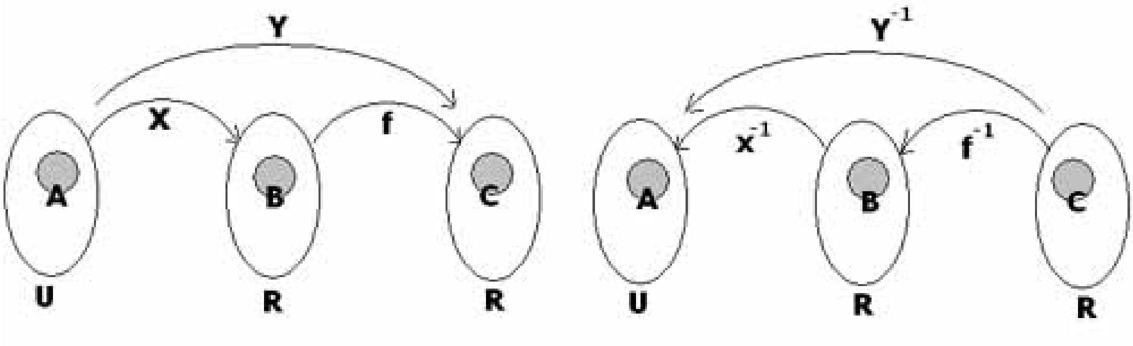
$$\forall r \in R, [f < r] \in \beta$$

Esto es, si el conjunto h de los números reales tales $f(h) < r, \forall r \in R$, es un elemento de la clase Borel.

Son medibles Borel, por ejemplo, las funciones continuas de R.

Teorema 6
Si es X una variable aleatoria en (U,Φ) y $f:R\to R$ una función medible Borel, entonces, $f.X:U\to R$ es una variable aleatoria en (U,Φ).

Demostración:



$Y = f\circ X$ $\qquad\qquad$ $Y^{-1} = X^{-1}\circ f^{-1}$

Se tiene:
$X(A) = B\in R \;\wedge\; A = X^{-1}(B)\in\Phi$ por ser X variable aleatoria
$f(B) = C\in R \;\wedge\; B = f^{-1}(C)\in\beta$ por ser f medible Borel
entonces:
$Y(A) = (f\circ X)(A) = C \;\wedge\; A = (f\circ X)^{-1}(C) \Rightarrow A = (X^{-1}\circ f^{-1})(C) = X^{-1}\left[f^{-1}(C)\right] =$
$= X^{-1}(B)\in\Phi$ por ser B conjunto de Borel ($B\in\beta$)
Luego $Y = f\circ X$ es variable aleatoria

Definición 4
Sean $X_k, k=1,...,n$, variables aleatorias en el espacio probabilizable (U,Φ). Llamaremos *variable aleatoria n-dimensional* o *vector aleatorio n-dimensional* a la aplicación

$$X = (X_1,...,X_n):U\to R^n$$

que representaremos por $\left[X_1\le x_1,...,X_n\le x_n\right]$

Obviamente se verifica que

$$\left[X_1\le x_1,...,X_n\le x_n\right] = \{u\in U / X_j(u)\le x_j,\ j=1,2,...,n\} = \left[X_1\le x_1\right]\cap ...\cap\left[X_n\le x_n\right]\in\Phi$$

Teorema 7
Si $f:R^n\to R^n$ es medible Borel y X es variable aleatoria n-dimensional, entonces $f.X:U\to R^n$ es variable aleatoria n-dimensional.

Demostración:
La prueba es una extensión del teorema 6, mediante iguales razonamientos.

4. Otras propiedades elementales

Teorema 8
Si es X variable aleatoria unidimensional se verifica:

a) $U = [X \le 0] \cup [X > 0]$

b) $U = [X \le 0] \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [n-1 < X \le n] \right)$

c) $U = \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} [-(n+1) < x \le -n] \right) \cup [X > 0]$

Demostración

a) Puesto que $[X \le 0] = \{u \in U / X(u) \le 0\}$ y $[X > 0] = \{u \in U / X(u) > 0\}$ es inmediata la proposición.

b) Utilizando los números naturales, podemos descomponer todo el intervalo real en la forma:

$$R = (-\infty, 0] \cup (0,1] \cup (1,2] \cup \ldots \cup (n-1, n] \cup \ldots$$

con lo cual la variable aleatoria define la descomposición del espacio muestral en la forma

$$U = [X \le 0] \cup [0 < X \le 1] \cup [1 < X \le 2] \cup \ldots \cup [n-1 < X \le n] \cup \ldots$$

o bien $U = [X \le 0] \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [n-1 < X \le n] \right)$

c) Análogamente al apartado anterior, sería ahora:

$$R = \ldots (-(n+1), -n] \cup \ldots \cup (-2, -1] \cup (-1, 0] \cup (0, +\infty]$$

y la descomposición asociada del espacio muestral será

$$U = \ldots [-(n+1) < X \le -n] \cup \ldots \cup [-2 < X \le -1] \cup [-1 < X \le 0] \cup [X > 0]$$

es decir, $U = \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} [-(n+1) < x \le -n] \right) \cup [X > 0]$

Definición 5

Si A es un suceso de probabilidad no nula ($p(A) > 0$), se define como *variable aleatoria condicionada a* A al suceso

$$[X \le x] / A$$

verificándose, obviamente, la formula de la probabilidad total:

$$p([X \le x] \cap A) = p(A).p([X \le x] / A)$$

Definición 6

Se dice que un conjunto de variables aleatorias $X_1, \ldots, X_k$ son *independientes* si para toda k-pla de pares de números reales $((a_1 \le b_1), \ldots (a_k \le b_k))$ se verifica que

$$[a_1 < X_1 \le b_1] \cap \ldots \cap [a_k < X_k \le b_k] = \phi$$

Definición 7
Una variable aleatoria X se dice que es *discreta* si su rango o recorrido, $rang(X)$, es un conjunto numerable, y se dice que es *continua* si su rango o recorrido es no numerable.

Obviamente, si la variable aleatoria es discreta, $rang(X)$ es un conjunto discreto, es decir, para todo elemento del rango existe una bola abierta reducida tal que su intersección con el rango es vacía:

$$\forall x \in rang(X), \exists B'(x,\varepsilon) / B'(x,\varepsilon) \cap rang(X) = \phi$$

4. Bibliografía

Cramer, H.; "Métodos matemáticos de la Estadística". Ediciones Aguilar.
Frechet, M.; "Recherches theoriques modernes sur la theorie des probabilities", Gauthier-Villars, 10ª edic. 1950
Gndenko, B. ; "Teoría de probabilidades ». Editorial Mir
Schweizer, B;Sklar, A.; "Probabilistic metric spaces", North Holland, N.York, 1983
Quesada P,V.; García Perez, A.; "Lecciones de Cálculo de probabilidades", Diaz de Santos, Madrid, 1988.
Martín Pliego, F.;Ruiz-Maya Pérez, L.; "Fundamentos de Probabilidad", Thomson-Paraninfo, 1998.
S. Chinea, C., "Aleatoriedad y álgebras de sucesos", (http://casanchi.com/mat/aleatoria01.pdf)
S. Chinea, C., "De las álgebras de sucesos a los espacios probabilísticos", (http://casanchi.com/mat/sucesospro01.pdf)