

¿QUÉ ES LA TOPOLOGÍA?

MARTA MACHO STADLER (*)

... Además de aquella parte de la geometría que trata sobre cantidades y que se ha estudiado en todo tiempo con gran dedicación, el primero que mencionó la otra parte, hasta entonces desconocida, fue G. Leibniz, el cual la llamó geometría de la posición. Leibniz determinó que esta parte se tenía que ocupar de la sola posición y de las propiedades provenientes de la posición en todo lo cual no se ha de tener en cuenta las cantidades, ni su cálculo... Por ello, cuando recientemente se mencionó cierto problema que parecía realmente pertenecer a la geometría, pero estaba dispuesto de tal manera que ni precisaba la determinación de cantidades ni admitía solución mediante el cálculo de ellas, no dudé en referirlo a la geometría de la posición...

L. Euler.

La topología es probablemente la más joven de las ramas clásicas de las matemáticas. En contraste con el álgebra, la geometría y la teoría de los números, cuyas genealogías datan de tiempos antiguos, la topología aparece en el siglo diecisiete, con el nombre de *analysis situs*, ésto es, *análisis de la posición*.

De manera informal, la topología se ocupa de aquellas propiedades de las figuras que permanecen invariantes, cuando dichas figuras son plegadas, dilatadas, contraídas o deformadas, de modo que no aparezcan nuevos puntos, o se hagan coincidir puntos diferentes. La transformación permitida presupone, en otras palabras, que hay una correspondencia biunívoca entre los puntos de la figura original y los de la transformada, y que la deformación hace corresponder *puntos próximos a puntos próximos*. Esta última propiedad se llama *continuidad*, y lo que se requiere es que la transformación y su inversa sean ambas continuas: así, trabajarnos con *homeomorfismos*.

El topólogo considera los mismos objetos que el geómetra, pero de modo distinto: no se fija en las distancias o los ángulos, ni siquiera de la alineación de los puntos. Para el topólogo un círculo es equivalente a una elipse; una bola no se distingue de un cubo: se dice que la bola y el cubo son objetos *topológicamente equivalentes*, porque se pasa de uno al otro mediante una transformación continua y reversible.

El objetivo de este texto es indicar algunos de los problemas que estudia la topología y la noción de *invarianza topológica*. Tras una breve revisión histórica de los hechos cruciales en la evolución de la topología, se estudian de manera *muy intuitiva* tres teorías topológicas:

- la teoría de **grafos**, insistiendo en dos ejemplos clásicos, *el problema de los siete puentes de Königsberg* y, el teorema de los cuatro colores que parecen un juego de niños, pero que involucran en su resolución complicadas teorías matemáticas;
- la teoría de **nudos**, con sorprendentes aplicaciones en Biología Molecular, Física,...
- la teoría de **superficies**, apartado desarrollado con más rigor matemático que los anteriores: se trata aquí de **clasificar** todas las superficies compactas... y clasificar es el objeto central de la Topología.

(*) Profesora de la Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea

1. UN POCO DE HISTORIA

En 1679, G. Leibniz (1646-1716) publica su famoso libro *Characteristica Geometrica*, en el cual (en términos modernos) intenta estudiar más las propiedades topológicas que las puramente métricas de las figuras. Insiste en que, aparte de la representación coordinada de figuras, “se necesita de otro análisis, puramente geométrico o lineal, que también defina la posición (situs), como el álgebra define la magnitud”.

Los matemáticos en el siglo XVIII muestran poco interés en topología, con la excepción de L. Euler (1707-1783) cuyo genio comprende todas las matemáticas. En 1736, Euler publica un artículo con la solución al famoso *Problema de los puentes de Königsberg*, titulado “Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis”. El título ya indica que Euler es consciente de que está trabajando con una clase diferente de matemática, en la que la geometría ya no es importante.

El siguiente paso en esta *liberación* de la matemática también se debe a Euler. En 1750 escribe una carta a C. Goldbach (1690-1764) en la que da la famosa *fórmula de Euler* para un poliedro: $v - l + c = 2$, donde v es el número de vértices del poliedro, l es el número de aristas y c el número de caras. Esta fórmula, de asombrosa simplicidad, parece que fue olvidada por Arquímedes (287 AC - 212 AC) y R. Descartes (1596-1650), aunque los dos escribieron extensamente sobre poliedros. La razón debe ser que, para todo el mundo antes de Euler, parecía imposible pensar en propiedades geométricas sin que la medida estuviera involucrada. Euler publica los detalles de esta fórmula en 1752 en dos artículos, donde da una demostración basada en la disección de sólidos en *rodajas tetraédricas*. Euler pasa por alto algunos problemas en su prueba; por ejemplo, supone que los sólidos son convexos.

A.J. Lhuillier (1750-1840) continúa el camino iniciado por Euler con su fórmula poliédrica. En 1813, Lhuillier publica un importante trabajo, donde indica que la fórmula de Euler es falsa para sólidos con asas sobre ellos: si un sólido tiene g asas (un asa es un toro adjuntado al espacio mediante *suma conexa*), Lhuillier prueba que la fórmula se escribe $v - l + c = 2 - 2g$. Este es el primer resultado conocido sobre *invariantes topológicos*.

A.F. Möbius (1790-1868) publica una descripción de la banda que lleva su nombre en 1865. Intenta escribir la propiedad de *una única cara* de la banda en términos de no orientabilidad.

J.B. Listing (1802-1882) es el primero en usar la palabra *topología*. Sus ideas topológicas se deben principalmente a su maestro C.F. Gauss (1777-1855). Listing escribe un artículo en 1847 llamado “Vorstudien zur Topologie” y en 1861, publica otro artículo, en el cual describe la banda de Möbius (cuatro años antes que Möbius) y estudia la noción de *conexión* de las superficies. Listing no es el primero en examinar las componentes conexas de las superficies; B. Riemann (1822-1866) estudia este concepto en 1851 y de nuevo en 1857 cuando introduce *las superficies de Riemann*.

C. Jordan (1838-1922) publica en 1882 su *Cours d'Analyse*, que contiene pruebas rigurosas de resultados topológicos intuitivamente obvios sobre curvas en el plano, introduciendo además otro método para estudiar la conexión de las superficies.

Listing examina la conexión en el espacio euclídeo de dimensión tres, pero E. Betti (1823-1892) extiende estas ideas a dimensiones arbitrarias.

La idea de conexión es descrita con rigor por H. Poincaré (1854-1925) en una serie de artículos bajo el título de “Analysis situs” en 1895. Poincaré introduce el concepto de *homología* y da una definición precisa de los *números de Betti* asociados a un espacio. E. de Jonquières (1820-1901) generaliza en 1890 la fórmula para poliedros convexos de Euler a poliedros no

necesariamente convexos. Así mismo, en relación con la conexión, Poincaré introduce el concepto de *grupo fundamental* de una variedad y la noción de *homotopía*.

Un segundo camino en el cual se desarrolla la topología es a través de la generalización de ideas de *convergencia*. Este proceso se inicia en realidad en 1817 cuando B. Bolzano (1781-1848) asocia la convergencia con un subconjunto acotado infinito de números reales, en vez de pensar exclusivamente en convergencia de sucesiones de números.

G. Cantor (1845-1918) introduce en 1872 el concepto de conjunto *derivado* (o familia de puntos límite) de un conjunto. Define los subconjuntos *cerrados* de la recta real como aquellos conteniendo a su conjunto derivado, e introduce la idea de conjunto *abierto*, un concepto clave en la topología de conjuntos. Y se define el concepto de *entorno de un punto*.

En 1906, M. Fréchet (1878-1973) llama a un espacio *compacto* si cada subconjunto infinito acotado contiene un punto límite (es decir, en el derivado). Fréchet es capaz de extender la noción de convergencia de un espacio euclídeo, definiendo los *espacios métricos*. Prueba que los conceptos de abierto y cerrado de Cantor se extienden naturalmente a espacios métricos.

En el Congreso Internacional de Matemáticos de Roma de 1909, F. Riesz (1880-1956) propone un nuevo acercamiento axiomático a la topología, basado en una definición conjuntista de puntos límite, sin un concepto de distancia subyacente. Unos cuantos años más tarde, en 1914, F. Hausdorff (1868-1942) define los entornos a través de cuatro axiomas, de nuevo sin consideraciones métricas. Este trabajo de Riesz y Hausdorff realmente da lugar a la definición de espacio topológico abstracto.

Hay una tercera vía en la que los conceptos topológicos entran en las matemáticas, a saber, a través del análisis funcional. Esta es un área que surge de la física matemática y la astronomía, debido a que los métodos del análisis clásico eran inadecuados al abordar algunos tipos de problemas.

J. Hadamard (1865-1963) introduce la palabra *funcional* en 1903 cuando estudia los funcionales lineales F de la forma

$$F(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) g_n(x) dx.$$

Fréchet continúa el desarrollo de esta teoría, definiendo la derivada de un funcional en 1904.

E. Schmidt (1876-1959) examina en 1907 la noción de convergencia en espacios de funciones; la distancia se define a través de un producto interior. S. Banach (1892-1945) realiza un paso posterior en la abstracción en 1932, cuando pasa de los espacios con producto interior a los espacios normados.

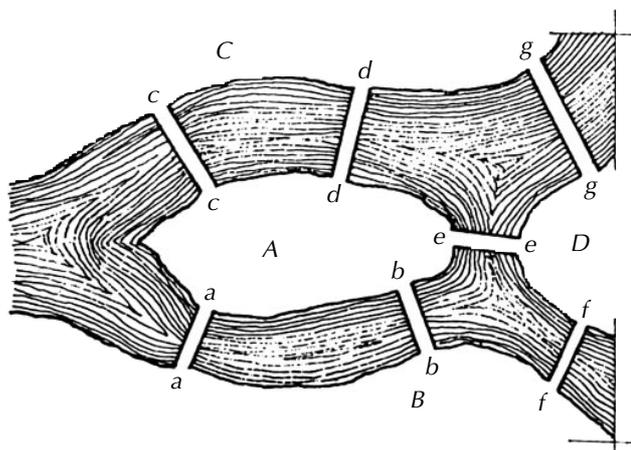
Poincaré desarrolla muchos de sus métodos topológicos cuando estudia ecuaciones diferenciales ordinarias que provienen del estudio de ciertos problemas astronómicos. Esta colección de métodos se transforma en una completa teoría topológica en 1912, con los estudios de L.E.J. Brouwer (1881-1966).

2. LA TEORÍA DE GRAFOS

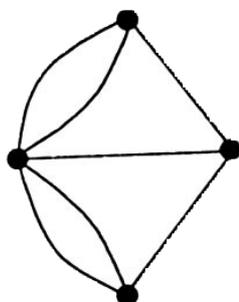
El estudio de grafos está ligado habitualmente a la topología. Un *grafo* es sencillamente un conjunto de puntos, los *vértices*, algunos de los cuales están ligados entre ellos por medio de líneas, las *aristas*. La naturaleza geométrica de estos arcos no tiene importancia, sólo cuenta la manera en la que los vértices están conectados.

2.1 El problema de los siete puentes de Königsberg

En 1700, los habitantes de Königsberg (hoy en día Kaliningrado, Rusia), se preguntaban si era posible recorrer esta ciudad pasando una vez y sólo una por cada uno de los puentes sobre el río Pregel, y volviendo al punto de partida. En aquella época, Königsberg tenía siete puentes (a , b , c , d , e , f y g en la figura) uniendo las cuatro partes de la ciudad (A , B , C y D) separadas por las aguas, y dispuestas como se indica:



En 1736 Euler probó que la respuesta era negativa, usando un grafo: se dibujan sobre una hoja de papel cuatro vértices que simbolizan las cuatro partes separadas de la ciudad, después se trazan entre estos vértices las aristas, simbolizando los puentes:



Un grafo se llama *conexo* si existe un camino ligando cada par de vértices. Un camino sobre un grafo se llama *euleriano*, si pasa por cada arista exactamente una vez. Un *circuito* es un camino cerrado. El *grado de un vértice* es el número de aristas que llegan al él. Teniendo en cuenta estas definiciones, Euler demuestra:

Teorema de Euler. *Existe un circuito euleriano en un grafo si y sólo si el grafo es conexo y cada vértice tiene grado par.*

Es bastante fácil comprender ahora la razón por la que el problema de los siete puentes de Königsberg no tiene solución: un paseante que llega a uno de los cuatro barrios de la ciudad debe forzosamente irse y tomando un puente diferente. En el grafo, esto se traduce por el hecho de que cada vértice debe estar asociado a un número par de aristas. Pero, la configuración de los puentes de Königsberg no verifica obviamente esta condición, probada por Euler como necesaria y suficiente.

2.2 EL TEOREMA DE LOS CUATRO COLORES

F. Guthrie (1831-1899) plantea en 1852 la siguiente conjetura: *para colorear cualquier mapa geopolítico plano (suponiendo cada país formado por un único trozo), de tal modo que dos países con frontera común sean de distinto color, basta (como máximo) con cuatro colores.*

A.B. Kempe (1849-1922) publica una demostración de la conjetura en 1879. Esta prueba es en principio aceptada, hasta que P. Heawood (1861-1955) descubre en 1890 un error en la demostración de Kempe. Sin embargo, Kempe desarrolla en su prueba el llamado *método de las cadenas de Kempe* (basado en teoría de grafos), que contiene las ideas básicas que se usarán después para la prueba definitiva de la conjetura. Heawood sigue trabajando en el problema pero no lo soluciona, aunque consigue probar que con cinco colores si se puede colorear cualquier mapa. También se sabe que tres colores no son suficientes, de modo que sólo queda por confirmar o refutar la conjetura de los cuatro colores.

En 1976, K. Appel y W. Haken (Universidad de Illinois) dan una prueba del teorema, demostrando mediante un complicado programa de ordenador que, efectivamente, cuatro colores son suficientes para colorear cualquier mapa plano. Algunos matemáticos tienen muchas reservas con respecto a esta demostración. Pero, en 1996, N. Robertson, D. P. Sanders, P. Seymour y R. Thomas (Georgia Institute of Technology), publican una nueva prueba, sin los inconvenientes de la demostración de Appel y Haken. El teorema de los cuatro colores es igualmente cierto para mapas dibujados sobre una esfera. Al contrario, sobre un toro, pueden ser necesarios hasta siete colores.

¿Cuál es la relación con la teoría de grafos? Si se elige un punto en cada país representado y se traza una línea uniendo dos puntos cada vez que correspondan a dos países adyacentes, se obtiene un grafo. El problema del coloreado consiste entonces en atribuir un color a cada vértice del grafo, de manera que dos vértices conectados tengan siempre un color diferente.

2.3 ALGUNAS OTRAS APLICACIONES

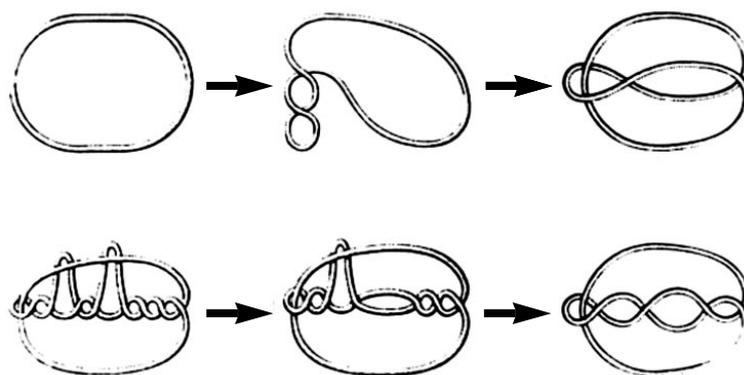
Los grafos no sólo interesan a los matemáticos puros. Se usan también para representar circuitos eléctricos, para realizar cálculos teóricos relativos a partículas elementales, ... La teoría de grafos tiene igualmente una importancia económica directa, por sus numerosas aplicaciones en investigación operativa. Por ejemplo, para determinar el trayecto óptimo (el menos costoso, el más rápido) de camiones que deben repartir y recoger productos a numerosos clientes esparcidos por todo el país, la red de carreteras puede modelizarse por un grafo, cuyas aristas son las carreteras de una ciudad a otra, a cada arista se le asocian varios números (longitud del camino correspondiente, tiempo de recorrido, coste del peaje, ...). Usando cálculos y algoritmos a veces complejos, se determinan una o varias soluciones, y se trata entonces de encontrar la mejor de ellas.

3. LA TEORÍA DE NUDOS

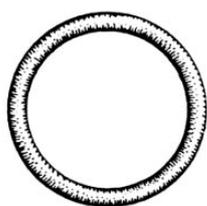
La técnica de tejido, que precisa cruces y anudados de hilos, se conoce ya en el neolítico. Aún en épocas anteriores, existen ya métodos que permiten unir una lámina de sílex a su mango, con tripas, nervios de animales o fibras vegetales. Lamentablemente, la descomposición de todas estas ligaduras orgánicas no permitirá nunca conocer con precisión la edad de los primeros nudos... En la época actual, los marinos se han apropiado de esta técnica, esencial para su trabajo. En 1944, el pintor C.W. Ashley (1881-1947) describe y dibuja en su libro *The Ashley Book of Knots* exactamente 3.854 nudos.

Los nudos están presentes en ámbitos tan dispares como la decoración, la industria textil, la magia, el alpinismo o la cirugía. Su estudio matemático permite en la actualidad ver su relación con la física, la química o la biología molecular.

Para el matemático, un *nudo* es una curva continua, cerrada y sin puntos dobles. Esta curva está situada en un espacio de dimensión tres y se admite que pueda ser deformada, estirada, comprimida, pero está prohibido hacer cortes. Cuando se puede, a través de manipulaciones de este tipo (es decir, por medio un *homeomorfismo*) pasar de un nudo a otro, se dice que son *equivalentes*. En general, es muy difícil decidir cuando dos nudos son equivalentes, y gran parte de la teoría de nudos está precisamente dedicada a intentar resolver esa cuestión. Por ejemplo, el nudo trivial (no hay nudo) equivale a este otro de apariencia complicada:



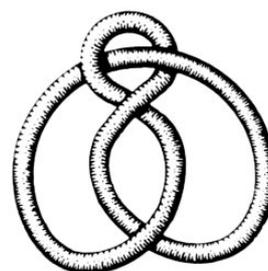
Los nudos están catalogados teniendo en cuenta su complejidad. Una medida de la complejidad es el *número de cruce*, es decir, el número de puntos dobles en la proyección plana más simple del nudo. El nudo trivial tiene número de cruce cero. El trébol y la figura de ocho son los únicos nudos con número de cruce tres y cuatro, respectivamente.



Nudo trivial



Nudo trébol



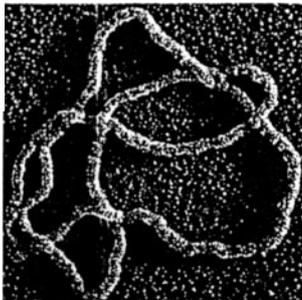
Nudo figura de ocho

Hay dos nudos con número de cruce cinco, tres con seis y siete con número de cruce siete. Pero el número crece *radicalmente*: hay 12.965 nudos con trece o menos cruces en una proyección minimal, y 1.701.935 con dieciseis o menos cruces...

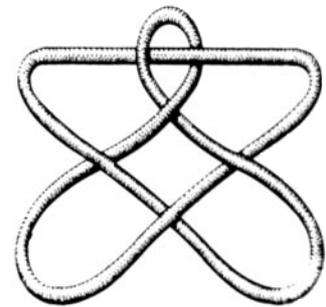
Los nudos se pueden sumar, restar, multiplicar e incluso dividir (el álgebra de los nudos). Pero cuando los nudos se complican, su simple descripción no basta para distinguirlos. Así, partiendo de su forma (la geometría del nudo), se han desarrollado fórmulas que funcionan para todos los nudos, hay invariantes topológicos que se obtienen al estudiar el complementario del nudo...

3.1 APLICACIONES EN BIOLOGÍA MOLECULAR

El ADN, el material genético más importante en la mayoría de los organismos, se ve habitualmente como una *doble hélice*, en la que dos cadenas de nucleótidos complementarios se enrollan a lo largo de un eje común. El eje de esta hélice doble no es lineal, sino curvo. La doble hélice puede moverse en el espacio para formar una nueva hélice de orden mayor; en este caso se habla de ADN *sobreenrollado*. Parece que una gran parte de los ADN conocidos se muestran de esta manera sobreenrollada en algún momento del ciclo de su vida. El ADN circular sobreenrollado es una doble hélice de moléculas, donde cada cadena de polinucleótidos forma un anillo. Cada propiedad física, química y biológica del ADN (comportamiento hidrodinámico, enérgico, ...) es afectado por la circularidad y las deformaciones asociadas al sobreenrollamiento.



Fotografía ADN



Nudo que la representa

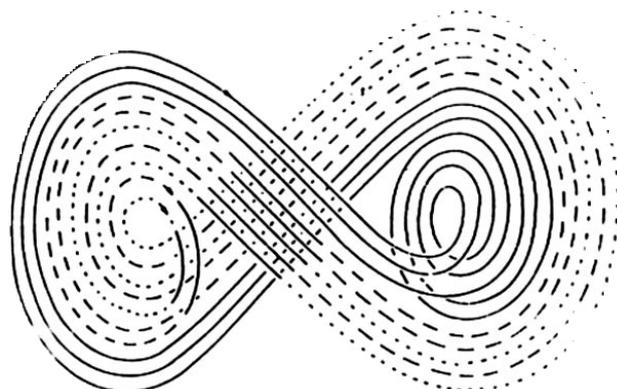
La comprensión del mecanismo del sobreenrollamiento y las consecuencias de estas características estructurales para el ADN, es un problema matemático bastante complejo, que hace intervenir dos ramas de la matemática: la topología y la geometría diferencial. Para estudiar matemáticamente el sobreenrollamiento, hay que construir un modelo en el que la estructura se represente como un estrecho lazo torcido de espesor infinitesimal. Por ello, es necesario describir los nudos, encontrar características esenciales que permitan distinguirlos, en otras palabras, clasificarlos sin riesgo a confusión. Estas características, que deben permanecer inalterables a lo largo de la deformación del nudo, se llaman *invariantes del nudo*.

En el estudio de la replicación del ADN celular, se encuentran *sacos de nudos*. El ADN está más o menos enrollado sobre sí mismo y en el momento de la replicación se forman nudos que están controlados por proteínas que se llaman topoisomerasas. Conociendo mejor estas proteínas y su interacción con el ADN, se abren nuevas perspectivas en la lucha contra las enfermedades genéticas, los virus, las bacterias o el cáncer.

3.2 OTRAS APLICACIONES EN CIENCIA

Estudios recientes de las ecuaciones que determinan flujos (como el de la atmósfera alrededor de nuestro planeta) muestran como las partículas pueden moverse en complicados caminos de nudos.

Combinando la teoría de nudos con la *teoría física de cuerdas*, se ha podido dar una descripción unificada de las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza: gravedad, electromagnetismo, y las interacciones fuertes y débiles entre partículas.



Los químicos crean en el laboratorio moléculas anudadas, cuyas propiedades les permiten modificar su forma o desplazarse en función de factores eléctricos, químicos o luminosos, decididos por la persona que dirige la experiencia. Estas nuevas moléculas se parecen en algunas ocasiones a aquellas que, en la naturaleza, estuvieron en el origen de la vida. Otras, permiten imaginar memorias para futuros *ordenadores moleculares* y ya no electrónicos.

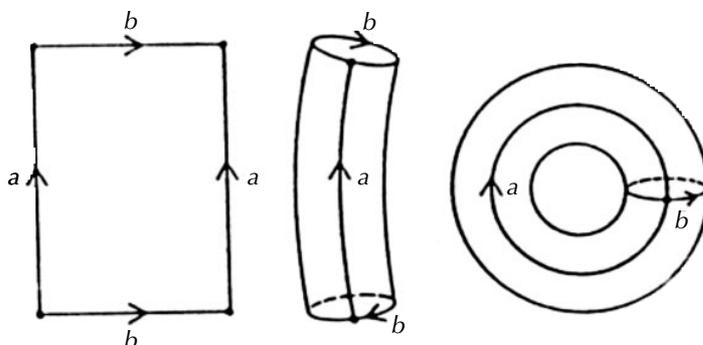
4. CLASIFICACIÓN TOPOLÓGICA DE SUPERFICIES COMPACTAS

Los topólogos están particularmente interesados en el estudio de *variedades*, nombre que sugiere *multiplicidad de formas*. Un balón de fútbol, por ejemplo, es una variedad de dimensión 2, es *topológicamente* una esfera S^2 : lo podemos manipular como queramos, pero sin romperlo, y seguirá siendo un balón de fútbol.

Una *superficie topológica* es una variedad de dimensión 2, es decir, un espacio en el que cada punto posee un entorno homeomorfo a $B^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, la bola abierta euclídea. Así, se trata de un espacio modelado por el plano euclídeo \mathbb{R}^2 .

Los primeros ejemplos de superficies son el plano \mathbb{R}^2 , la esfera S^2 y el toro T^2 .

La descripción de las superficies no compactas es muy complicada; aquí, vamos a clasificar únicamente las *superficies compactas* (es decir, cerradas y acotadas). Para su estudio, es conveniente tener una manera uniforme de representarlas. El prototipo es el toro T^2 , que se define como el cociente del cuadrado $[0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$, identificando aristas por pares siguiendo la regla $(0, t) \sim (1, t)$ y $(t, 0) \sim (t, 1)$, si $0 \leq t \leq 1$:



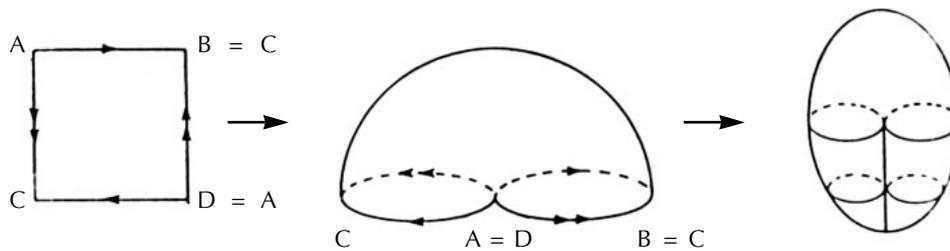
Nuestro objetivo es precisamente probar que toda superficie compacta se puede representar como el cociente de una región poligonal en el plano por una relación de equivalencia que identifica los lados a pares. Como ejemplos básicos, tenemos:

LEMA 1

La esfera $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ es homeomorfa al cociente del cuadrado $[0,1] \times [0,1]$, por la relación de equivalencia $(0,t) \sim (t,0)$ y $(1,t) \sim (t,1)$, si $0 \leq t \leq 1$.

LEMA 2

El plano proyectivo real \mathbb{RP}^2 (que se define como el cociente de la esfera S^2 , obtenido tras identificar puntos antipodales) es homeomorfo al cociente del cuadrado $[0,1] \times [0,1]$, por la relación de equivalencia $(0,t) \sim (1,1-t)$ y $(t,1) \sim (1-t,0)$, si $0 \leq t \leq 1$.



Una *región poligonal* P en el plano es un conjunto compacto, cuya frontera topológica es unión de una familia finita de segmentos cerrados llamados *aristas*, con puntos finales denominados *vértices*, tales que:

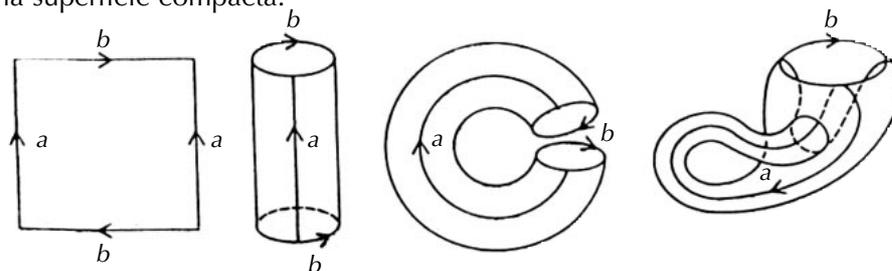
- (i) para cada punto q (que no sea un vértice) en una arista, existe un entorno U en \mathbb{R}^2 , tal que $P \cap U = U \cap H$, donde $H = \{(x, y) : ax + by + c \geq 0\}$ es un semiplano cerrado;
- (ii) cada vértice v posee un entorno V en \mathbb{R}^2 , tal que $P \cap V = V \cap \hat{H}$, donde \hat{H} son dos semiplanos cerrados cuyas fronteras se cortan en v .

La importancia del siguiente resultado es que, en muchas ocasiones, es más sencillo manipular objetos (curvas, funciones, ...) sobre una región poligonal que sobre la propia superficie.

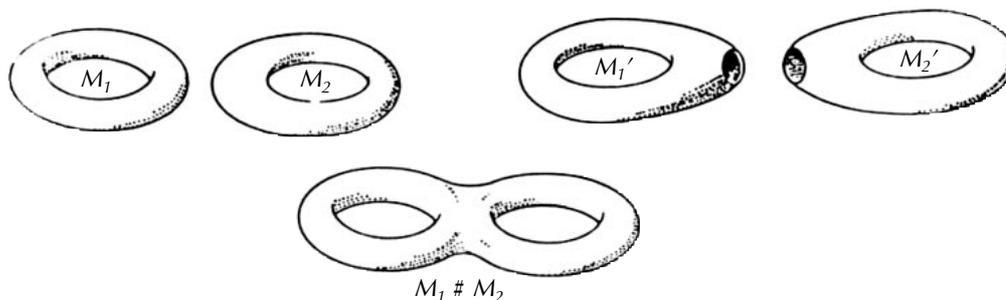
PROPOSICIÓN 1 (REPRESENTACIÓN PLANA DE UNA SUPERFICIE COMPACTA)

Sea P una región poligonal en el plano con un número par de aristas y sea \sim una relación de equivalencia que identifica cada arista con exactamente otra, por medio de un homeomorfismo lineal que envía los puntos finales de una arista en los puntos finales de la otra. El cociente resultante es una superficie compacta.

La *botella de Klein* \mathbb{K}^2 se define como el cociente de $[0,1] \times [0,1]$ por la relación de equivalencia \approx que identifica $(0, t) \approx (1, t)$ y $(t, 1) \approx (1-t, 0)$, si $0 \leq t \leq 1$. Para visualizarlo, se debe pensar primero en pegar las aristas izquierda y derecha para formar un cilindro, y después pasar la tapa superior del cilindro a través de su pared, con el fin de pegar el círculo superior con el inferior *desde dentro*. Desde luego, ésto no puede realizarse con un modelo físico; de hecho la superficie de Klein no es un subespacio de \mathbb{R}^3 . Sin embargo, la proposición 1 prueba que es una superficie compacta.



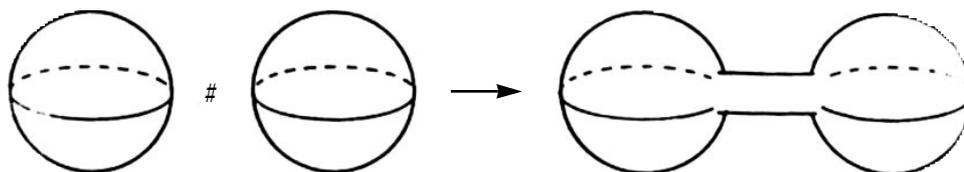
Para construir otros ejemplos, vamos a introducir una manera estándar de *fabricar* superficies compactas, *pegando* otras más sencillas. Haremos lo que en topología se denomina *cirugía*: sean M_1 y M_2 dos superficies compactas y conexas (es decir, *de una pieza*). Eliminamos una pequeña bola abierta de cada una de las superficies y pegamos los espacios resultantes, a través de las circunferencias frontera. El espacio resultante $M_1 \# M_2$ se llama *suma conexa* de M_1 y M_2 .



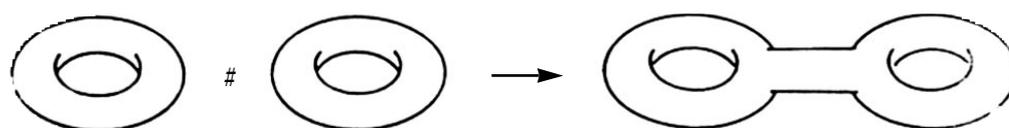
Se puede probar que la suma conexa no depende de las elecciones de las bolas eliminadas de cada una de las superficies, con lo que se trata de una operación bien definida. Es fácil probar que $M_1 \# M_2$ sigue siendo una superficie compacta y conexa.

Los siguientes son ejemplos sencillos de sumas conexas:

- (i) si M es una superficie, $M \# S^2$ es homeomorfa a M :



- (ii) la suma conexa $T^2 \# \dots \# T^2$ es *el toro de n agujeros* o *esfera de n asas*; esta última nomenclatura se debe a que, de hecho, esta superficie es homeomorfa a la suma conexa $S^2 \# T^2 \# \dots \# T^2$, y cada toro añadido parece un asa *pegada* a la *esfera base*.



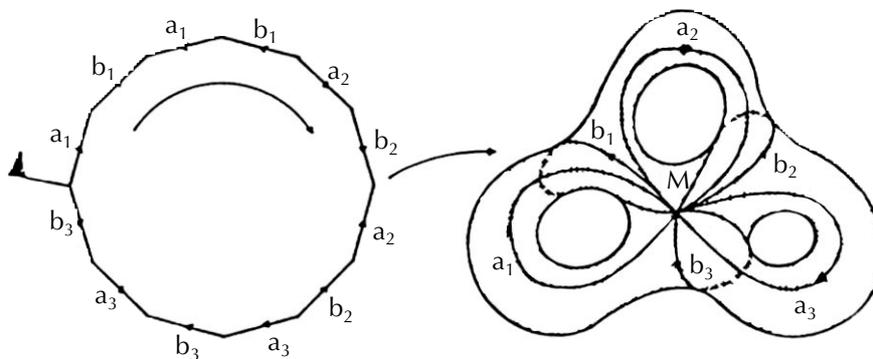
Como hemos mencionado antes, para dar el teorema de clasificación de superficies compactas precisamos una manera uniforme de describir tales objetos. Vamos a representar todas estas superficies como cocientes de regiones poligonales con $2n$ lados. De manera informal, podemos describir cada relación de equivalencia entre aristas, nombrando las aristas con letras a_1, \dots, a_n y dibujando sobre cada una de ellas una flecha *apuntando* hacia uno de sus vértices, de modo que los vértices con el mismo nombre se identifican, con las flechas indicando el modo en que las aristas se *pegan*. Con una tal *denominación* para un polígono, le asociamos una sucesión de símbolos, obtenidos al leer las etiquetas de los bordes en el sentido de las agujas del reloj: para cada símbolo a_i en la frontera, escribimos a_i en la sucesión si la flecha posee el sentido de las agujas del reloj y ponemos a_i^{-1} si la flecha va en el sentido contrario a las agujas del reloj. Por ejemplo, la relación de equivalencia de $[0,1] \times [0,1]$ que da lugar al toro, resulta en una sucesión de símbolos $aba^{-1}b^{-1}$.

Formalmente, una *presentación de una superficie* es un par, $(a_1, \dots, a_n \mid W_1, \dots, W_k)$, que consiste en una familia finita de símbolos $\{a_1, \dots, a_n\}$ y otro conjunto finito de *palabras* $\{W_1, \dots, W_k\}$ cada una de las cuales es una sucesión finita de elementos, que pueden ser a_i ó a_i^{-1} (donde $(a_i^{-1})^{-1} = a_i$), para algún a_i en la lista, de tal manera que:

- (1) cada símbolo a_i ocurre exactamente un número par de veces en W_1, \dots, W_k (contando ambos a_i ó a_i^{-1} como una aparición);
- (2) cada palabra W_j posee longitud (número de letras) tres al menos, salvo en el caso en que la presentación completa tenga sólo una palabra, en cuyo caso, a la palabra simple se le asigna la longitud dos.

Una presentación determina un espacio topológico con la siguiente receta

- (1) se asocia a cada palabra W_j un polígono convexo P_j de k_j lados en el plano, donde k_j es la longitud de W_j , y donde los polígonos elegidos son disjuntos (en el caso especial de $k_j = 2$, se usa en su lugar un disco cerrado, porque no existe un polígono de dos caras, y se consideran las aristas como los semicírculos izquierdo y derecho);
- (2) se define una correspondencia uno a uno entre las letras de W_j y las aristas de P_j , siguiendo el orden de las agujas del reloj, empezando por una arista arbitraria;
- (3) se identifica cada par de aristas que tienen el mismo símbolo, de acuerdo con el homeomorfismo afín que pega los primeros vértices en orden de las agujas del reloj, si dos aristas tienen la misma etiqueta a_i ó a_i^{-1} , y que casa el primer vértice de una con el segundo vértice de la otra si las aristas están etiquetadas a_i ó a_i^{-1} .



Por la proposición 1, el espacio topológico resultante es una superficie compacta. Los interiores, aristas y vértices de los polígonos P_j se llaman *caras*, *aristas* y *vértices* de la presentación. El número de caras es el mismo que el número de palabras, la cantidad de aristas de la presentación es el doble que el número de símbolos a_1, \dots, a_n . Para una arista etiquetada a_i , *el vértice inicial* es el primero siguiendo el orden de las agujas del reloj, y *el vértice final* es el otro; para una arista etiquetada a_i^{-1} , estas definiciones se invierten. En términos de nuestra descripción informal de antes, si se etiqueta cada arista con una flecha apuntando en el sentido de las agujas del reloj, cuando el símbolo es a_i , y en sentido contrario a las agujas del reloj, cuando es a_i^{-1} , la flecha va del vértice inicial al vértice final.

Las únicas elecciones arbitrarias involucradas en esta construcción son formas, tamaños y ubicaciones de los polígonos y la decisión de cual es la primera arista (para seguir luego, a partir de ella, el orden de las agujas del reloj); es fácil ver que, diferentes elecciones en este sentido, dan lugar a superficies homeomorfas.

Las siguientes superficies están determinadas por las presentaciones indicadas:

- (1) la esfera S^2 : $(a \mid aa^{-1})$ ó $(a,b \mid aa^{-1}bb^{-1})$;
- (2) el toro T^2 : $(a,b \mid aba^{-1}b^{-1})$;
- (3) el plano proyectivo RP^2 : $(a \mid aa)$ ó $(a,b \mid abab)$;
- (4) la botella de Klein K^2 : $(a,b \mid aba^{-1}b)$.

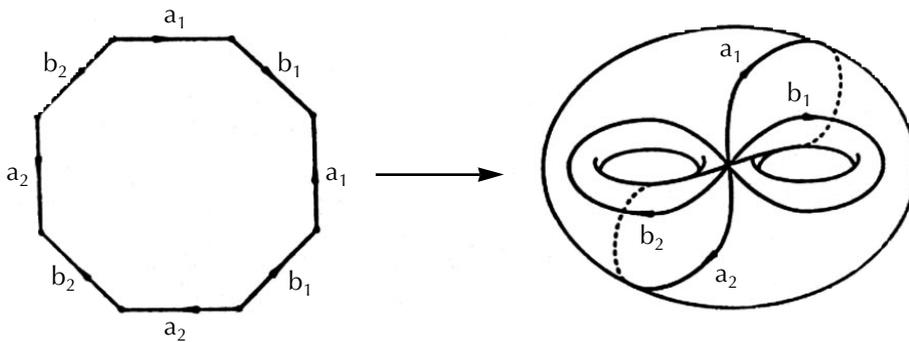
Ahora vamos a describir las presentaciones estándar de superficies formadas por suma conexa. La clave es la siguiente proposición:

Proposición 2

Sean M_1 y M_2 superficies definidas por presentaciones $(a_1, \dots, a_n \mid W_1)$ y $(b_1, \dots, b_m \mid W_2)$ respectivamente. Entonces, la suma conexa $M_1 \# M_2$ tiene como presentación $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \mid W_1W_2)$, donde W_1W_2 indica la palabra formada a concatenar W_1 y W_2 .

Se tienen las siguientes presentaciones, llamadas estándar:

- (1) el toro con n agujeros: $(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \mid a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_nb_n a_n^{-1}b_n^{-1})$



- (2) la suma conexa de n copias de RP^2 : $(a_1, \dots, a_n \mid a_1 a_1 \dots a_n a_n)$

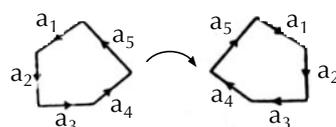
Hay ciertas reglas para transformar presentaciones de superficies en otras diferentes de la misma superficie (bajo homeomorfismo). Se dice que dos presentaciones son *equivalentes*, si determinan superficies homeomorfas.

Proposición 3

Las siguientes operaciones sobre una presentación producen presentaciones equivalentes:

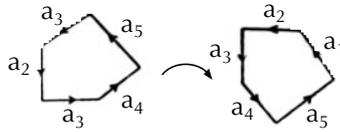
Renombramiento: cambiar las ocurrencias de un símbolo a_i , por un nuevo símbolo, aún no existente en la presentación; intercambiar todas las ocurrencias de dos símbolos a_i y a_j o intercambiar todas las ocurrencias de a_i y a_i^{-1} , para algún i ;

Reflejo: $(a_1, \dots, a_n \mid a_1 \dots a_m, W_2, \dots, W_k) \rightarrow (a_1, \dots, a_n \mid a_m^{-1} \dots a_1^{-1}, W_2, \dots, W_k)$;



Rotación:

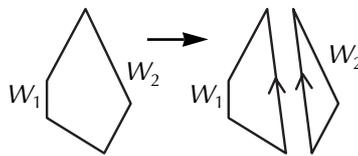
$$(a_1, \dots, a_n \mid a_1 a_2 \dots a_m, W_2, \dots, W_k) \rightarrow (a_1, \dots, a_n \mid a_2 \dots a_m a_1, W_2, \dots, W_k);$$



Corte:

si W_1 y W_2 son palabras con al menos longitud 2, entonces

$$(a_1, \dots, a_n \mid W_1 W_2) \rightarrow (a_1, \dots, a_n, c \mid W_1 c, c^{-1} W_2);$$

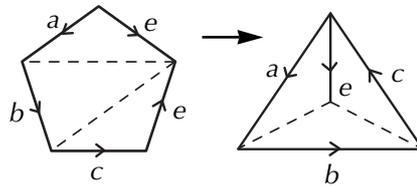


Pegado: $(a_1, \dots, a_n, c \mid W_1 c, c^{-1} W_2) \rightarrow (a_1, \dots, a_n \mid W_1 W_2);$

Doblado:

si W_1 y W_2 tienen ambas longitud al menos 2,

$$(a_1, \dots, a_n, a \mid W_1 a a^{-1} W_2) \rightarrow (a_1, \dots, a_n \mid W_1 W_2);$$

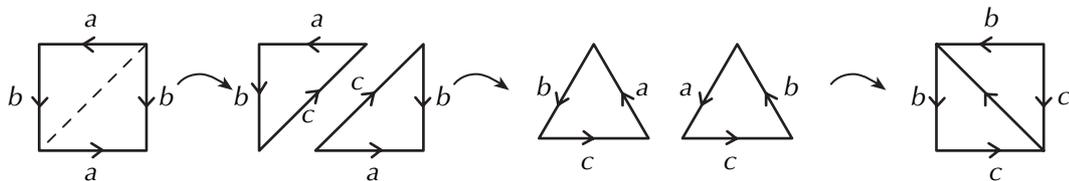


Utilizando las anteriores transformaciones, es fácil comprobar:

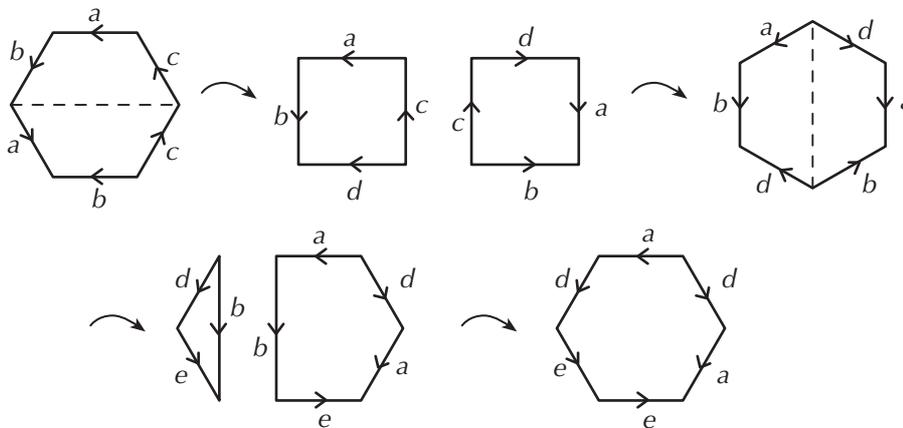
LEMA 3

Se verifican las propiedades:

- (1) la botella de Klein es homeomorfa a la suma conexa $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$;



(2) la suma conexa $T^2 \# RP^2$ es homeomorfa a $RP^2 \# RP^2 \# RP^2$.



Así, podemos enunciar el teorema de clasificación anunciado, que dice de manera informal, que toda superficie conexa y compacta es homeomorfa a una esfera con algunas *asas* (toros) y *bonetes cruzados* (planos proyectivos) *pegados*:

Teorema de clasificación de superficies compactas. *Sea M una superficie conexa y compacta. Entonces M es homeomorfa a una de las siguientes:*

- (1) una esfera S^2 ;
- (2) una suma conexa $T^2 \# \dots \# T^2$;
- (3) una suma conexa $RP^2 \# \dots \# RP^2$.

Para comprender mejor las superficies, hay ciertas características simples que capturan sus propiedades cualitativas esenciales: son sus *invariantes topológicos*, es decir, propiedades que se preservan bajo homeomorfismos. Aquí citamos dos de estos invariantes:

- *la orientabilidad*: una superficie es no orientable en cuanto posee algún bonete cruzado. Así, son orientables la esfera S^2 , el toro T^2 , el doble toro $T^2 \# T^2$. Y son no orientables el plano proyectivo RP^2 , la botella de Klein K^2 ,...
- *el género*, es decir, el número maximal de cortes sucesivos al cual se puede someter a la superficie sin que se desconecte. El género se *detecta* contando el número de asas (para superficies orientables) o de bonetes cruzados (para superficies no orientables). Si se corta una esfera siguiendo una curva cerrada simple, sea cual sea el aspecto de dicha curva, se obtendrán siempre dos trozos disjuntos: la esfera tiene género 0 (de otro modo, la esfera no posee asas). Pero si se corta un toro siguiendo ciertas curvas (por ejemplo, círculos paralelos y meridianos) la superficie seguirá de una única pieza: el toro tiene género 1 (de otro modo, el toro se obtiene al pegar un asa a la esfera). Del mismo modo, puede verse que el plano proyectivo tiene género 1, la botella de Klein tiene género 2, el doble toro tiene género 2,...

5. ALGUNAS DEFINICIONES EN TOPOLOGÍA

Para finalizar, se da un rápido repaso de algunos de los conceptos básicos que aparecen en estas líneas.

Una aplicación continua entre los espacios X e Y , es una aplicación $f: X \rightarrow Y$ que lleva puntos *cercanos* en puntos *cercanos*. El concepto de *cercanía* depende del espacio en el que se está trabajando; la idea intuitiva es que se trabaja con transformaciones que plegan, dilatan, contraen o deforman, sin *romper* los espacios involucrados.

Un homeomorfismo entre los espacios X e Y es una aplicación $f: X \rightarrow Y$ biyectiva, continua y tal que la inversa $f^{-1}: Y \rightarrow X$ es también continua. Un *invariante topológico* es cualquier propiedad de un espacio que se preserva bajo homeomorfismos.

Un espacio *conexo* es un espacio *de una sola pieza*.

Un espacio *compacto* es (al menos en el caso euclídeo) un espacio acotado y cerrado (es decir, que contiene a sus puntos límite).

Un *entorno* de un punto a en un espacio X es un conjunto de puntos *cercanos* a x . Por ejemplo, si $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, un entorno de a es un conjunto $N \subset \mathbb{R}^n$ tal que existe

$$\varepsilon > 0 \text{ y } B^n(a, \varepsilon) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : (a_1 - x_1)^2 + \dots + (a_n - x_n)^2 < \varepsilon^2\} \subset N.$$

Una *variedad de dimensión n* es un espacio en el que cada punto posee un entorno homeomorfo a $B^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1\}$: la bola abierta unidad en el espacio euclídeo de dimensión n , \mathbb{R}^n . Una *superficie* es una variedad de dimensión 2.

Una manera de construir superficies a partir de las superficies básicas conocidas, es a partir del proceso de *suma conexa*: dadas M_1 y M_2 dos superficies compactas y conexas, se elimina una pequeña bola abierta de cada una de las superficies y se pegan los espacios resultantes, a través de las circunferencias frontera; el espacio resultante $M_1 \# M_2$ es la suma conexa de M_1 y M_2 .

6. BIBLIOGRAFÍA

[AKL] A. D. Alexandrov, A.N. Kolmogorov, M.A. Laurentiev y otros; *Las matemáticas: su contenido, métodos y significado*, Alianza Editorial, 1985.

[B] S. Barr, *Expériences de Topologie*, Lysimaque, 1987.

[D] J. Dieudonné, *En honor del espíritu humano. Las matemáticas hoy*, Alianza Editorial, 1987.

[F] G.K. Francis, *A topological picture book*, Springer, 1987.

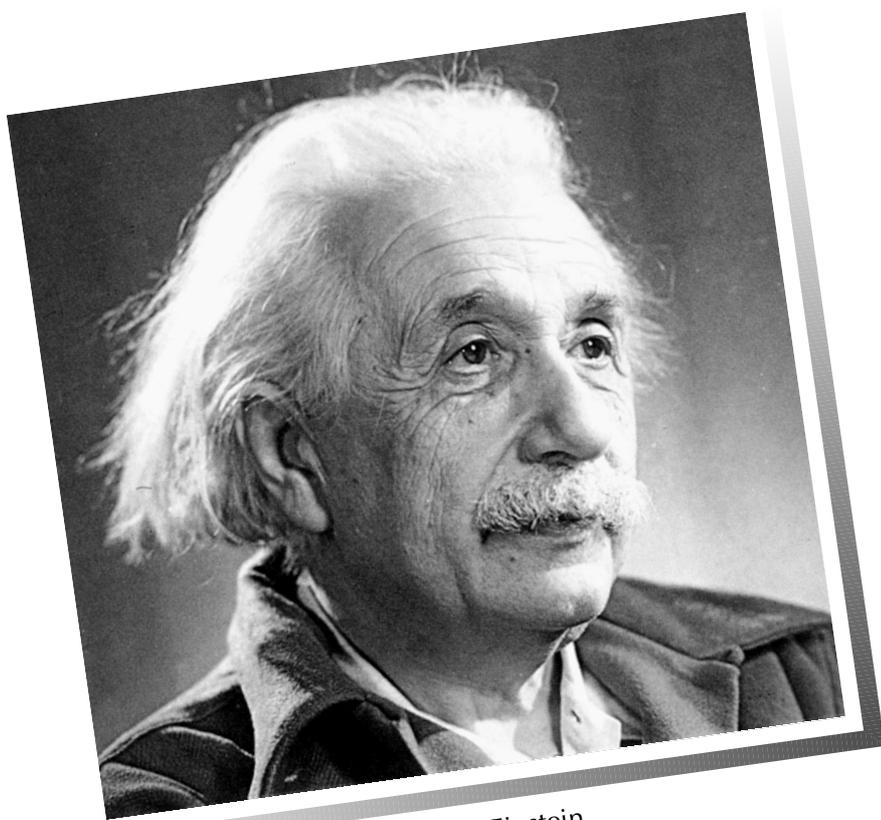
[K] M. Kline, *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*, Alianza Editorial, 1993.

[M] W. S. Massey, *Introducción a la topología algebraica*, Reverté, 1982.

[Po] J.C. Pont, *Topologie algébrique des origines a Poincaré*, Presses Universitaires de France, 1974.

[Pr] V.V. Prasolov, *Intuitive topology*, A.M.S., 1994.

[S] I. Stewart, *Conceptos de Matemática Moderna*, Alianza Editorial, 1977.



Albert Einstein