El Teorema de la Base en los espacios vectoriales

La idea de base de un espacio vectorial es el concepto principal a la hora de afrontar la geometría clásica y sus aplicaciones al análisis matemático. Detallamos aquí una secuencia de definiciones y proposiciones que permitan tanto repasar la teoría básica como la obtención de la prueba del Teorema de la Base, esto es, de que todas las bases de un mismo espacio vectorial han de tener el mismo número de vectores, número que define la dimensión del espacio.

01. **Introducción: Espacios vectoriales. Subespacios**.

01.1. Espacio vectorial. Producto de espacios vectoriales:
Un espacio vectorial es una estructura algebraica constituida por un $\Delta -$grupo con operadores, donde el conjunto Δ de los operadores es un cuerpo. Detallemos la definición.

El espacio vectorial está constituido por un grupo conmutativo (V,+) y un cuerpo k con una ley de composición externa

$$k \times V \to V$$

que verifica las cuatro propiedades siguientes:

1) $\forall \alpha, \beta \in k, \forall x \in V,\ (\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$
2) $\forall \alpha \in k, \forall x, y \in V,\ \alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$
3) $\forall \alpha, \beta \in k, \forall x \in V,\ \alpha.(\beta.x) = (\alpha.\beta)x$
4) $\forall x \in V, \exists 1 \in k / 1.x = x.1 = x$

Los elementos del grupo conmutativo V se llaman vectores, y los elementos del cuerpo son los escalares.
O sea, podemos representar al espacio vectorial como $\left(V, k, +, .\right)$, y en definitiva se trata de un k-modulo, en donde *k* tiene estructura de cuerpo. La definición anterior puede considerarse como la de un espacio vectorial a izquierda. Podemos considerar asimismo la definición de espacio vectorial a derecha, y ambas definiciones coincidirán si el cuerpo *k* de definición del espacio es conmutativo. En adelante consideraremos que k es, efectivamente, un cuerpo conmutativo.

Se verifican algunas propiedades elementales:

a) $0.x = 0$, pues: $\forall \alpha \in k, \alpha.x = (\alpha + 0).x = \alpha.x + 0.x \to 0.x = 0$
b) $\alpha.0 = 0$, pues: $\forall x \in V, \alpha.x = \alpha.(0 + x) = \alpha.0 + \alpha.x \to \alpha.0 = 0$
c) $\alpha.x = 0 \to \alpha = 0 \vee x = 0$, pues:

$$\alpha \neq 0 \to \exists \alpha^{-1} \in k / \alpha^{-1}.\alpha = 1 \to \left(\alpha^{-1}.\alpha\right)x = \alpha^{-1}(\alpha.x) = x \to \alpha^{-1}0 = x \to x = 0$$

d) $(-\alpha).x=-(\alpha.x)$, pues: $(-\alpha).x=((-1).\alpha).x=(-1).(\alpha.x)=-(\alpha.x)$

e) $\alpha.(-x)=-(\alpha.x)$, pues: $\alpha.(-x)=\alpha.((-1).x)=(\alpha.(-1)).x=(-\alpha).x=-(\alpha.x)$

f) $\alpha x=\beta.x\rightarrow\alpha=\beta$, pues:

$\alpha.x=\beta.x\rightarrow\alpha x-\beta x=0\rightarrow(\alpha-\beta).x=0\rightarrow\alpha-\beta=0\rightarrow\alpha=\beta$

g) $\alpha.x=\alpha.y\rightarrow x=y$:

$\alpha x=\alpha.y\rightarrow\alpha.x-\alpha.y=0\rightarrow\alpha.(x-y)=0\rightarrow x-y=0\rightarrow x=y$

Dados dos k-espacios vectoriales, $(V_1,k,+,.),(V_2,k,+,.)$, y el producto cartesiano de ambos:

$$V_1\times V_2=\{(x,y)/x\in V_1,y\in V_2\}$$

si, usando la misma notación para las operaciones, definimos la suma de elementos de $V_1\times V_2$ y el producto de un elemento por un escalar en la forma:

$$\forall(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in V_1xV_2,(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2)$$
$$\forall\alpha\in k,\forall(x_1,x_2)\in V_1xV_2,\ \alpha(x_1,x_2)=(\alpha x_1,\alpha x_2)$$

resulta inmediato que tal suma es asociativa, conmutativa, con el $(0,0)$ como elemento neutro y tal que todo elemento (x,y) tiene por simétrico el $(-x,-y)$. Asimismo, se verifican las cuatro propiedades en el producto de los elementos de $V_1\times V_2$ por los elementos del cuerpo k de escalares:

1) $(\alpha+\beta).(x,y)=\ \alpha(x,y)+\beta.(x,y)$
2) $\alpha\left[(x_1,x_2)+(y_1,y_2)\right]=\alpha(x_1,x_2)+\alpha(y_1,y_2)$
3) $(\alpha\beta)(x,y)=\alpha(\beta(x,y))=(\alpha\beta)(x,y)$
4) $1.(x,y)=(x,y)$

En definitiva, el producto cartesiano de dos espacios vectoriales es un espacio vectorial sobre el cuerpo k sobre el que ambos espacios están definidos. Se denomina *Espacio vectorial producto de los espacios vectoriales* V_1 y V_2.

01.2. El retículo completo de los subespacios vectoriales.

Un subconjunto $L\subseteq V$ de vectores de un espacio vectorial $(V,k,+,.)$ se dice que es un *subespacio vectorial* o una *variedad lineal* del mismo si tiene estructura de espacio vectorial con respecto a las mismas leyes que confieren a $(V,k,+,.)$ estructura de espacio vectorial. En definitiva, si $(L,k,+,.)$ es espacio vectorial.

El teorema de caracterización más interesante se puede enunciar del modo siguiente.

Teorema 1.2.1:

La condición necesaria y suficiente para que $L\subseteq V$ sea una variedad lineal de V es que

$$\forall x,y\in L,\forall\alpha,\beta\in k,\ \alpha x+\beta y\in L.$$

- Es condición suficiente:

Se trata de probar que si se verifica la relación de pertenencia indicada entonces $L\subseteq V$ es un subgrupo aditivo de V (que también sería conmutativo por ser

conmutativo el grupo V) y observar que también se cumplen las propiedades del producto de los escalares del cuerpo k por los elementos de L. Efectivamente:
Si hacemos $\alpha = 1$ y $\beta = -1$, será $\alpha x + \beta y \in L \to x - y \in L \to L$ subrupo aditivo del grupo V
Si hacemos $\beta = 0,$ será $\alpha x + \beta y \in L \to \alpha x \in L$, es decir el producto de escalares por los elementos de L son elementos de L, y como también son elementos de V, que es espacio vectorial, se verifican las propiedades del producto de elementos del cuerpo k por los elementos de L. En definitiva, $(L, k, +, .)$ es espacio vectorial, variedad lineal de $(V, k, +, .)$.

- Es condición necesaria:

Si $(L, k, +, .)$ es un k-espacio vectorial, es obvio que $\forall x, y \in L, \forall \alpha, \beta \in k$, se verifica que: $\alpha . x \in L \wedge \beta . y \in L \to \alpha x + \beta y \in L$

La siguiente proposición a considerar es la que afirmaría que la intersección conjuntista de las variedades lineales de un espacio vectorial es también una variedad lineal del mismo.

Teoema 1.2.2:
Consideremos una familia $\{L_i\}_{i \in I}$ de variedades lineales del espacio vectorial $(V, k, +, .)$. Se tiene que

$$\forall x, y \in \bigcap_{i \in I} L_i, \forall \alpha, \beta \in k \to x, y \in L_i, i \in I \to \alpha x + \beta y \in L_i, i \in I \to \alpha x + \beta y \in \bigcap_{i \in I} L_i$$

luego $\left(\bigcap_{i \in I} L_i, k; +, .\right)$ es variedad lineal del espacio vectorial dado.

La familia $\varphi(V)$ de los subespacios de V es una familia de Moore y, por consiguiente, un retículo completo, ya que se cumplen las condiciones de su definición:

1) $V \in \varphi(V)$.
2) $\bigcap_{i \in I} L_i \in \varphi(V)$.

La clausura de Moore de una parte $M \subset V$ del k-espacio V es la intersección de todos los subespacios que contengan a M:

$$\overline{M} = \bigcap_{i \in I} L_i \,/\, M \subseteq L_i \wedge L_i \in \varphi(V), i \in I$$

Si consideramos las partes $\{M_j\}_{j \in J}$ de V, el mínimo subespacio que las contiene es la clausura de Moore de la unión de todas ellas:

$$\overline{\bigcup_{j \in J} M_j}$$

Desde el concepto de clausura de Moore podemos definir la suma de una familia de subespacios vectoriales $\{L_i\}_{i \in I}$ como la clausura de Moore de la unión:

$$\sum_{i \in I} L_i = \overline{\bigcup_{i \in I} L_i} \qquad [1.2.1]$$

También se puede establecer la suma de veriedades lineales como:

$$\sum_{i \in I} L_i = \left\{ x \in V \,/\, x = \sum_{i \in I} x_i \wedge x_i \in L_i, i \in I \right\}$$

probando a continuación que se trata del mínimo subespacio vectorial que contiene a $\bigcup_{i\in I} L_i$.

Con esta definición de clausura de Moore y de suma de subespacios, podemos ya establecer el ínfimo y el supremo por pares en la familia $\varphi(V)$ de los subespacios de un espacio vectorial:

$$\inf_{\varphi(V)}\left(L_i, L_j\right) = L_i \cap L_j, \quad \sup_{\varphi(V)}\left(L_i, L_j\right) = L_i + L_j = \overline{L_i \cup L_j}$$

y mediante inducción matemática, el ínfimo y el supremo de la familia $\varphi(V)$ de los subespacios de V:

$$\inf_{\varphi(V)}\left(\{L_i\}_{i\in I}\right) = \bigcap_{i\in I} L_i$$

$$\sup_{\varphi(V)}\left(\{L_i\}_{i\in I}\right) = \overline{\bigcup_{i\in I} L_i}$$

Puesto que una variedad lineal de un espacio vectorial $(V, k, +, .)$ es un $\Delta-$subgrupo del $\Delta-$grupo V (grupo con dominio de operadores $\Delta = k$), y el retículo de los $\Delta-$subgrupos es subretículo del retículo de los subgrupos, se sigue, en definitiva, que el retículo de las variedades lineales de $(V, k, +, .)$ es subretículo del retículo de los subgrupos del grupo V.

Teorema 1.2.3:

El conjunto M^* de las combinaciones lineales de los elementos de $M \subseteq V$ es un espacio vectorial que coincide con $\overline{M}$, clausura de Moore de M o variedad lineal engendrada por M.

En efecto:

Si es $M^* = \left\{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \,/\, x_j \in M, \alpha_j \in K\right\}$, y siendo $\overline{M}$ el mínimo espacio vectorial que contiene a M, será $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \in \overline{M} \rightarrow M^* \subseteq \overline{M}$

Por otra parte, si $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \in M^* \rightarrow M^*$ espacio vectorial que contiene a M y $\overline{M}$ es el mínimo espacio vectorial que contiene a M $\rightarrow \overline{M} \subseteq M^*$

Y de ambas inclusiones se deduce la igualdad.

Teorema 1.2.4:

Para cualquier k-subespacio $(L, k; +, .)$ del k-espacio $(V, k; +, .)$ siempre es posible definir una relación R de equivalencia de modo que el conjunto cociente de V por dicha relación de equivalencia es también un k-espacio vectorial.

Efectivamente, basta definir la relación R por la condición

$$xRy \leftrightarrow x - y \in L, \quad x, y \in V$$

Trivialmente, es reflexiva, simétrica y transitiva, por lo que se trata de una relación de equivalencia, cuyas clases pueden representarse por $x + L, y + L, z + L, \ldots$ O sea, el conjunto cociente de V por la relación de equivalencia es:

$$V/L = \{x + L \,/\, x \in V\}$$

Para ver que se trata de un espacio vectorial sobre el cuerpo k, bastará definir la suma de clases y el producto por los elementos del cuerpo en la forma:

$$\forall (x+L),(y+L) \in V/L,\ (x+L)+(y+L)=(x+y)+L$$
$$\forall \alpha \in k, \forall (x+L) \in V/L,\ \alpha.(x+H)=\alpha.x+H$$

de donde resulta que $(V/L,+)$ es un grupo conmutativo por serlo $(V,+)$, ya que sumar clases consiste, en realidad, en sumar elementos del espacio, verificándose asimismo las propiedades del producto de escalares por las clases del conjunto cociente que definen la estructura de espacio vectorial:

$$\forall \alpha,\beta \in k, \forall (x+L) \in V/L,\ (\alpha+\beta)(x+L)=\alpha(x+L)+\beta(x+L)$$
$$\forall \alpha \in k, \forall (x+L),(y+L) \in V/L,\ \alpha[(x+L)+(y+L)]=\alpha(x+L)+\alpha(y+L)$$
$$\forall \alpha,\beta \in k, \forall (x+L) \in V/L,\ (\alpha.\beta)(x+L)=\alpha.[\beta.(x+L)]$$
$$\forall (x+L) \in V/L, \exists 1 \in k / 1.(x+L)=(x+L)$$

02. Base y dimensión. Teorema de la Base.

02.1 Dependencia e independencia lineal.

Un conjunto de n vectores del espacio vectorial *V* son linealmente independientes sii cualquier combinación lineal nula de los mismos implica necesariamente que todos los coeficientes son nulos:

$$x_i,\ i=1,\dots,n\ \ l.independ \leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.x_i = 0 \rightarrow \alpha_i = 0,\ i=1,\dots,n$$

Cuando en una combinación lineal nula existen coeficientes no nulos, los vectores se dicen linealmente dependientes:

$$x_i,\ i=1,\dots,n\ \ l.depend \leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.x_i = 0 \rightarrow \exists \alpha_j \neq 0,\ j \in [1,\dots,n]$$

Un subconjunto $M \subseteq V$ de un espacio vectorial V se dice que es linealmente independiente sii todo subconjunto finito de *M* es linealmente independiente:

$$M \subseteq V\ l.indepen\ o\ libre \leftrightarrow \forall [m_1,\dots,m_k] \subseteq M \rightarrow m_i,\ i=1,\dots,k\ \ l.independ$$

Sea $M \subseteq V$ una familia de vectores de V linealmente independientes. Un vector del espacio se dice que es *linealmente dependiente de M* sii existe un número finito de elementos de *M* y un conjunto de escalares del cuerpo k tal que dicho vector puede expresarse como combinación lineal de ellos:

$$x \in V\ \ l.depend\ de\ M \leftrightarrow \exists (m_1,\dots,m_h) \subseteq M \wedge \exists (\alpha_1,\dots,\alpha_h) \in k / x = \sum_{j=1}^{h} \alpha_j.m_j$$

Teorema 2.1.1:

Si $M \subseteq V$ es linealmente independiente, entonces la expresión de un vector $x \in V$ como combinación lineal de elementos de *M* es única.

En efecto:
Si hubieran dos expresiones distintas para el vector x:

$$x=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i m_i,\quad m_i\in M, i=1,\dots,p$$

$$x=\sum_{j=1}^{q}\beta_j m_j,\quad m_j\in M, j=1,\dots,q$$

su diferencia sería

$$0=x-x=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i m_i-\sum_{j=1}^{q}\beta_j m_j=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i m_i+\sum_{j=1}^{q}(-\beta_j)m_j$$

haciendo $-\beta_j=\alpha_{p+j},\ \ j=1,\dots,q$, se tendría que

$$0=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i m_i+\sum_{j=1}^{q}(-\beta_j)m_j=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i m_i+\sum_{j=1}^{q}\alpha_{p+j}m_{p+j}=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i m_i+\sum_{i=p+1}^{p+q}\alpha_i m_i=\sum_{i=1}^{p+q}\alpha_i m_i$$

es decir:

$\sum_{i=1}^{p+q}\alpha_i m_i=0$ con $\alpha_i\neq 0\to m_i, i=1,\dots,p+q$ no serían linealmente independientes, y por tanto $M\subseteq V$ no seria una parte linealmente independiente del espacio vectorial.

Dos partes linealmente independientes de un espacio vectorial se dice que son *equivalentes* si todo vector de una es combinación lineal de vectores de la otra. Es obvio que tal relación es reflexiva, simétrica y transitiva, por lo que es una relación de equivalencia que clasifica las partes linealmente independientes del espacio vectorial.

El siguiente teorema, llamado teorema del cambio, permite determinar conjuntos de vectores equivalentes a un conjunto dado.

Teorema 2.1.2:
Dados dos conjuntos de vectores de un k-espacio vectorial V, finitos y linealmente independientes, $P=\{x_1,\dots,x_p\}$ y $Q=\{y_1,\dots,y_q\}$, donde cada elemento x_i de P es linealmente dependiente de Q, se verifica que $p\leq q$ y pueden sustituirse p elementos de Q, por ejemplo los p primeros, por los p elementos de P, obteniéndose un conjunto Q' de vectores que es equivalente al conjunto Q dado.
Veamos la demostración por inducción.

a) $Q=\{y_1,\dots,y_q\}$ es linealmente independiente, es decir, todo subconjunto finito de Q es linealmente independiente.
Si $P=\{x_1\}$ obviamente es $1=p\leq q$, y, por hipótesis, x_1 depende linealmente de Q.

Supongamos que tal dependencia sea expresable por $x_1=\sum_{i=1}^{r}r_i y_i$. Al ser $x_1\neq 0$, existe al menos un $r_i\neq 0$. Supongamos que sea $r_1\neq 0$. Será:

$$x_1=r_1y_1+\sum_{i=2}^{r}r_i y_i\to y_1=\frac{1}{r_1}x_1-\sum_{i=2}^{r}\frac{r_i}{r_1}y_i$$

por lo que al sustituir en Q:
$Q'=\{x_1,y_2,\dots,y_q\}$ es linealmente independiente, y además todo elemento de Q' es combinación lineal de elementos de Q, y recíprocamente, todo elemento de Q es

combinación lineal de elementos de *Q'*, por lo que *Q* y *Q'* son equivalentes y la proposición se verifica para *p=1*.
b) Continuando con el proceso de inducción, supongamos ahora que la proposición es cierta para *p=h* y comprobemos que si fuera así, entonces habría de ser cierta también para *p=h+1*.
O sea, supongamos que $Q'=\{x_1,...,x_h,y_{h+1},...,y_q\}\approx Q=\{y_1,...,y_h,y_{h+1},...,y_q\}$ y veamos que en tal caso habría de ser también

$$\{x_1,...,x_{h+1},y_{h+2},...,y_q\}\approx\{y_1,...,y_h,y_{h+1},...,y_q\}$$

Por hipótesis del teorema, todo elemento de *P* es combinación lineal de los elementos de *Q*, luego x_{h+1} es combinación lineal de los elementos de Q y, por tanto, también es combinación lineal de $Q'=\{x_1,...,x_h,y_{h+1},...,y_q\}$ por ser Q' equivalente a Q, por hipótesis de inducción.
Sea, por ejemplo: $x_{h+1}=r_1x_1+...+r_hx_h+r_{h+1}y_{h+1}+...+r_qy_q$. Habrá de ser $h+1\leq q$, pues si fuera $h+1>q$, entonces x_{h+1} seria solo combinación lineal de los $\{x_1,...,x_h\}$, lo cual es imposible, pues por hipótesis del teorema los elementos de $P=\{x_1,...,x_p\}$ son linealmente independientes.
Asimismo, y por la misma razón, tampoco podrían ser nulos todos los coeficientes r_k, $k\geq h+1$, ya que entonces se daría la misma contradicción.

Sea, por ejemplo, $r_{h+1}\neq 0$: $x_{h+1}=\sum_{i=1}^{h}r_ix_i+x_{h+1}y_{h+1}+\sum_{i=h+2}^{q}r_iy_i$, de donde, despejando:

$y_{h+1}=\frac{1}{r_{h+1}}x_{h+1}-\sum_{i=1}^{h}\frac{r_i}{r_{h+1}}x_i-\sum_{i=h+2}^{q}\frac{r_i}{r_{h+1}}y_i$, por lo que al sustituirlo en Q':

$Q'=\{x_1,...,x_h,x_{h+1},y_{h+2},...,y_q\}$ es linealmente independiente y además todo elemento del conjunto *Q'* es combinación lineal de elementos de Q.
En definitiva, la proposición es cierta para *h+1*, el teorema se verifica, entonces, para cualquiera que sea el cardinal $p\leq q$.

De este teorema puede obtenerse un corolario, que es inmediato para el caso de sistemas finitos de vectores del k-espacio vectorial:

Si dos conjuntos finitos de vectores, *P* y *Q*, son linealmente independientes y equivalentes, tienen igual cardinal.
En efecto, pues por el teorema anterior, si es *p=card(P),* y es *q=card(Q)*, se tiene que, al ser los elementos de *P* dependientes de los elementos de *Q*, se cumplirá que $p\leq q$ y, recíprocamente, al ser los elementos de *Q* dependientes de los elementos de *P*, será $q\leq p$, con lo que, de ambas desigualdades, $p=q$.

El anterior corolario es, pues, inmediato, si los sistemas de vectores *P* y *Q* tienen cardinal finito. En el caso de que se trate de conjuntos infinitos de vectores la proposición también se verifica, aunque requiere una prueba más elaborada, que trataremos de exponer en el siguiente teorema.

Teorema 2.1.3:
Si dos familias de vectores, *P* y *Q*, son linealmente independientes y equivalentes, tienen igual cardinal.
Demostración:
Sean los conjuntos $P=\{x_i\in V/i\in I\}$ y $Q=\{y_j/j\in J\}$. Por ser equivalentes, se tiene:

$$\forall x \in P, \exists Q_x = \{y_{x_1},...,y_{x_r}\} \subseteq Q / x = \sum_{j=1}^{r} r_j y_{x_j}, r_j \in k$$

$$\forall y \in Q, \exists P_y = \{x_{y_1},...,x_{y_s}\} \subseteq P / y = \sum_{i=1}^{s} s_i x_{y_i}, s_i \in k$$

Por ser linealmente independientes:

$$\sum_{h=1}^{m} \alpha_h x_h = 0 \to \alpha_1 = ... = \alpha_m = 0,\ \sum_{l=1}^{n} \beta_l y_l = 0 \to \beta_1 = ... = \beta_n = 0$$

De lo visto anteriormente, los conjuntos Q_x y P_y son finitos y contenidos respectivamente en *Q* y en *P*.

Llamemos $Z = \bigcup_{x\in P} Q_x$ y $W = \bigcup_{y\in Q} P_y$. Se tiene obviamente que $Z \subseteq Q$ y $W \subseteq P$.

Veamos que $Z = Q$ mediante reducción al absurdo:

Pues si $\exists y_k \in Q / y_k \notin Z$, será entonces $y_k = \sum_{j=1}^{m_k} \beta_j x_j / x_j \in P$, y como es:

$x_j \in P \to x_j = \sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{m_j} \alpha_l y_l / y_l \in Q$, por lo que $y_k = \sum_{j=1}^{m_k} \beta_j \left(\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{m_j} \alpha_l y_l \right) = \sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{m} \gamma_l y_l$, pero esto implicaría que $Q = \{y_j / j \in J\}$ no es linealmente independiente, contra la hipótesis.

Luego, $\forall y_k \in Q \to y_k \in Z \to Q \subseteq Z$, y de ambas inclusiones, $Q = Z = \bigcup_{x\in P} Q_x$.

En definitiva, se tiene que ambos conjuntos cumplen $Q = \bigcup_{x\in P} Q_x$ y $P = \bigcup_{y\in Q} P_y$.

Si Q es infinito y cada uno de los $Q_x = \{y_{x_1},...,y_{x_r}\}$ es finito, se deduce que la unión $Q = \bigcup_{x\in P} Q_x$ es infinita (pues la unión de un número finito de términos finitos nunca sería infinita). Luego, la familia cuyos elementos son los Q_x tiene infinitos elementos:

$$Q^* = \{Q_x / x \in P\} \text{ tiene infinitos elementos}$$

Sea la aplicación $f : P \to Q^*$, definida por la condición $\forall x \in P,\ f(x) = Q_x \in Q^*$.

Tal aplicación es suprayectiva, ya que $\forall Q_x \in Q^*, \exists x \in P / f(x) = Q_x$

Puesto que

$$\forall \{y_{x_1},...,y_{x_r}\} \in Q^*,\ \exists x \in P / x = \sum_{j=1}^{r} r_j y_{x_j}$$

La aplicación f no es inyectiva, pues para un mismo $Q_x = \{y_{x_1},...,y_{x_r}\}$ y conjuntos diferentes de coeficientes r_j se obtienen diferentes elementos de P. Es decir:

$$No[f(x) = f(y) \to x = y]$$

Al no ser inyectiva, se tiene que $card(P) \geq card(Q^*)$.

Veremos ahora que $card(Q^*) \geq card(Q)$, con lo que llegaríamos a la conclusión de que $card(P) \geq card(Q)$.

Sabemos que si un conjunto ϕ es infinito, se verifica que $card(\phi \times \phi) = card(\phi)$.

Por tanto, en nuestro caso, siendo Q^* infinito: $card(Q^* \times Q^*) = card(Q^*)$.

Sea la correspondencia $g: Q \to Q^* \times Q^*$ definida por
$\forall y_i \in Q,\ g(y_i) = (Q_x, Q_y) \in Q^* \times Q^*$
donde las dos proyecciones, $pr_1(y_i) = Q_x$ y $pr_2(y_i) = Q_y$, las elegimos de modo que $y_i \in Q_x, \forall Q_y \in Q^*$.
Tal correspondencia será aplicación inyectiva si imponemos dos condiciones más a la definición:

a) Elegimos solo uno de los elementos de $Q_x \in Q^*$ entre los que verifican que $y_i \in Q_x$. Es decir, un mismo Q_x será primera proyección de, a lo sumo, un número finito de y_i.
b) Elegimos como segunda proyección un $Q_y \in Q^*$ tal que si dos elementos, y_i y y_j, tuvieran igual la primera proyección ($pr_1(y_i) = pr_1(y_j)$) entonces tengan distinta la segunda ($pr_2(y_i) \neq pr_2(y_j)$). Esto siempre es posible al ser Q_x finito y Q^* infinito.

Al ser $g: Q \to Q^* \times Q^*$ inyectiva, se tendrá que $card(Q) \leq card(Q^* \times Q^*) = card(Q^*)$. En definitiva, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} card(P) \geq card(Q^*) \\ card(Q) \leq card(Q^*) \end{array}\right\} \to card(P) \geq card(Q)$$

Si repetimos ahora para *P* los mismos pasos que hemos dado para *Q,* llegaremos por analogía a la desigualdad:

$$card(Q) \geq card(P)$$

Luego, de ambas, deducimos la igualdad de ambos cardinales:

$$card(Q) = card(P)$$

02.2. Bases. Teorema de la Base.

Se dice que $G \subseteq V$ es un *sistema de generadores* del k-espacio *V* sii cualquier vector del espacio puede expresarse como combinación lineal de un número finito de elementos de *G.*

Una *base* de *V* es un sistema de generadores que es linealmente independiente.

Teorema 2.2.1:
Todo sistema de generadores irreducible es una base, y recíprocamente, toda base es un sistema de generadores irreducible.
Demostración:
Sea $G = \{u_j \in V \,/\, j \in J\}$ un sistema de generadores irreducible (*sgi*).

- Veamos que $G\ sgi \to G\ base$:

Por reducción al absurdo: Si *G* no fuera base, entonces no sería linealmente independiente, luego $\sum_{i=1}^{m} \gamma_j u_j = 0 \to \exists \gamma_h \in k / \gamma_h \neq 0$, por tanto:

$\sum_{j=1}^{m} \gamma_j u_j = \gamma_h u_h + \sum_{j \neq h}^{m} \gamma_j u_j = 0 \to u_h = -\sum_{j \neq h}^{m} \frac{\gamma_j}{\gamma_h} u_j$, de lo cual:

$$\forall x \in V,\ x=\sum_{j=1}^{m}\varphi_j u_j=\varphi_h u_h+\sum_{j\neq h}^{m}\varphi_j u_j=\varphi_h\left(-\sum_{j\neq h}^{m}\frac{\gamma_j}{\gamma_h}u_j\right)+\sum_{j\neq h}^{m}\varphi_j u_j=\sum_{j\neq h}^{m}\Phi_j u_j$$

Es decir, x sería combinación lineal de vectores de G-u_h, por lo que G sería reducible, contra la hipótesis de que G es *sgi*. Luego G ha de ser base.

- Veamos que $G\ base \rightarrow G\ sgi$:

También por reducción al absurdo: Supongamos que G no sea irreducible, entonces podría suprimirse algún elemento de modo que los restantes sigan siendo sistema de generadores. Sea $u_h \in G / G-u_h$ es sistema de generadores de V:

$\forall x \in V, \exists \Phi_l \in k, l=1,...,m / x=\sum_{l\neq h}^{m}\Phi_l u_l$. En particular, como $u_h \in V$, también será

$u_h=\sum_{l\neq h}^{m}\Phi_l u_l \rightarrow u_h-\sum_{l\neq h}^{m}\Phi_l u_l=0 \rightarrow \exists \Phi^*_l \neq 0 / \sum_{l=1}^{m}\Phi^*_l\, u_l=0 \rightarrow G$ no es base, contra la hipótesis. Luego G ha de ser sistema de generadores irreducible.

Teorema 2.2.2:
Si $G \subseteq V$ es un sistema de generadores del *k*-espacio *V* en el que todo vector del espacio tiene expresión única, entonces G es una base. O sea

$$\forall x \in V, x=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i u_i,\ u_i \in G, \varphi_i \in k,\ unica \rightarrow G\ base$$

Demostración
Como todo vector del espacio puede expresarse de forma única en G, elijamos el vector $0 \in V$ y expresémoslo como combinación lineal de elementos de G:

$$0=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i u_i \rightarrow 0=o.u_1+...+0.u_n\ única \rightarrow \varphi_1=...=\varphi_n=0 \rightarrow G\ lin.\ independ$$

por tanto:

$$G\ sist.\ gener \wedge G\ lin.\ independ \rightarrow G\ base$$

Dado un k-espacio vectorial V, se denomina familia de vectores de V libre maximal a toda familia de vectores linealmente independiente que no está contenida estrictamente en ninguna otra familia linealmente independiente del k-espacio V.

La existencia de familias libres maximales en un k-espacio vectorial se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 2.2.3:
1) En todo k-espacio vectorial V existen familias de vectores libres maximales.
2) Para cualquier parte $L \subseteq V$ linealmente independiente existe una familia de vectores $M \subseteq V$ libre maximal tal que $L \subseteq M$.

Demostración:
1)Para probar que en todo espacio vectorial existen familias libres maximales bastará probar que toda familia M de partes de V linealmente independientes es U-inductiva, por lo que en virtud del Lema de Zorn, existe en la familia al menos un elemento maximal. Es decir, se trata de probar: a) que existen familias linealmente independientes no vacías, b) que toda cadena de partes de V contenida en M, ordenadas por inclusión, está mayorada. Con esto, aplicando el Lema de Zorn se infiere que la cadena tiene mayorante mínimo o supremo, que al estar contenido en M es linealmente independiente y maximal.

M es no vacía, pues cualquier vector $x \in V / x \neq 0$ constituye una parte $\{x\}$ linealmente independiente, y, por tanto, contenida en M. Sea, entonces, C una cadena de partes de M ordenada por inclusión, y sea

$$\phi^* = \bigcup_{\phi \in C} \phi$$

Veamos que $\phi^* \in M$: Si es $\{x_1, ..., x_n\} \in \phi^* \to \exists \phi \in C / \{x_1, ..., x_n\} \in \phi$. Luego, los elementos de ϕ^* son linealmente independientes, lo que implica que $\phi^* \in M$.
Además, $\phi \subseteq \phi^*, \forall \phi \in C$, por lo que *M* es U-inductivo, y aplicando el Lema de Zorn, existe elemento maximal, que al estar contenido en M, es maximal y linealmente independiente.
2)Si es $L \subseteq V$ una parte linealmente independiente, y es M la familia de las partes linealmente independientes, repitiendo el proceso anterior encontramos que *M* no es vacía, pues $L \subseteq M$, y que es U-inductiva, por lo que contiene al menos un elemento libre maximal que contiene a L.

Teorema 2.2.4:
Dos sistemas de vectores libres maximales, M y M', son equivalentes. Esto es, todo elemento de uno de ellos es combinación de un número finito de elementos del otro.
Dem.:
Si hubiera un elemento u de M que no fuese combinación lineal de elementos de M', entonces se añadiría a M' , con lo que $\{M', u\}$ sería linealmente independiente y M' no sería libre maximal.
Luego todo vector de uno de ambos sistemas ha de ser combinación lineal de los vectores del otro. Ambos son equivalentes.

Teorema 2.2.5:
Dos sistemas de vectores libres maximales tienen igual cardinal.
Dem.:
Ambos sistemas son linealmente independientes y equivalentes, luego, por el teorema 2.1.3, tienen igual cardinal.

Sabemos, por definición, que una base es un sistema de vectores linealmente independientes. Veamos una caracterización del concepto de base mediante la idea de sistema de vectores libre maximal.

Teorema 2.2.6:
En todo k-espacio vectorial V, la condición necesaria y suficiente para que una parte $B \subseteq V$ sea una base es que sea libre maximal sobre V.
Dem.:

- Condición necesaria: Si B es base de V, entonces es sistema de vectores linealmente independiente, con lo que

$$\forall x \in V - B, \; x = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i b_i, \; b_i \in B, \varphi_i \in k$$

  es decir, B es libre maximal.
- Condición suficiente:

  Si B es libre maximal entonces, $\forall x \in V$, $\{B, x\}$ es linealmente dependiente.

  Es decir, existe una combinación lineal nula con algún coeficiente no nulo:

$$\alpha x + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i b_i = 0, \; \alpha \neq 0$$

  con lo cual:

$$x = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i}{\alpha} b_i, \ \alpha \neq 0$$

por tanto, $\forall x \in V, \ x = \sum_{=1}^{n} \phi_i b_i, \ b_i \in B, \ \phi_i \in k$, y B es sistema de generadores de V.

Teorema 2.2.7: (Teorema de la Base)
Dos bases de un espacio vectorial tienen el mismo cardinal.
Demos.:
Si dos partes de V, $B \subseteq V$ y $B \subseteq V$, son bases, entonces, por el teorema 2.2.6, son libres maximales, y por el teorema 2.2.4, son equivalentes. Si son equivalentes y libres maximales verifican el teorema 2.2.5 y tienen igual cardinal.

Sobre la existencia de bases en un k-espacio vectorial dado, podemos enunciar la proposición siguiente.

Teorema 2.2.8:
Todo espacio vectorial V admite al menos una base.
Para toda parte $M \subseteq V$ existe al menos una base $B \subseteq V$ que contiene a M.
Dem.:
Toda base es sistema libre maximal por teorema 2.2.6. y por el teorema 2.2.5, se verifica el enunciado.

02.3. Dimensión.

En [1.2.1] hemos definido la suma de variedades lineales como la clausura de Moore de la unión

$$L_1 + L_2 = \overline{L_1 \cup L_2}$$

O bien como

$$L_1 + L_2 = \{ x \in V / x = x_1 + x_2, \ x_1 \in L_1, x_2 \in L_2 \}$$

La suma directa de dos variedades lineales disjuntas se define como la suma de ambas:

$$L_1 \oplus L_2 = L_1 + L_2 / L_1 \cap L_2 = \phi$$

Dada una variedad lineal $L \subseteq V$, se denomina variedad suplementaria de L a otra variedad lineal $W \subseteq V$ que cumpla $L \oplus W = V$.

Teorema 2.3.1.
Para toda variedad lineal $L \subseteq V$ existe al menos una variedad lineal suplementaria $W \subseteq V$.
Demostración:
Sea B una base de V y sea BL una base de la variedad $L \subseteq V$. Siempre es posible completar BL con un subconjunto de B para obtener otra base B' de V que contiene a BL. Si llamamos $W \subseteq V$ a la variedad lineal de V engendrada por BW=B'-BL, se tiene que al ser BL y BW dos partes disjuntas de la base B', el espacio V es suma directa de ambas variedades lineales, $L \oplus W = V$, por lo que una de ellas es suplementaria de la otra.

Un espacio vectorial de tipo finito es un espacio vectorial que admite una base finita. Si el número de vectores de sus bases es n, se dice que su dimensión es n:

$$\dim V = n$$

Es inmediato, de lo visto anteriormente, que n es el número máximo de vectores linealmente independientes en un espacio de tipo finito de dimensión n.

Asimismo resulta trivial que si L es subespacio vectorial de V, es $\dim L \leq \dim V$.

Bibliografía:

ABELLANAS C., P.; “Elementos de Matemáticas”, Editorial Romo, 1968, Madrid.
ABELLANAS C., P.; “Geometría Básica”, Editorial Romo, 1961, Madrid.
APOSTOL, T.M.; “Calculus”, Editorial Reverté, 1984, Barcelona.
DIRKHOFF, G.-MC LANE, S.;“Algebra Moderna”, Editorial Vicens-Vives, 1985, Barcelona.
DIEUDONNÉ, J.; Algèbre linéaire et géométrie élémentaire, Ed. Herman, 1964, Paris
DUBREIL, P.; “Lecciones de Álgebra Moderna”, Editorial Reverté, 1971, Barcelona.
GODEMENT, R.; “Algèbre”, Ediciones Herman, 1968,Paris.
HOFFMAN,K.-KUNZE, R.; “Algebra Lineal”, Prentice Hall International, 1973, Madrid.
KAHN, P.J.: “Introducción al álgebra lineal”, Ediciones del Castillo, 1970, Madrid.
LENTIN, A.-RIVAUD, J.; “Álgebra Moderna”, Ediciones Aguilar, 1969, Madrid.
QUEYSANNE, M.; “Álgebra Básica”, Editorial Vicens-Vives, 1971, Barcelona
STRANG, G.; Álgebra Lineal y sus Aplicaciones, Fondo Educativo Interamericano, 1982.