Los Polinomios de Tchebycheff


Tchebycheff
(imagen de Wikipedia)

Descubiertos por el matemático ruso Pafnuti Lvóvich Tchebycheff (1821-1894), son polinomios de gran importancia en la teoría de aproximación de funciones, ya sea por interpolación o bien por ajuste en los llamados *nodos de Tchebycheff* (las raíces de estos polinomios). El uso de estos polinomios en estos nodos para realizar la interpolación funcional permite minimizar el llamado *error de Runge*, que consiste en un aumento del error de interpolación cuando se usan polinomios de alto grado.

Presentan, como veremos la particularidad de que pueden obtenerse de forma recursiva y también como soluciones de una cierta ecuación diferencial de segundo orden.

1. Definición de los polinomios de Tchebycheff. Propiedades básicas:

- Definición. Se pueden definir por la condición

$$T_n(x) = \cos(n.\arccos x)$$

es decir:

$$T_0(x) = \cos(0.\arccos x) = \cos(0) = 1$$
$$T_1(x) = \cos(1.\arccos x) = \cos(\arccos x) = x$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$T_n(x) = \cos(n.\arccos x)$$

- Propiedades básicas:

a) Oposición:

$$T_{-n}(x) = \cos(-n.\arccos x) = \cos(n.\arccos x) = T_n(x)$$

o sea:

$$T_{-n}(x) = T_n(x)$$

b) Suma más diferencia:

si llamamos $\phi = \arccos x$:

$$T_{n+m}(x) = \cos((n+m)\arccos x) = \cos((n+m)\phi) = \cos(n\phi + m\phi) =$$
$$= \cos(n\phi).\cos(m\phi) - sen(n\phi).sen(m\phi)$$
$$T_{n-m}(x) = \cos((n-m)\arccos x) = \cos((n-m)\phi) = \cos(n\phi - m\phi) =$$
$$= \cos(n\phi).\cos(m\phi) + sen(n\phi).sen(m\phi)$$
$$T_{n+m}(x) + T_{n-m}(x) = 2.\cos(n\phi).\cos(m\phi) = 2.T_n(x).T_m(x)$$

$$T_{n+m}(x) + T_{n-m}(x) = 2.T_n(x).T_m(x)$$

c) Una fórmula recurrente:

Si en la fórmula anterior de suma más diferencia, hacemos m=1 resulta:

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2.T_n(x).T_1(x) = 2.T_n(x).x \Rightarrow T_{n+1}(x) = 2x.T_n(x) - T_{n-1}(x)$$

$$T_{n+1}(x) = 2x.T_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Si aplicamos esta fórmula de recurrencia obtenemos en la práctica todos los polinomios de Tchebycheff partiendo desde los dos primeros:

$$T_2(x) = 2x.T_1(x) - T_0(x) = 2.x^2 - 1$$
$$T_3(x) = 2x.T_2(x) - T_1(x) = 2x.\left(2x^2 - 1\right) - x = 4x^3 - 3x$$
$$T_4(x) = 2x.T_{31}(x) - T_2(x) = 2x\left(4x^3 - 3x\right) - (2x^2 - 1) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

d) Son soluciones de una ecuación diferencial:

Si llamamos $\phi = \arccos x$, será:

$$x = \cos\phi \rightarrow 1 = -sen\phi.\phi \rightarrow \phi'' = -\frac{1}{sen\phi} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\phi}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

por tanto, si derivamos el polinomio $y = T_n(x)$:

$$y' = (T_n(x))' = (\cos(n\phi))' = -n\phi'.sen(n\phi) = n\frac{sen(n\phi)}{sen\phi}$$

y la segunda derivada:

$$y''=-n\frac{\cos(n\phi).n\phi'.sen\phi-\cos\phi.sen(n\phi)\phi'}{sen^2\phi}=\frac{-n^2\cos(n\phi)+nsen(n\phi).ctg\phi}{sen^2\phi}=$$

$$=\frac{-n^2.y}{1-x^2}+\frac{y'.\cos\phi}{1-x^2}==\frac{-n^2.y}{1-x^2}+\frac{y'.x}{1-x^2}$$

y se obtiene la ecuación diferencial

$$(1-x^2).y''-xy'+n^2y=0$$

e) Los polinomios $W_n(x)=sen(n.\arccos x)$ verifican también la ecuación diferencial de Tchebycheff:

Para comprobarlo, hagamos igual que en el caso de los polinomios $Tn(x)$ de Tchebycheff.

$$x=\cos\phi\rightarrow 1=-sen\phi.\phi\rightarrow\phi'=-\frac{1}{sen\phi}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\phi}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

derivamos el polinomio $y=W_n(x)=sen(n\phi)$:

$$y'=(W_n(x))'=(sen(n\phi))'=n\phi'.\cos(n\phi)=-n\frac{\cos(n\phi)}{sen\phi}$$

y la segunda derivada:

$$y''=-n\frac{-sen(n\phi).n\phi'.sen\phi-\cos\phi.\cos(n\phi)\phi'}{sen^2\phi}=\frac{-n^2sen(n\phi)-n\cos(n\phi).ctg\phi}{sen^2\phi}=$$

$$=\frac{-n^2.y}{1-x^2}+\frac{y'.\cos\phi}{1-x^2}=-\frac{n^2.y}{1-x^2}+\frac{y'.x}{1-x^2}$$

resultando:

$$(1-x^2).y''-xy'+n^2y=0$$

f) Los polinomios $Y_n(x)=\frac{W_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ se obtienen mediante la misma ley recurrente que permite obtener los polinomios de Tchebycheff:

Efectivamente, pues al ser $Y_n(x)=\frac{W_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{sen(n\phi)}{sen\phi}$, se tendrá:

$$W_{n+m}(x)=\frac{sen((n+m)\phi)}{sen\phi}=\frac{senn\phi.\cos m\phi+senm\phi.\cos n\phi}{sen\phi}$$

$$W_{n-m}(x)=\frac{sen((n-m)\phi)}{sen\phi}=\frac{senn\phi.\cos m\phi-senm\phi.\cos n\phi}{sen\phi}$$

$$W_{n+m}(x)+W_{n-m}(x)=\frac{2senn\phi.\cos m\phi}{sen\phi}$$

haciendo m=1:

$$W_{n+1}(x)+W_{n-1}(x)=\frac{2senn\phi.\cos\phi}{sen\phi}=2W_n(x).\cos\iota=2W_n(x).T_1(x)=2x.W_n(x)$$

y en definitiva es $\quad W_{n+1}(x)=2x.W_n(x)-W_{n-1}(x)$

Los polinomios $W_n(x)$ que se obtienen mediante esta ley recurrente (también llamados *polinomios de Tchebycheff de 2º tipo*) serían:

$$W_0(x)=\frac{sen(0.\phi)}{sen\phi}=0,\quad W_1(x)=\frac{sen(1.\phi)}{sen\phi}=1$$
$$W_2(x)=2xW_1(x)-W_0(x)=2x$$
$$W_3(x)=2xW_2(x)-W_1(x)=2x.2x-1=4x^2-1$$
$$W_4(x)=2xW_3(x)-W_2(x)=2x(4x^2-1)-2x=8x^3-4x$$

... ...
... ...

g) Las raíces de los polinomios de Tchebycheff:

Están en el intervalo [-1,1], por tratarse de cosenos trigonométricos circulares. Veamos que el conjunto de puntos dado por

$$x_j=\cos\left(\frac{2j+1}{2n}\pi\right),\quad j=0,1,...,n-1$$

son las raíces del polinomio $T_n(x)$:

$$T_n(x_j)=\cos\left(n.\arccos(x_j)\right)=\cos\left(n.\arccos\left(\cos\left(\frac{2j+1}{2n}\pi\right)\right)\right)=$$
$$=\cos\left(n.\frac{2j+1}{2n}\pi\right)=\cos\left((2j+1)\frac{\pi}{2}\right)=0$$

(ya que $(2j+1)\frac{\pi}{2}$ representa un número impar de veces la amplitud del primer cuadrante, esto es, un número impar por 90º, y tiene por tanto coseno nulo)

2. Los polinomios de Tchebycheff son ortogonales:

Teorema 2.1: Los polinomios $T_n(x)$ son ortogonales con función de peso $p(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. En el intervalo $[-1,1]$ se verifica:

$$\int_{-1}^{1} T_n(x).T_m(x).\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}0, & si\ m\neq n\\ \pi, & si\ m=n=0\\ \pi/2, & si\ m=n\neq 0\end{cases}$$

Demostración:
serán:

$$T_n(x)=\cos(n.\phi),\quad T_m(x)=\cos(m\phi)$$

con: $\cos\phi=x\rightarrow -sen\phi.d\phi=dx\rightarrow d\phi=-\frac{dx}{sen\phi}=-\frac{dx}{\sqrt{1-\cos^2\phi}}=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Se tiene, por consiguiente:

$$\int_{-1}^{1} T_n(x).T_m(x).\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\int_{x=-1}^{x=1}\cos(m\phi).\cos(n\phi).d\phi=\int_{x=1}^{x=-1}\cos(m\phi).\cos(n\phi).d\phi$$

y como es: $\cos(m\phi).\cos(n\phi)=\frac{1}{2}\left[\cos(m+n)\phi+\cos(m-n)\phi\right]$

y, asimismo el cambio de limites: $\begin{cases}x=-1\rightarrow\cos\phi=-1\rightarrow\phi=\pi\\ x=1\rightarrow\cos\phi=1\rightarrow\phi=0\end{cases}$ permite expresar la integral en la forma:

$$\int_{-1}^{1} T_n(x).T_m(x).\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left[\cos(m+n)\phi+.\cos(m-n)\phi\right].d\phi$$

que resolvemos para las diferentes alternativas de los valores de m y n:

- Si son $m\neq n$:

$$\int_{-1}^{1} T_n(x).T_m(x).\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left[\cos(m+n)\phi+.\cos(m-n)\phi\right].d\phi=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{sen(m+n)\phi}{m+n}+\frac{sen(m-n)\phi}{m-n}\right)\Bigg|_0^{\pi}=0$$

- Si son $m=n=0$:

$$\int_{-1}^{1} T_n(x).T_m(x).\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left[\cos(0)\phi + .\cos(0)\phi\right].d\phi = \int_0^{\pi} d\phi = \pi$$

- Si son $m = n \neq 0$:

$$\int_{-1}^{1} T_n(x).T_m(x).\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left[\cos(2m)\phi + .\cos(0)\phi\right].d\phi = \frac{1}{2}\left.\frac{sen(2m)\phi}{2m}\right|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\left.\phi\right|_0^{\pi} = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Teorema 2.2:

Si es $x_j = \cos\left(\frac{2j+1}{2n}\pi\right), \quad j = 0,1,...,n-1$ un conjunto de soluciones del polinomio de Tchebycheff $T_n(x)$, entonces el conjunto de polinomios de Tchbycheff $\{T_r(x)\}_{r<n}$ es ortogonal en los puntos $x_i = 0,1,...,n-1$

Demostración:

$$\sum_{j=0}^{n-1} T_l(x_j).T_m(x_j) = \sum_{j=0}^{n-1}\cos(l.car\cos(x_j)).\cos(mar\cos(xj)) = \sum_{j=0}^{n-1}\cos(l.\frac{2j+1}{2n}\pi).\cos(m\frac{2j+1}{2n}\pi) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1}\cos((2j+1)L).\cos((2j+1).M) = \sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{2}\left[\cos((2j+1)(L+M)) + \cos((2j+1)(L-M))\right]$$

(donde son $L = \frac{l\pi}{2n}$, $M = \frac{m\pi}{2n}$) [*]

de forma genérica podemos calcular aparte este tipo de sumandos. Así, considerando que es $H = \frac{h\pi}{2n}$, se tendría:

$$\sum_{j=0}^{n-1}\cos((2j+1)H) = real\sum_{j=0}^{n-1} e^{(2j+1)H.i} = real\left[\frac{e^{(2n-1).H.i}.e^{2H.i} - e^{H.i}}{e^{2H.i} - 1}\right] = real\left[e^{H.i}\,\frac{e^{2nH.i} - 1}{e^{2H.i} - 1}\right]$$

aquí nos encontramos con dos alternativas:

a) $h\ impar$: entonces $2nH.i = 2n\frac{h\pi}{2n}.i = h\pi.i \rightarrow e^{2nH.i} = e^{h\pi i} = -1 \rightarrow$

$$\to \sum_{j=0}^{n-1}\cos((2j+1)H) = real\left[e^{H.i}\,\frac{-1-1}{e^{2H.i}-1}\right] = -2.real\left[\frac{e^{H.i}}{e^{2H.i}-1}\right] = -2.real\left[\frac{e^{H.i}\left(e^{-2H.i}-1\right)}{\left(e^{2H.i}-1\right)\left(e^{-2H.i}-1\right)}\right] =$$

$$= -2.real\,\frac{e^{-H.i}-e^{H.i}}{1-e^{2H.i}-e^{-2H.i}+1} = -2.\mathrm{Re}\,al\,\frac{(\cos H - isenH)-(\cos H + isenH)}{2-(\cos 2H + isen2H)-(\cos 2H - isen2H)} =$$

$$= -2.\mathrm{Re}\,al\,\frac{-2.i.senH}{2-2.\cos 2H} = 0$$

b) $h\ par:\ 2nH.i = 2n\dfrac{h\pi}{2n}.i = h\pi.i \to e^{2nH.i} = e^{h\pi i} = 1 \to$

$$\to \sum_{j=0}^{n-1}\cos((2j+1)H) = real\left[e^{H.i}\,\frac{e^{2nH.i}-1}{e^{2H.i}-1}\right] = real\left[e^{H.i}\,\frac{1-1}{e^{2H.i}-1}\right] = 0\text{, si es } e^{2H.i} \neq 1$$

- si es $e^{2H.i} = 1 \to 2H = 2k.\pi \to 2\dfrac{h\pi}{2n} = 2k.\pi \to h = 2k.n$

$$\to \sum_{j=0}^{n-1}\cos((2j+1)H) = real\sum_{j=0}^{n-1} e^{(2j+1)H.i} = real\sum_{j=0}^{n-1} e^{(2j+1)\frac{h\pi}{2n}.i} = real\sum_{j=0}^{n-1} e^{(2j+1)\frac{2k.n\pi}{2n}.i} =$$

$$= real\sum_{j=0}^{n-1} e^{(2j+1)k.\pi.i} = real\sum_{j=0}^{n-1} e^{2jk\pi.i}.e^{k\pi.i} = real\sum_{j=0}^{n-1} 1.e^{k\pi.i} = real(n.e^{k\pi.i}) = n.\cos k\pi = n.(-1)^k$$

En resumen:

$$\sum_{j=0}^{n-1}\cos((2j+1)H) = \begin{cases} 0, & si\ h \neq 2.k.n \\ (-1)^k.n, & si\ h = 2.k.n \end{cases}$$

con lo cual ya podemos terminar el cálculo de las expresiones de [*]:

- Si $l \neq m \to L+M = \dfrac{(l+m)\pi}{2n},\ l+m \neq 2kn,\ \ L+M = \dfrac{(l-m)\pi}{2n},\ l-m \neq 2kn,$ por tanto:

$$\sum_{j=0}^{n-1} T_l(x_j).T_m(x_j) = \sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{2}\left[\cos((2j+1)(L+M)) + \cos((2j+1)(L-M))\right] = 0+0=0$$

- Si $l = m \neq 0 \to L+M = \dfrac{2l\pi}{2n} = \dfrac{l\pi}{n},\ l \neq 2kn,\ \ L-M = \dfrac{(l-l)\pi}{2n} = 0 \to l-m = 0.n$, por tanto:

$$\sum_{j=0}^{n-1} T_l(x_j).T_m(x_j) = \sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{2}\left[\cos((2j+1)(2L)) + \cos((2j+1)(0))\right] = \frac{1}{2}\left[0+(-1)^0.n\right] = \frac{n}{2}$$

- Si $l = m = 0 \to L+M = 0,\ L-M = 0$, por tanto:

$$\sum_{j=0}^{n-1} T_l(x_j).T_m(x_j) = \sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{2}\left[\cos((2j+1)(0)) + \cos((2j+1)(0))\right] = \frac{1}{2}\left[(-1)^0.n + (-1)^0 n\right] = n$$

3. Interpolación mediante polinomios de Tchebycheff:

Consideremos una función real de variable real, *y=f(x),* a interpolar en el intervalo $[-1,1]$ tomando como soporte o nodos de la interpolación las *n+1* raíces del polinomio de Tchebycheff de orden n, y como base de interpolación los *n+1* polinomios de Tchebycheff de órdenes desde 0 a n:

Nodos de interpolación: $x_j = \cos\left((2j+1).\frac{\pi}{2n}\right), \quad j = 0,1,2,...,n$

Base de interpolación: $T_0(x), T_1(x), ..., T_n(x)$

Llamemos, pues, al polinomio interpolador: $P_n(x) = c_0T_0(x) + c_1T_1(x) + ... + c_nT_n(x)$

Habiéndose de cumplir, por tanto, en los nodos, las igualdades:

$$\begin{cases} P_n(x_0) = f(x_0) \\ P_n(x_1) = f(x_1) \\ .... \\ .... \\ P_n(x_n) = f(x_n) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_0T_0(x_0) + c_1T_1(x_0) + ... + c_nT_n(x_0) = & f(x_0) \\ c_0T_0(x_1) + c_1T_1(x_1) + ... + c_nT_n(x_1) = & f(x_1) \\ ...\ ...\ ...\ ......\ ......\ ......\ ......\ ... & ...\ ... \\ ...\ ......\ ......\ ......\ ......\ ......\ ... & ...\ ... \\ c_0T_0(x_n) + c_1T_1(x_n) + ... + c_nT_n(x_n) = & f(x_n) \end{cases}$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} T_0(x_0) & T_1(x_0) ... T_n(x_0) \\ T_0(x_1) & T_1(x_1) ... T_n(x_1) \\ ... \ ... & ... \ ... \ ... \ ... \\ ... \ ... & ... \ ... \ ... \ ... \\ T_0(x_n) & T_1(x_n) ... T_n(x_n) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ ... \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ ... \\ ... \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

o sea, $T.C = F$ donde es T la matriz de interpolación, C la matriz columna de los coeficientes del polinomio interpolador, y F la matriz columna de los valores de la función interpolada en los nodos de interpolación.

Para obtener los coeficientes del polinomio interpolador hemos de invertir la matriz de interpolación T para obtener: $C = T^{-1}.F$:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ ... \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_0(x_0) & T_1(x_0) ... T_n(x_0) \\ T_0(x_1) & T_1(x_1) ... T_n(x_1) \\ ... \ ... & ... \ ... \ ... \ ... \\ ... \ ... & ... \ ... \ ... \ ... \\ T_0(x_n) & T_1(x_n) ... T_n(x_n) \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ ... \\ ... \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

Como el producto de dos matrices inversas es la matriz identidad, se tendrá $T^{-1}.T = I$

Ahora bien, el producto de la matriz traspuesta T' por la matriz T es:

$$\begin{bmatrix} T_0(x_0) & T_0(x_1) \dots T_0(x_n) \\ T_1(x_0) & T_1(x_1) \dots T_1(x_n) \\ \dots & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dots & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ T_n(x_0) & T_n(x_1) \dots T_n(x_n) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} T_0(x_0) & T_1(x_0) \dots T_n(x_0) \\ T_0(x_1) & T_1(x_1) \dots T_n(x_1) \\ \dots & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dots & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ T_0(x_n) & T_1(x_n) \dots T_n(x_n) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n} T_0(x_i)T_0(x_i) & \sum_{i=0}^{n} T_0(x_i)T_1(x_i) \dots. \quad \dots & \dots \sum_{i=0}^{n} T_0(x_i)T_n(x_i) \\ \sum_{i=0}^{n} T_1(x_i)T_0(x_i) & \sum_{i=0}^{n} T_1(x_i)T_1(x_i) \dots \quad \dots & .. \sum_{i=0}^{n} T_1(x_i)T_n(x_i) \\ & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots & \\ & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots & \\ \sum_{i=0}^{n} T_n(x_i)T_0(x_i) & \sum_{i=0}^{n} T_n(x_i)T_1(x_i) & \sum_{i=0}^{n} T_n(x_i)T_n(x_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (n+1) & 0 \quad \dots \quad \dots \quad 0 \\ 0 & \frac{n+1}{2} \quad \dots \quad \dots \quad 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dots \quad \dots \quad \dots & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ 0 & 0 \quad \dots \quad \dots \quad \frac{n+1}{2} \end{bmatrix}$$

Esto es, si en lugar de tomar como base de interpolación $T_0(x), T_1(x), \dots, T_n(x)$ tomásemos $\frac{1}{\sqrt{2}} T_0(x), T_1(x), \dots, T_n(x)$, se tendría:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} T_0(x_0) & \frac{1}{\sqrt{2}} T_0(x_1) \dots \frac{1}{\sqrt{2}} T_0(x_n) \\ T_1(x_0) & .. T_1(x_1) \dots\dots\dots .. T_1(x_n) \\ \dots \quad \dots \quad \dots & \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dots \quad \dots \quad \dots & \dots \quad \dots \quad \dots \\ T_n(x_0) & .. T_n(x_1) \dots\dots\dots .. T_n(x_n) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} T_0(x_0) & T_1(x_0) \dots T_n(x_0) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} T_0(x_1) & T_1(x_1) \dots T_n(x_1) \\ \dots \quad \dots \quad \dots & \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dots \quad \dots \quad \dots & \dots \quad \dots \quad \dots \\ \frac{1}{\sqrt{2}} T_0(x_n) & T_1(x_n) \dots T_n(x_n) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} T_0(x_i)T_0(x_i) & 0 \quad \dots. \quad \dots \quad \dots 0 \\ 0 & \sum_{i=0}^{n} T_1(x_i)T_1(x_i) \dots \quad \dots \quad \dots \quad 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots & \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dots \quad \dots \quad \dots & \dots \quad \dots \quad \dots \\ 0 \quad\quad 0 & \dots \quad \dots \quad . \quad . \quad \sum_{i=0}^{n} T_n(x_i)T_n(x_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n+1}{2} & 0 \quad \dots \quad \dots \quad 0 \\ 0 & \frac{n+1}{2} \quad \dots \quad \dots \quad 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dots \quad \dots \quad \dots & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ 0 & 0 \quad \dots \quad \dots \quad \frac{n+1}{2} \end{bmatrix} = \frac{n+1}{2}.I$$

Por tanto, en este caso, será: $T'.T = \frac{n+1}{2} I \to \left[\frac{2}{n+1} T' \right] .T = I$, y al identificar con $T^{-1}.T = I$ obtenemos $T^{-1} = \frac{2}{n+1} T'$

Por lo cual, teniendo en cuenta que $T_0(x) = 1$:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & T_1(x_0) \ldots T_n(x_0) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & T_1(x_1) \ldots T_n(x_1) \\ \ldots & \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ \ldots & \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & T_1(x_n) \ldots T_n(x_n) \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \ldots \\ \ldots \\ f(x_n) \end{bmatrix} = \frac{2}{n+1} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \ldots\ldots\ldots & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ T_1(x_0) & T_1(x_1) & \ldots & T_1(x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ T_n(x_0) & T_n(x_1) & \ldots & T_n(x_n) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \ldots \\ \ldots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

y el polinomio interpolador resulta ser:

$$P_n(x) = c_0 \frac{1}{\sqrt{2}} T_0(x) + c_1 T_1(x) + \ldots + c_n T_n(x) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, T_1(x), \ldots, T_n(x) \right] . \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \ldots \\ \ldots \\ c_n \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{2}{n+1} \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, T_1(x), \ldots, T_n(x) \right] . \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \ldots\ldots\ldots & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ T_1(x_0) & T_1(x_1) & \ldots & T_1(x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ T_n(x_0) & T_n(x_1) & \ldots & T_n(x_n) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \ldots \\ \ldots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

Ejemplos:

a) Polinomio interpolador de Tchebycheff de orden 1 (n=1):

$$P_n(x) = \frac{2}{1+1} \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, T_1(x) \right] . \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ T_1(x_0) & T_1(x_1) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \end{bmatrix} = \left[\frac{1}{2} + x_0.x, \ \frac{1}{2} + x_1.x \right] . \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \end{bmatrix} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + x_0.x \right) .f(x_0) + \left(\frac{1}{2} + x_1.x \right) f(x_1) = [x_0.f(x_0) + x_1 f(x_1)].x + \frac{1}{2} \left(f(x_0) + f(x_1) \right)$$

b) Polinomio interpolador de Tchebycheff de orden 2 (n=2):

$$P_n(x) = \frac{2}{2+1}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, T_1(x), T_2(x)\right] \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ T_1(x_0) & T_1(x_1) & T_1(x_2) \\ T_2(x_0) & T_2(x_1) & T_2(x_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, x, 2x^2 - 1\right] \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ 2x_0^2 - 1 & 2x_1^2 - 1 & 2x_2^2 - 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{1}{2} + x_0 x + \left(2x_0^2 - 1\right)\left(2x^2 - 1\right), \quad \frac{1}{2} + x_1 x + \left(2x_1^2 - 1\right)\left(2x^2 - 1\right), \quad \frac{1}{2} + x_2 x + \left(2x_2^2 - 1\right)\left(2x^2 - 1\right)\right] \cdot \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \end{bmatrix}$$

4. Bibliografía:

Apóstol, T.M., Calculus, Editorial Reverté, Barcelona, 1970

Rey Pator, Y., Calleja, P., Trejo, C.,Análisis Matemático, Editorial Kapeluz, Buenos Aires, 1957

Henrici, P., Elements of Numerical Análisis, John Wiley, N. York, 1964

Scheid, F., Análisis numérico, Mc Graw-Hill, Madrid, 1972