Sobre la teselación de Penrose y el número de oro

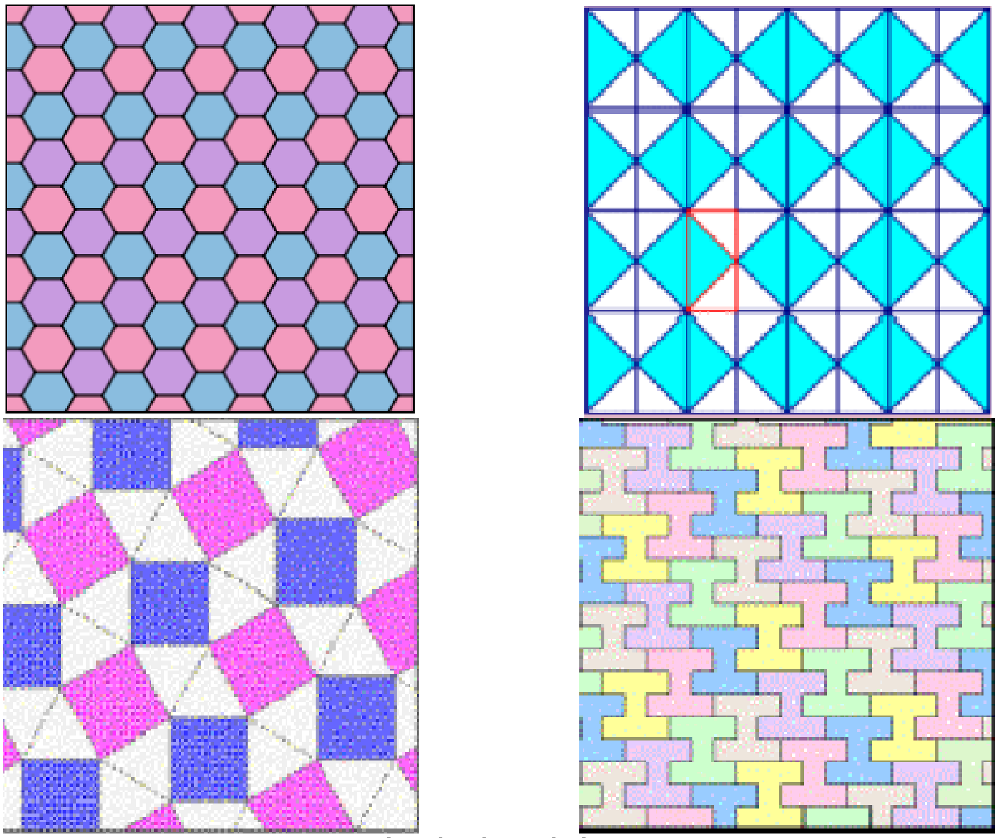
1. Introducción. De las teselaciones y el pentágono regular

1.1. Teselaciones:

El recubrimiento de una superficie plana mediante mosaicos que siguen un patrón se denomina una teselación. Una *tesela* es cada una de las piezas con las que se forma un mosaico.

El *teselado* o *teselación* es el proceso construcción mediante un patrón de regularidad de un recubrimiento del plano mediante figuras que cumplen las condiciones:

- *Relleno*, esto es, sin huecos vacíos.
- *Disjunción*: no hay superposición de figuras en el recubrimiento.



Ejemplos de teselaciones

En definitiva, el teselado puede desarrollarse mediante las transformaciones isométricas sobre una figura patrón para, de forma repetitiva, cubrir enteramente la superficie plana. Una *isometría* o movimiento es una transformación que preserva todas las distancias. La imagen de cualquier figura es congruente con la figura original.

Cuando pretendemos realizar el diseño de un recubrimiento repetitivo utilizamos en principio las más elementales figuras de la geometría plana: triángulo, rectángulo, pentágono, exágono, …

Los *teselados regulares* son aquellos que se desarrollan mediante el uso de polígonos regulares. Los únicos polígonos regulares que cubren completamente una superficie plana cumpliendo las condiciones del teselado son los triángulos equiláteros (simetría de órden 3), los cuadrados (simetría de orden 4) y los exágonos (simetría de orden 6).

Cuando se emplean dos o más polígonos regulares en el teselado, se dice que se trata de un *teselado semirregular*.

Los teselados irregulares son aquellos formados por polígonos no regulares. Obviamente, no todos los polígonos teselan, esto es, no todos cumplen las condiciones del teselado (relleno y disjunción), sin embargo hay figuras que teselan siempre y otras que teselan bajo ciertas condiciones.

Así, los paralelogramos y triángulos escalenos teselan siempre. Los exágonos regulares teselan siempre que tengan simetría central.

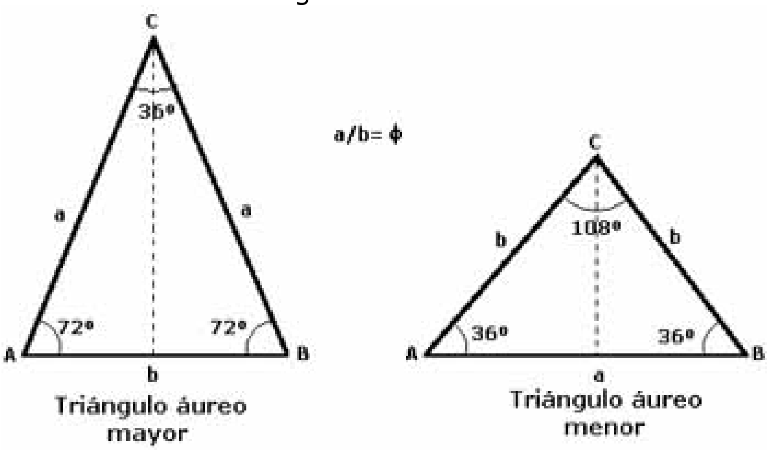
Una teselación se dice que es aperiódica si no posee simetría traslacional. La figura desplazada nunca coincide con la figura original. Al constituirse el teselado por dos o mas figuras distintas se necesita explicitar las *reglas de ensamblado* de las mismas para poder construir el mosaico.

1.2. Triángulos áureos en el pentágono regular:

Repasemos a continuación algunos de los triángulos áureos que encajan en el pentágono regular, para poder establecer su relación con el número áureo en la teselación propuesta por Roger Penrose.

- Triángulos áureos

Dos magnitudes en proporción áurea definen un triángulo isósceles en el que el lado repetido es la longitud mayor de la proporción, o bien un triángulo isósceles en el que el lado que se repite es la magnitud menor de la proporción. Se trata del llamado triángulo áureo o triángulo sublime. Ambos pueden ser determinados gráficamente calculando los tres ángulos en los vértices.



- Triangulo áureo mayor o triangulo sublime

Es todo triángulo isósceles en donde los lados desiguales están en proporción áurea, siendo el menor el lado no repetido. Los ángulos se determinan de inmediato:

$$\cos A = \cos B = \frac{b/2}{a} = \frac{1}{2}\frac{b}{a} = \frac{1}{2\phi} \to A = B = \arccos\left(\frac{1}{2\phi}\right) = \arccos(0.309017756) = 72^{\circ}$$

$C = 180º - (A + B) = 36º$

- Triangulo áureo menor o triangulo divino

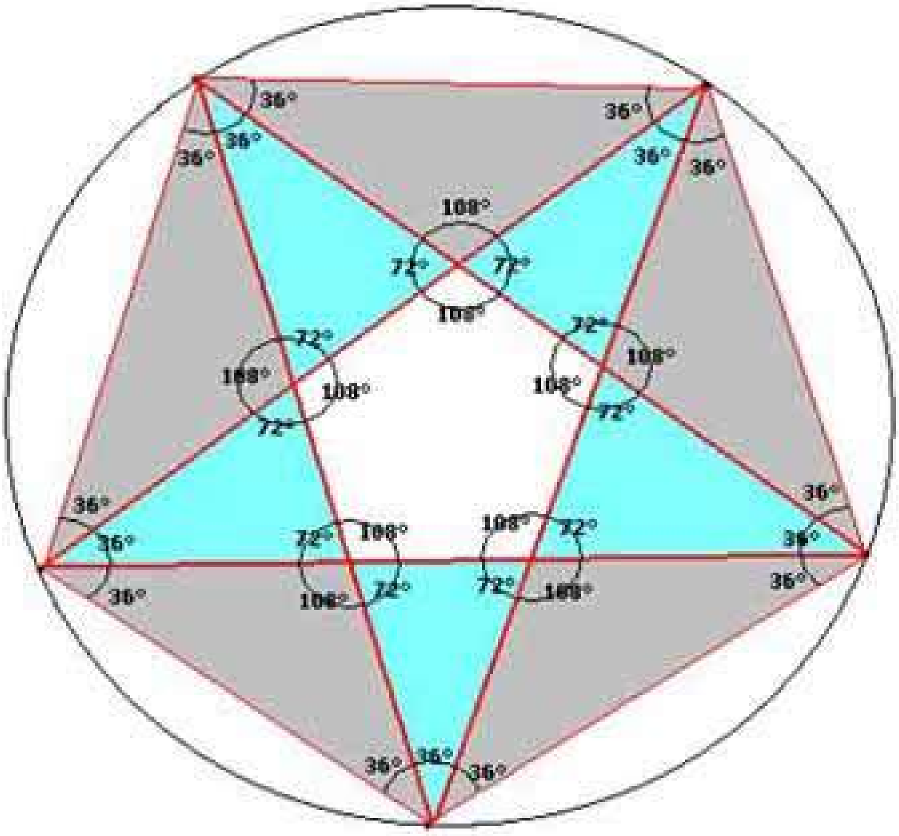
Es todo triángulo isósceles en donde los lados desiguales están en proporción áurea, siendo el mayor el lado no repetido. Determinamos del mismo modo los ángulos:

$$\cos A = \cos B = \frac{a/2}{b} = \frac{1}{2}\frac{a}{b} = \frac{1}{2}\phi \rightarrow A = B = \arccos\left(\frac{1}{2}\phi\right) = \arccos(0.809015) = 36º$$

$C = 180º - (A + B) = 108º$

- Diagonales en el pentágono regular

El hecho de que en el triángulo áureo al menos uno de los ángulos sea de 36º, y que en el pentágono regular sea de 108º el ángulo en cada uno de sus vértices, permite la obtención de un buen número de triángulos áureos cuando se trazan las diagonales en la figura pentagonal. En esquema:



Se obtiene, como se observa, un nuevo pentágono regular, y por repetición fractal del proceso, infinitos pentágonos regulares desde un pentágono regular dado. Los triángulos son áureos, mayores y menores.

La figura llamada pentalfa, o estrella de cinco puntas, utilizado en la antigüedad como símbolo por la escuela de los pitagóricos, se evidencia resaltada en la figura anterior.

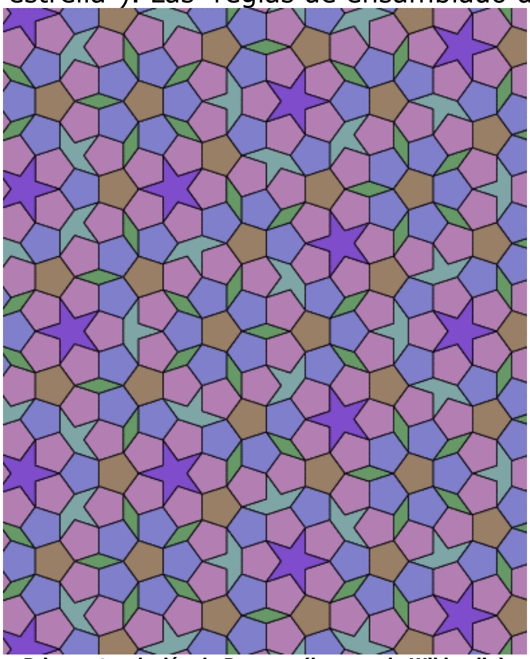
2. La teselación de Penrose

Como ya hemos mencionado antes, las únicas figuras regulares que permiten teselar son las de simetría de orden 3 (triángulos equiláteros), de orden 4 (cuadrados) y de orden 6 (exágonos regulares).

La figura de simetría de orden 5, el pentágono regular, no permite teselar, esto es, siempre quedarán huecos sin rellenar en el mosaico de recubrimiento del plano. Sin embargo, en 1974, el matemático Roger Penrose ideó un teselado aperiódico a base de pentágonos en donde los huecos se rellenarían por dos o bien por tres figuras fijas.

2.1. La primera teselación de penrose: diamante, bote, estrella:

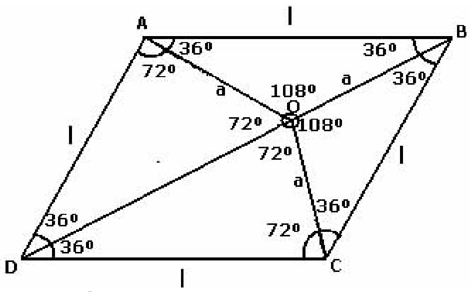
En la primera teselación propuesta por Penrose los huecos se rellenaban mediante tres figuras: un rombo delgado o "diamante", algo parecido a un bote náutico ("bote"), y una estrella de cinco puntas ("estrella"). Las reglas de ensamblado de de Penrose especificaban la forma de ensamblar las baldosas. Al haber tres conjuntos distintos de reglas de ensamblado para las baldosas pentagonales, podemos considerar el conjunto como formado por tres baldosas pentagonales diferentes, que junto con las tres indicadas (diamante, bote, estrella) definen el teselado aperiódico de Penrose como un mosaico de 6 baldosas, tal como mostramos en la figura.



Primera teselación de Penrose (imagen de Wikipedia)

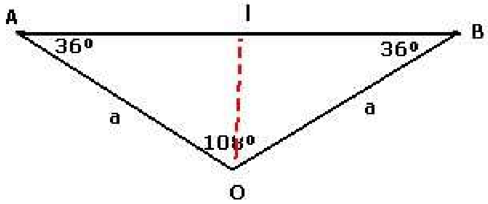
2.2. La teselación de la cometa y la flecha:

Penrose obtuvo dos figuras, partiendo del rombo ABCD, de ángulos 108º y 72º, al seccionar por los vértices opuestos la diagonal mayor en el punto O de forma que el triángulo ABO sea isósceles.



lo que implica que todos los triángulos que se forman son también isósceles.

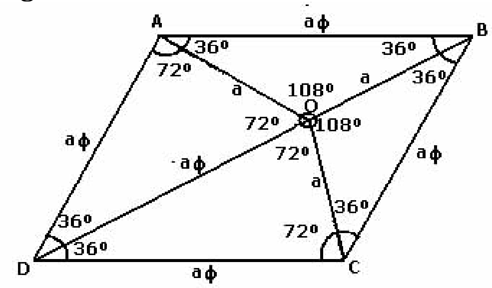
Si consideramos uno de estos triángulos isósceles, por ejemplo el triángulo ABO, se tiene que:



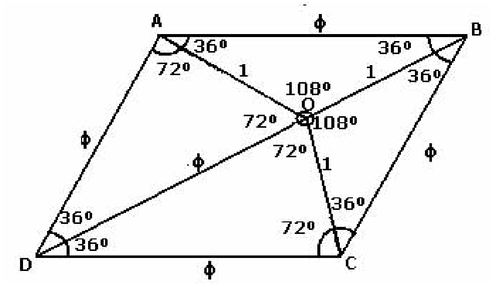
$l/2 = a.\cos 36 \rightarrow l = 2a.\cos 36 = a.1,618... = a.\phi$

O sea, la longitud l del lado del rombo es proporcional al numero áureo.

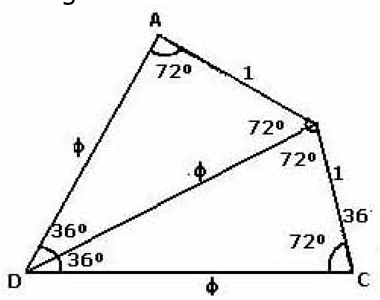
Es decir, la diagonal principal mayor queda dividida en dos segmentos que están en proporción áurea (su cociente es el número de oro, $\phi = 1,618...$). Por tanto, la figura seccionada es:



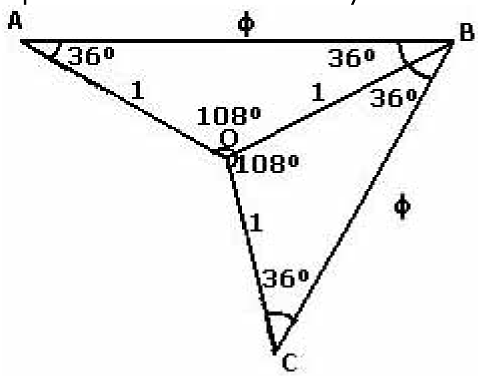
O bien



Y las dos figuras obtenidas desde el rombo de partida son la "cometa" y la "flecha":



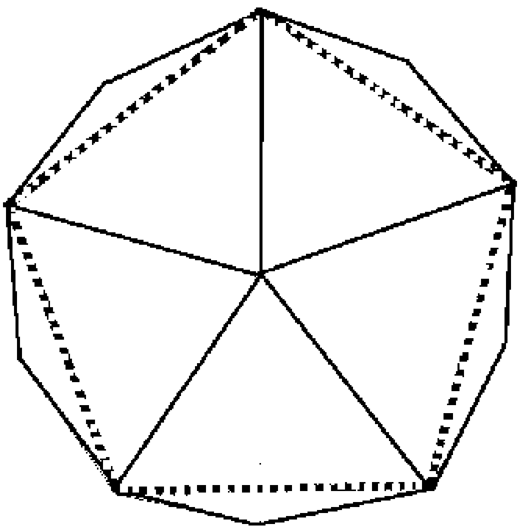
Cometa

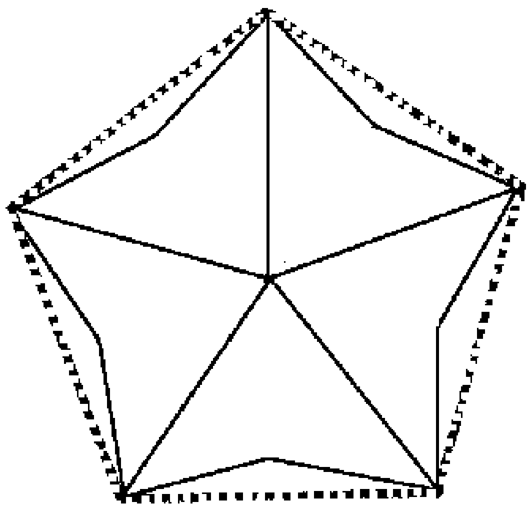


Flecha

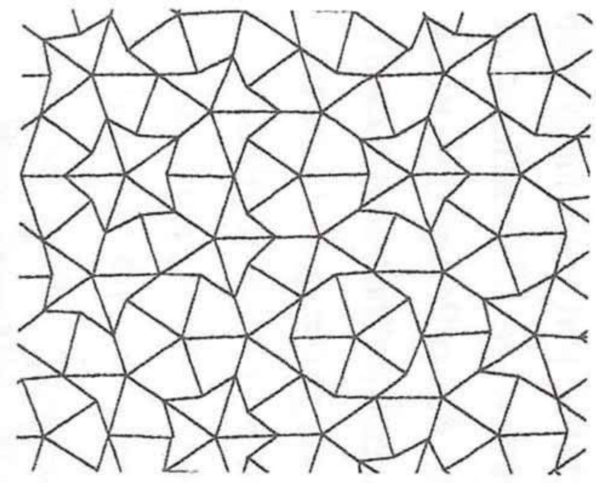
Donde ϕ representa al número de oro.

Tanto con las cometas como con las flechas se obtiene obviamente una simetría de orden 5:





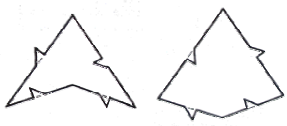
Y con determinadas reglas de ensamble puede desarrollarse una teselación aperiódica del tipo:



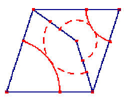
Que presenta la sorprendente propiedad de que al teselar una determinada área, el cociente de dividir el número de cometas por el número de flechas contenidos en la misma tiende a aproximarse al número de oro cuando el área teselada crece.

$$\frac{N_{COMET}}{N_{FLECH}} \to \phi$$

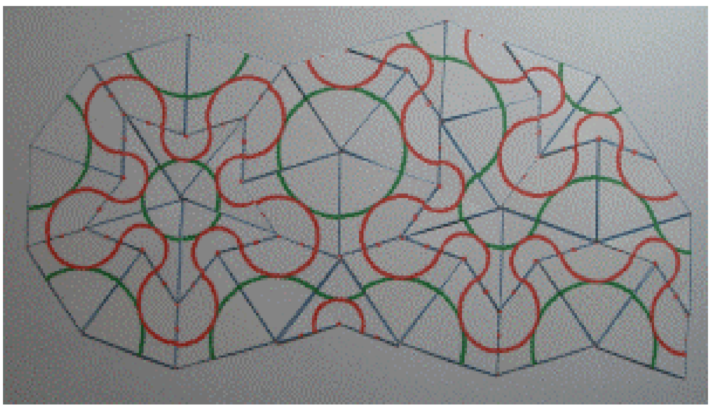
En lo que respecta al carácter aperiódico de la teselación, es claro que si se tratara de cometas y flechas como los descritos siempre podría construirse una teselación periódica, pues sería la repetición infinita del mismo rombo definido por ambas teselas. Para darle carácter aperiódico es necesario observar algunas reglas de ensamble, así, se sugirió por el mismo Penrose la colocación de muescas y protuberancias en la cometa y la flecha, como piezas de un puzzle



O bien, según otra sugerencia, del matemático de Princeton, John H. Conway, la distribución de señales coloreadas en ambas teselas

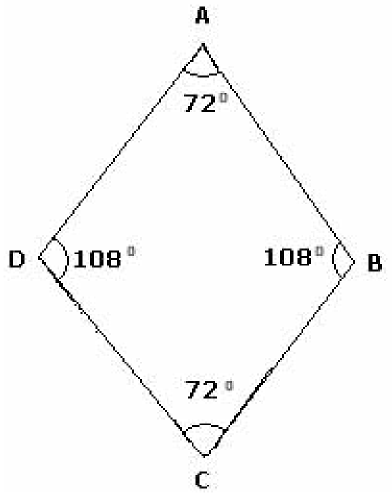


obteniéndose teselados de la forma

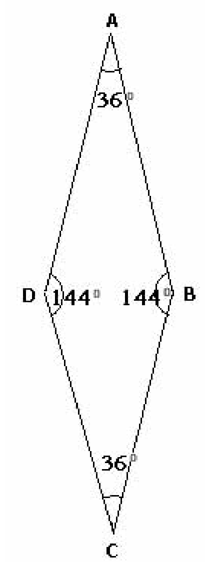


2.3. La teselación de los dos rombos:

Consiste en el teselado mediante el uso de dos rombos, uno obtuso de ángulos 72º y 108º, y otro agudo de ángulos 36º y 144º.



Rombo obtuso

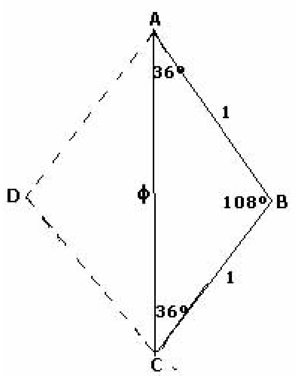


Rombo agudo

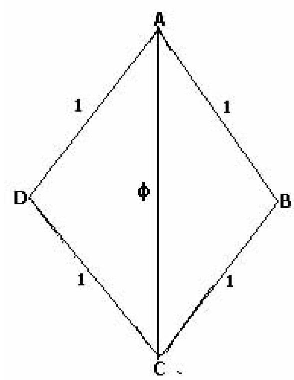
La relación de las dimensiones de cada rombo con el número áureo es inmediata.

- rombo obtuso:

Si tenemos en cuenta la imagen de la "flecha" (pagina 5), vemos que el triángulo isósceles ABO de aquella figura es aquí el triángulo isósceles ABC, mitad del rombo obtuso, por lo que queda la siguiente proporción con el número áureo

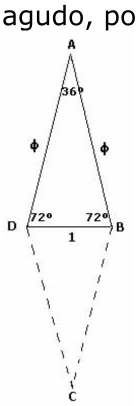


→

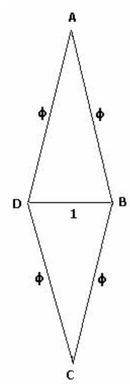


- rombo agudo:

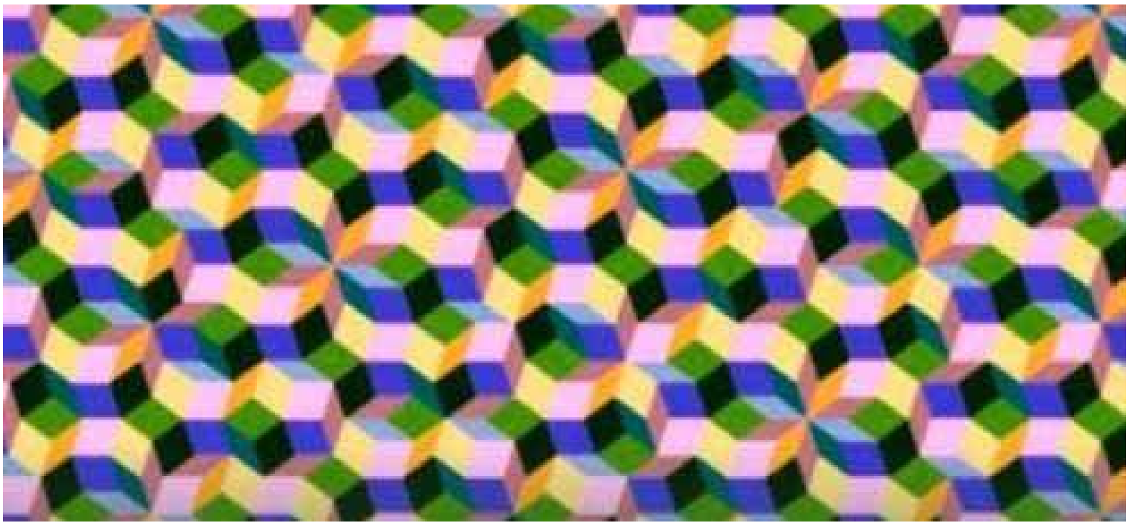
Y si ahora nos fijamos en la imagen de la "cometa" (también pagina 5), vemos que el triángulo isósceles AOD en dicha figura es aquí el triángulo isósceles ABD, mitad del rombo agudo, por lo que queda la siguiente proporción con el número áureo



→



La teselación rómbica de Penrose es del tipo:



Y también se verifica aquí la propiedad de que al teselar una determinada área, el cociente de dividir el número de rombos obtusos por el número de rombos agudos contenidos en la misma tiende a aproximarse al número de oro cuando el área teselada crece.

$$\frac{N_{OBTUSOS}}{N_{AGUDOS}} \rightarrow \phi$$

Bibliografía

Epsilones:
http://www.epsilones.com/paginas/laboratorio/laboratorio-002-teselado-penrose.html
Livio, M.; La proporción áurea, Ediciones Ariel, 2011
Sanchez Diez, C.-Hernández García, E., La proporción áurea en las construcciones arquitectónicas:
http://subcero.unet.edu.ve/index.php?option=com_content&view=article&id=65:serie-de-divulgacion-2014-i&catid=35:series&Itemid=55
Wikipedia; Teselado:
https://es.wikipedia.org/wiki/Teselado
Wikipedia; Teselación de Penrose:
https://es.wikipedia.org/wiki/Teselaci%C3%B3n_de_Penrose