# El Teorema del Punto Fijo de Banach
# Fixed Point Theorem of Banach

**Carlos Sánchez Chinea**


**0. Resumen**

En 1922 el matemático polaco Stefan Banach (1892-1945) enuncia por vez primera un teorema que garantiza la existencia de puntos fijos para ciertas funciones operacionales, las llamadas *funciones contractivas*, definidas en espacios métricos completos, proporcionando un método para su determinación. Tiene la utilidad de permitir la demostración de existencia y unicidad de soluciones en diversos problemas, en particular en lo que respecta a las ecuaciones diferenciales ordinarias, aparte de otras importantes utilidades, como el análisis de sistemas dinámicos (modelos caóticos, evolución de modelos de población, etc.) o modelos iterativos.

Mostramos en este artículo el enunciado y demostración del Teorema del punto fijo de Banach y una aplicación elemental a la demostración de la existencia y unicidad de soluciones en ecuaciones diferenciales de primer orden (Teorema de Picard-Lindelof).


Palabras clave: Banach, punto fijo, contracción, existencia, unicidad, ecuaciones diferenciales, espacio métrico, espacio completo


**0. Summary**

In 1922 the polish mathematician Stefan Banach (1892-1945) first stated a theorem which guarantees the existence of fixed points for certain operational functions, so-called contractive functions, defined on complete metric spaces, providing a method for its determination. It has the ability of allowing the demonstration of existence and uniqueness of solutions to various problems, particularly in regard to ordinary differential equations, apart from other major utilities, such as the analysis of dynamical systems (chaotic models, development of population models, etc.) or iterative models.

In this article we state and prove the Theorem Banach fixed point and basic application to demonstrate the existence and uniqueness of solutions of first order differential equations (Picard-Lindelof theorem).


Keywords: Banach fixed point, contraction, existence, uniqueness, differential equations, metric space, complete space

## 1. Introducción.

### 1.1. Espacios métricos completos

#### 1.1.1. El cuerpo R de los números reales:

El conjunto infinito de los números reales puede definirse como un cuerpo conmutativo, ordenado y completo.

¿Cómo construir este cuerpo desde el cuerpo $Q$ de los números racionales mediante sucesiones?. Daremos los pasos siguientes:

a. Definir el conjunto $S_Q$ de las sucesiones de números racionales, del cual se puede trivialmente probar que se trata de una álgebra lineal sobre Q, conmutativa, asociativa y con elemento unidad para su operación multiplicativa.

b. Definir el subconjunto $S_A$ de $S_Q$, formado por las sucesiones acotadas de números racionales, del cual también trivialmente se obtiene que se trata de una álgebra sobre $Q$, subálgebra del álgebra $S_Q$.

c. También podemos considerar el conjunto $S_L$ de las sucesiones de números reales con límite, el cual es, también, un álgebra sobre Q, subálgebra del álgebra $S_A$ y, por tanto, también subálgebra de $S_Q$. El conjunto $P_0$ de estas sucesiones que tienen límite nulo (que llamaremos *sucesiones nulas*) es un ideal primo del álgebra $S_L$.

d. Definir el concepto de sucesión de Cauchy:
"Una sucesión de números racionales ($a_n$) es de Cauchy si, y solo sí,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in N / n_1, n_2 \geq n, \left| a_{n_1} - a_{n_2} \right| \leq \varepsilon$$

notemos que hemos utilizado el concepto clásico, euclidiano, de valor absoluto, o de distancia, entre los elementos $a_{n1}$ y $a_{n2}$ . El conjunto $S_C$ de las sucesiones de Cauchy está contenido en el conjunto $S_A$ de las sucesiones acotadas $S_A$, y, también, contiene al conjunto $S_L$ de las sucesiones con límite:

$$S_L \subset S_C \subset S_A$$

Además, $S_C$ es, también, álgebra sobre Q, subálgebra de $S_A$, con el mismo elemento unidad.

e. La relación de equivalencia R, definida en $Sc$, que da $S_C/(p_0)$ como conjunto cociente es:

$$(a_n) R (b_n) \Leftrightarrow (a_n) - (b_n) \in p_0$$

f. El conjunto $R = S_C/(p_0)$ es un cuerpo conmutativo, ordenado y completo, esto es, se trata del cuerpo de los números reales, en el cual la restricción del orden de $R$ a $Q$ coincide con el orden de $Q$. Se prueba que si existieran dos cuerpos conmutativos, ordenados y completos, ambos serían isomorfos.

De esta manera es posible construir un cuerpo R de números, los números reales. que complete al cuerpo $Q$ de los números racionales, esto es, que incluya también los números llamados "irracionales", números no expresables mediante cocientes de enteros. Para ello hemos tenido que construir las sucesiones de Cauchy, usando el concepto de valor absoluto euclidiano y de distancia euclidiana.

Pueden obtenerse, obviamente, otra forma de valor absoluto y de distancia (por ejemplo, el valor absoluto p-ádico), con lo que aparecerían otro cuerpo distinto de números (números p-ádicos).

**1.1.2. Espacios vectoriales:**
Un espacio vectorial es un par constituido por un grupo conmutativo, V, que se llama grupo de los vectores del espacio, y un cuerpo K, que se llama cuerpo de los escalares del espacio, dotado de una ley de composición externa $\cdot : KxV \to V$ que verifica las propiedades siguientes:

1) $\forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in V, \alpha.(\beta.x) = (\alpha.\beta).x$
2) $\forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in V, (\alpha + \beta)x = \alpha.x + \beta x$
3) $\forall \alpha \in K, \forall x, y \in V, \alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$
4) $\forall x \in V, \exists 1 \in K / x.1 = x$

Un espacio vectorial métrico, $M$, es un espacio vectorial dotado de una métrica, de una distancia o producto interior, $d$, que verifica:

a) $\forall (a,b) \in M, d(a,b) \geq 0, \quad si\ d(a,b) = 0 \to a = b$
b) $\forall (a,b) \in M, d(a,b) = d(b,a)$
d) $\forall (a,b,c) \in M, d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$

y, finalmente, un espacio métrico completo es un espacio métrico en el que toda sucesión fundamental o de Cauchy es convergente:

$$M\ esp\ metrico\ compl \to \forall (a_n) \in S_C, \exists l \in M / l = \lim a_n$$

**1.2. La idea de punto fijo**

Sea una función $f : A \to A$. Se dice que un elemento $x$ de $A$ es punto fijo para la función $f$ si la imagen es el mismo punto:

$$x_0 \in A\ punto\ fijo\ de\ f \leftrightarrow f(x_0) = x_0$$

Es inmediato que si $x_0 \in A$ es punto fijo para la función f, entonces se verifica que

$$f^n(x_0) = f\left(f^{n-1}(x_0)\right) = ... = x_0$$

La idea implícita en la definición de punto fijo es que, en general, una función definida de un conjunto en sí mismo "desplaza" o "transforma" los puntos del conjunto en otros puntos. El caso de punto fijo corresponde a desplazamiento nulo o punto que se transforma en sí mismo.

Así, cuando expresamos que $\forall x \in Z, f(x) = x^2 - 2$, encontramos que el punto $0 \in Z$ se transforma en $-2 \in Z$, o que $3 \in Z$ se traslada a $f(3) = 9 - 2 = 7$, etc., en cambio, el punto $2 \in Z$ es punto fijo, pues $f(2) = 2^2 - 2 = 2$

Una misma función puede tener diversos puntos fijos, que dependen de la función y del dominio en el que está definida. Ejemplos:

$f: Z \to Z$, $f(x) = -x$ tiene un único punto fijo, *x=0.*

$f: Z \to Z$, $f(x) = x^2$ tiene dos puntos fijos, *x=0* y $x=1$. En cambio, si el dominio de definición es *(0,1),* es obvio que no tiene puntos fijos.

$f: Z \to Z$, $f(x) = x + 2$ no tiene puntos fijos, pues la ecuación *x+2=x* no tiene solución.

Los teoremas dedicados a la búsqueda de puntos fijos pueden ser teoremas de existencia o bien teoremas de construcción. Los primeros son aquellos teoremas que nos aseguran la existencia o no de un determinado punto fijo, mientras que los segundos son teoremas que nos ofrecen una algoritmo o proceso que nos permite encontrar el punto fijo de la función.

El Teorema de Banach es uno de estos teoremas de construcción, en donde el proceso de obtención del punto fijo consiste en la iteración de la función.

## 2. El Teorema del Punto Fijo de Banach

Sea $M$ un espacio métrico completo, con distancia $d$, y sea un operador $\Delta$ en $M$ tal que:

a) $\forall x \in M, \Delta x \in M$
b) $\forall x, y \in M, d(\Delta x, \Delta y) \leq \phi . d(x, y)$ siendo $0 < \phi < 1$

entonces existe un único punto $y^0 \in M$, que es fijo para el operador:

$$\Delta y^0 = y^0$$

Demostración:
Probaremos en primer lugar que cualquier sucesión $(y_n) = \{y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots\}$ que se obtenga mediante la aplicación sucesiva del operador, $\Delta y_{k-1} = y_k$, es convergente en *M.*
En segundo lugar, probaremos también que el punto de convergencia de la sucesión $(y_n)$ es fijo.
Y finalmente probaremos que tal punto fijo es único.

a) Sea $(y_n) = \{y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots\}$ tal que $\Delta y_{k-1} = y_k$, $k = 1,2,\ldots,n,\ldots$.
Se tiene, con $0 < \phi < 1$:

$$\begin{array}{llll}
d(y_2, y_1) = & d(\Delta y_1, \Delta y_0) \leq & \phi . d(y_1, y_0) & \\
d(y_3, y_2) = & d(\Delta y_2, \Delta y_1) \leq & \phi . d(y_2, y_1) \leq & \phi^2 d(y_1, y_0) \\
\ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\
\ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\
d(y_{n+1}, y_n) = & d(\Delta y_n, \Delta y_{n-1}) \leq & \phi . d(y_n, y_{n-1}) \leq & \phi^n d(y_1, y_0) \\
\ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots.
\end{array}$$

Por la desigualdad triangular del espacio métrico:

$$d(y_{n+m},y_n)\le d(y_{n+1},y_n)+d(y_{n+2},y_{n+1})+...+d(y_{n+m},y_{n+m-1})\le \phi^n d(y_1,y_0)+$$
$$+\phi^{n+1}d(y_1,y_0)+...+\phi^{n+m-1}.d(y_1,y_0)=\left[\phi^n+\phi^{n+1}+...+\phi^{n+m-1}\right]d(y_1,y_0)$$

Utilizando la expresión de la suma de una progresión geométrica de razón $\phi$, con primer término $\phi^n$ y último término $\phi^{n+m-1}$:

$$d(y_{n+m},y_n)\le\left[\phi^n+\phi^{n+1}+...+\phi^{n+m-1}\right]d(y_1,y_0)=\frac{\phi^{n+m-1}.\phi-\phi^n}{\phi-1}.d(y_1,y_0)=$$
$$=\frac{\phi^n-\phi^{n+m}}{1-\phi}.d(y_1,y_0)\le\frac{\phi^n}{1-\phi}.d(y_1,y_0)$$

En definitiva, $d(y_{n+m},y_n)\le\frac{\phi^n}{1-\phi}.d(y_1,y_0)$ y como $0<\phi<1$, la distancia tiende a hacerse indefinidamente pequeña cuanto mayor sea $n$. Esto quiere decir que

$$\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon)/\forall n>N(\varepsilon),d(y_{n+m},y_n)\le\frac{\phi^n}{1-\phi}.d(y_1,y_0)<\varepsilon$$

Luego, tal sucesión es fundamental, y puesto que el espacio métrico es completo, converge en un punto $y^0\in M$.

b) Probemos que $y^0$ es punto fijo para el operador $\Delta$ $(\Delta y^0=y^0)$. Veámoslo por reducción al absurdo, pues si fuera $\Delta y^0=z^0\neq y^0$, entonces se tendría, al aplicar la desigualdad triangular:

$$d(y^0,z^0)\le d(y^0,y_n)+d(y_n,y_{n+1})+d(y_{n+1},z^0)$$

Con lo que:

$\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon)/n>N(\varepsilon)$:

$d(y^0,y_n)<\frac{\varepsilon}{3}$, por ser $\lim y_n=y^0$

$d(y_n,y_{n+1})<\frac{\varepsilon}{3}$, por ser $(y_n)$ fundamental.

$d(y_{n+1},z^0)=d(\Delta y_n,\Delta y^0)\le d(y_n,y^0)<\frac{\varepsilon}{3}$

resultando pues que

$$d(y^0,z^0)\le d(y^0,y_n)+d(y_n,y_{n+1})+d(y_{n+1},z^0)<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

lo que nos indica que $d(y^0,z^0)=0\to z^0=y^0$

Así, pues, el punto de convergencia de la sucesión es punto fijo para el operador.

c) Probemos ahora que tal punto fijo es único:

Razonando también por reducción al absurdo, supongamos que hay otro punto $h^0\in M$ tal que es punto fijo: $\Delta h^0=h^0\neq y^0$

Entonces, $d(y^0,h^0)=d(\Delta y^0,\Delta h^0)\le\phi.d(y^0,h^0)$, pero la desigualdad $d(y^0,h^0)\le\phi.d(y^0,h^0)$ es contradictoria, salvo que $d(y^0,h^0)=0$, de lo cual resulta, como es obvio, que $h^0 = y^0$.

En definitiva, toda función contractiva $\Delta$ sobre un espacio métrico completo $M$ tiene un único punto fijo, esto es, un único punto invariante para su aplicación:

$$\exists! y \in M / \Delta y = y$$

Para utilizar el Teorema de Banach en la demostración de existencia y unicidad de un punto fijo, y en un problema concreto, es necesario, por consiguiente, establecer el carácter de espacio métrico completo para el espacio de trabajo y que la función que se considera cumple las dos condiciones exigidas por el teorema, a saber, su carácter interno en dicho espacio de trabajo y su carácter contractivo:

$$\begin{aligned} &1)\ \forall y \in M, \Delta y \in M \\ &2)\ \forall y, z \in M, d(\Delta y, \Delta z) \leq \phi . d(y, z) \end{aligned}$$

para $0 < \phi < 1$ y donde $d$ es la métrica del espacio $M$.

## 3. Ejemplo para una función real de variable real

Supongamos que definimos una función real, $f$, de una sola variable real, en el intervalo $(y_0 - b, y_0 + b) \subseteq R$. Esto es:

$$f : (y_0 - b, y_0 + b) \rightarrow (y_0 - b, y_0 + b)$$

de modo que

$$\forall y \in (y_0 - b, y_0 + b) \rightarrow f(y) \in (y_0 - b, y_0 + b)$$

En general es

$$f(y) \neq y$$

Pero el teorema de Banach nos dice que si se cumple la contractibilidad:

$$\forall y_1, y_2 \in (y_0 - b, y_0 + b), d(f(y_1), f(y_2)) \leq \phi . d(y_1, y_2), 0 < \phi < 1$$

entonces existe un único punto $y \in (y_0 - b, y_0 + b)$ tal que $f(y) = y$

Y esto ocurre porque se verifican las condiciones del teorema, es decir, se verifica que el espacio de trabajo, intervalo $(y_0 - b, y_0 + b) \subseteq R$, es espacio métrico completo, y la función real, $f$, es contractiva.

El uso del teorema para probar la existencia y unicidad de solución de una determinada ecuación, $f(x, y) = 0$, esto es, la existencia y unicidad de la solución $y = s(x, y)$, puede hacerse de manera sencilla considerando que en realidad consiste en probar que con respecto al operador $\Delta \equiv s(x,\ )$, es $y$ punto fijo:

$$\Delta y = s(x, y) = y$$

Así, si se trata, por ejemplo, de una ecuación diferencial de primer orden, $y' = f(x,y)$, todo consistiría en probar que existe un punto fijo, $y$, para el operador

$$\Delta \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,\ ).dx$$

o sea, consiste en probar que se obtiene:

$$\Delta y \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y).dx = y$$

En definitiva, se trata de probar que el operador que da la solución de la ecuación que se considera verifica las condiciones del Teorema de Banach.

## 4. Existencia y unicidad de solución para la ecuación diferencial de primer orden $dy/dx = f(x,y)$:

Aplicando el teorema del punto fijo de Banach podemos probar el teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales de primer orden que se conoce como Teorema de Picard-Lindelof, o Teorema de Cauchy-Lipschitz, y que podría enunciarse de forma general de la manera siguiente:

Sea $f : D \subseteq RxR \to R$ una función continua y localmente Lipschitziana respecto de $y$, donde $D$ es un dominio abierto. Entonces, dado el punto $(x_0, y_0) \in D$ podemos encontrar un intervalo cerrado, $[x_0 - s_0, x_0 + s_0] \subset R,\ s_0 \in R$ donde existe solución única para el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

También, detallando algo más, podríamos expresarlo en la forma:

La ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$, donde $f(x,y)$ es continua (y por tanto acotada) y lipschitziana en el dominio

$$D = \{(x,y)/\, x \in (x_0 - a, x_0 + a), y \in (y_0 - b, y_0 + b)\},$$

es decir, tal que

$$\forall (x,y) \in D, \exists K \in R / |f(x,y)| \le K$$
$$\forall (x,y),(x,z) \in D, \exists L \in R / |f(x,y) - f(x,z)| \le L|y - z|$$

tiene por solución única la función

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y).dt, \qquad \forall x \in [x_0 - s_0, x_0 + s_0] / s_0 = \min(a, b/K_m, 1/L)$$

(donde es $K_m$ la cota superior mínima o supremo de la función *f(x,y),* $K_m = \sup r|f(x,y)|$, en el dominio $D$ y $L$ es la constante de Lipschitz).

Demostración:

a) Elección del espacio de trabajo:

Consideremos el espacio $M = \left(y_0 - b, y_0 + b\right)$ de todas las funciones continuas, *y(x),* definidas en el intervalo $\left(x_0 - a, x_0 + a\right)$ con métrica definida en dicho intervalo por $d(y(x),z(x)) = |y(x) - z(x)|,\ \forall x \in \left(x_0 - a, x_0 + a\right)$. Se trata, pues, de un espacio métrico completo.

b) Comprobación de las condiciones contractivas del operador:

Sea el operador $\Delta$ definido por $\forall y \in (y_0 - b, y_0 + b), \Delta y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y).dt$

- Primera condición: Veamos que $\forall y \in M, \Delta y \in M$:
  Puesto que $M = \left(y_0 - b, y_0 + b\right)$, para probar que $\Delta y \in M$ bastará probar que $|\Delta y - y_0| < b$

  $$|\Delta y - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(x,y).dx\right| \le \int_{x_0}^{x} .|f(x,y)|dx \le K_m \left|\int_{x_0}^{x} dx\right| = K_m |x - x_0| = K_m s_0$$

  llamando $s_0 = |x - x_0| < a$, pues $x \in (x_0 - a, x_0 + a)$. Para que $|\Delta y - y_0| < b$ tendrá que ser $K_m s_0 < b \rightarrow s_0 < b / K_m$

  Por tanto, $\Delta y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y).dx \in M$ con la condición de que $s_0 < b/K_m$ y $s_0 < a$, o sea, debe cumplirse que $s_0 < \min\left(a, \dfrac{b}{K_m}\right)$
- Segunda condición: Veamos ahora que $d(\Delta y, \Delta z) \le \phi.d(y,z),\ 0 < \phi < 1$

  $$d\left(\Delta y, \Delta z\right) = \left|\int_{x_0}^{x} f(t,y).dt - \int_{x_0}^{x} f(t,z).dt\right| = \left|\int_{x_0}^{x} \left[f(t,y) - f(t,z)\right]dt\right| \le$$

  $$\le L.\left|\int_{x_0}^{x} |y - z|.dt\right| \le L.|y - z|.|x - x_0| = L.s_0.|y - z| = L.s_0.d(y,z)$$

  para que $d(\Delta y, \Delta z) \le \phi.d(y,z),\ 0 < \phi < 1$ tendrá que ser $0 < L.s_0 < 1$, es decir, tendrá que ser $s_0 < 1/L$

  Por tanto, $d(\Delta y, \Delta z) \le \phi.d(y,z)$, con la condición de que $s_0 < 1/L$

Y para que se verifiquen las dos condiciones de contracción que establece el Teorema de Banach, deberá, en definitiva, ser

$$s_0 < \min(a, \frac{b}{K_m}, \frac{1}{L})$$

Por tanto, el Teorema de existencia y unicidad de soluciones de la ecuación diferencial de primer orden queda probado en el intervalo que establecen las condiciones indicadas

$$\forall x \in \left[x_0 - s_0, x_0 + s_0\right] / s_0 = \min\left(a, b/K_m, 1/L\right)$$

**5. Aplicación a la demostración de existencia y unicidad de soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:**

Teorema: Para el conjunto de $n$ ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{array}{l} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \ con\ y_1(x_0) = y_{10} \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, \ldots, y_n), \ con\ y_2(x_0) = y_{20} \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \ldots, y_n), \ con\ y_n(x_0) = y_{n0} \end{array},$$

donde las funciones $f_i(x, y_1, \ldots, y_n), \ \ i = 1, \ldots, n$ son continuas y lipschtzianas en un dominio abierto D, se verifica que existen y son únicas las soluciones $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ en un cierto intervalo $[x_0 - s_0, x_0 + s_0]$ de la recta real.
Demostración:

Llamemos $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, y sea el dominio $D$ en el que están definidas las funciones

$$D = \{(x, Y) / x \in (x_0 - a, x_0 + a), Y \in (y_{10} - b_1, y_{10} + b_1) \times \ldots \times (y_{n0} - b_n, y_{n0} + b_n)\}$$

El espacio de trabajo es, por tanto, $M = (y_{10} - b_1, y_{10} + b_1) \times \ldots \times (y_{n0} - b_n, y_{n0} + b_n)$, con métrica definida por

$$\forall Y, Z \in M, \ d(Y(x), Z(x)) = \sum_{i=1}^{n} \max |y_i(x) - z_i(x)|$$

siendo $Y = (y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))$ y $Z = (z_1(x), z_2(x), \ldots, z_n(x))$. Se trata, pues, de un espacio métrico completo.

Por otra parte, si las funciones $f_i(x, y_1, \ldots, y_n), \ \ i = 1, \ldots, n$ son continuas y verifican la condición de Lipschitz, se tiene que:

a) por ser continuas, serán acotadas:

$$\exists M_m \in R / \forall x \in (x_0 - a, x_0 + a), |f_i(x, y_1, \ldots, y_n)| \le M_m$$

(llamando $M_m$ a la cota mínima de todas ellas)

b) por cumplir la condición de Lipschitz, que podemos expresar aquí por:

$$\exists L \in R / |f_k(x, y_1, \ldots, y_n) - f_k(x, z_1, \ldots, z_n)| \le L \sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i|, \quad k = 1, \ldots, n$$

ya que $|f_k(x, y_1, \ldots, y_n) - f_k(x, z_1, \ldots, z_n)| = |f_k(x, Y) - f_k(x, Z)| \le L|Y - Z| =$

$$= L.\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i|^2} \le L.\sum_{i=1}^{n} \sqrt{|y_i - z_i|^2} = L.\sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i|, \ \ k = 1, \ldots, n$$

Para demostrar el teorema, hemos de probar las dos condiciones de Banach:

a) $\forall Y \in M, \Delta Y \in M$
b) $\forall Y, Z \in M, d(\Delta Y, \Delta Z) \le \phi.d(Y, Z), \quad 0 < \phi < 1$

a) Veamos la demostración de la primera condición:

$Y = (y_1,\ldots,y_n) \in M \leftrightarrow y_i \in (y_{i0} - b_i, y_{i0} + b_i) \leftrightarrow |y_i - y_{i0}| < b_i,\ i = 1,\ldots,n$

$\Delta Y = (\Delta y_1,\ldots,\Delta y_n) \in M \leftrightarrow \Delta y_i \in (y_{i0} - b_i, y_{i0} + b_i) \leftrightarrow |\Delta y_i - y_{i0}| < b_i,\ i = 1,\ldots,n$

Veamos, pues, en qué condiciones se cumple tal desigualdad:

$$|\Delta y_i - y_{i0}| = \left|\int_{x_0}^{x} f_i(x, y_1,\ldots,y_n).dx\right| \leq \int_{x_0}^{x} |f_i(x, y_1,\ldots,y_n)|.dx \leq M_m \int_{x_0}^{x} dx = M_m |x - x_0| = M_m s_0 < b_i$$

Es decir, tiene que verificarse que $s_0 < b_i / M_m$ y como también, por construcción del intervalo de existencia de las funciones $y_i$ es $s_0 < a$, la primera condición del teorema de existencia y unicidad se cumplirá en el intervalo $[x_0 - s_0, x_0 + s_0]$, donde $s_0 < \min(a, b_i / M_n),\ i = 1,\ldots,n$

b) Demostremos ahora la segunda condición:

Siendo $Y = (y_1,\ldots,y_n)$, $Z = (z_1,\ldots,z_n)$, para probar que $d(\Delta Y, \Delta Z) \leq \phi . d(Y, Z)$, con $0 < \phi < 1$. Como es:

$$\forall Y, Z \in M,\ d(Y(x), Z(x)) = \sum_{i=1}^{n} \max |y_i(x) - z_i(x)|$$

se tiene:

$$\forall Y, Z \in M,\ d(\Delta Y(x), \Delta Z(x)) = \sum_{k=1}^{n} \max |\Delta y_k(x) - \Delta z_k(x)| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \max \left| \int_{x_0}^{x} f_k(x, y_1,\ldots,y_n) dx - \int_{x_0}^{x} f_k(x, z_1,\ldots,z_i).dx \right| = \sum_{k=1}^{n} \max \left| \int_{x_0}^{x} [f_k(x, y_1,\ldots,y_n) - f_k(x, z_1,\ldots,z_n)].dx \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \max \left| \int_{x_0}^{x} |f_k(x, y_1,\ldots,y_n) - f_k(x, z_1,\ldots,z_n)|.dx \right| \leq \sum_{k=1}^{n} \max \left| \int_{x_0}^{x} L.\sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i| dx \right| \leq$$

$$\leq n.\max \left| \int_{x_0}^{x} L.\sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i|.dx \right| \leq n.L.\max \sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i| \left| \int_{x_0}^{x} dx \right| = n.L.|x - x_0|.\sum_{i=1}^{n} \max |y_i - z_i| =$$

$$= n.L.s_0 \sum_{i=1}^{n} \max |y_i - z_i| = n.L.s_0.d(Y, Z)$$

Como ha de ser $0 < L.n.s_0 < 1$, y puesto que es positiva, será: $s_0 < \dfrac{1}{nL}$.

En definitiva, el intervalo en el que existe y es única la solución del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias es $[x_0 - s_0, x_0 + s_0]$, debiendo verificarse la condición:

$$s_0 < \min\left(a, \frac{b_i}{M_m}, \frac{1}{nL}\right), i = 1,\ldots,n$$

**6. Bibliografía:**

APÓSTOL, T. M.; Calculus. Edit. Reverté, Barcelona, 1965.
AYRES, F.; Ecuaciones Diferenciales. Mc Graw-Hill, 1991
BASS, J.; Curso de Matemáticas. Toray-Masson, 1971
BURKILL, J.C.; Teoría de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Edit. Dossat, Madrid, 1969.
CASTRO, A. de; Complementos de Matemáticas. SAETA, Madrid, 1970
DIEUDONNÉ, J.; Fundamentos de Análisis Moderno, Editorial Reverté, Barcelona, 1976.
DOU, A.; Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Dossat, Madrid, 1970
ELGOLTZ, L.; Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional. Editorial Mir, Moscu,1983
GRANAS, Andrzej-DUGUNDJI, James; *Fixed Point Theory, Edit. Springer-Verlag, Nueva York, 2003.*
NAGLE, R.K. ; SAFF, E.B.; Fundamentos de Ecuaciones diferenciales. Wilmington, Addison-Wesley Iberoamericana.
PONTRIGUIN, L.S.; Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Editorial Mir, Moscu, 1981
RODRÍGUEZ VIDAL,R.; Ecuaciones Diferenciales y temas afines. Vicens-Vives. Barcelona, 1972.
SIMMONS, F.; Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas. Mc Graw-Hill, 1993.
ZILL, D.G.; CULLEN M.R.; Ecuaciones Diferenciales con problemas de valores en la frontera. México, International Thomson Editores, 2001