Reducción de ecuaciones diferenciales lineales en derivadas parciales con coeficientes constantes. Los tipos canónicos

Reduction of linear differential equations in partial derivatives with constant coefficients. The canonical types

Carlos S. Chinea

Resumen

En una gran mayoría de las cuestiones y desarrollos de la Física que necesitan de las ecuaciones en derivadas parciales ocurre que para su tratamiento son suficientes las ecuaciones lineales de segundo orden, con coeficientes constantes en general. La dificultad de la integración de estas ecuaciones disminuye cuando no aparece en ellas el término de la derivada mixta. Veremos aquí cómo, mediante elementales cambios de variables, es posible reducir cualquier ecuación en derivadas parciales de segundo orden con coeficientes constantes a una forma equivalente en la que ya no aparezca tal derivada. A estas ecuaciones reducidas se acostumbra a llamar *formas canónicas* de la ecuación, y, según el valor de los coeficientes, pueden aparecer en tres formas o tipos distintos, denominados *tipos canónicos*.

Summary

In a large majority of issues and developments in physics that require partial differential equations their treatment is sufficient with second order linear equations with constant coefficients, in general. The difficulty of integrating these equations decreases when the term of mixed derivatives does not appear in them. We will see how, by means of elementary variable changes, it is possible to reduce any second order partial derivatives equation, with constant coefficients, to an equivalent form in which such derivatives no longer appear. The resulting reduced equations are customary called canonical forms of the equation, and, according to the value of the coefficients, they can appear in three different forms or types, called canonical types.

Palabras clave

Diferencial, derivadas, canónicos, reducidas, parciales, ecuación, mixta, lineal, tipos, elíptico, hiperbólico, parabólico

Keywords

Differential, derivatives, canonical, reduced, partial, equation, mixed, linear, types, elliptical, hyperbolic, parabolic

0. Introducción. Definiciones generales

Una ecuación diferencial en derivadas parciales de orden h y en n variables independientes $x_1,...,x_n$ viene dada por una expresión del tipo

$$\phi\left(\frac{\partial^k z}{\partial x_l^p \partial x_m^q}, f_j(x_1,...,x_n), z\right) = 0, \quad l,m = 1,...,n; \quad k = 0,1,...,h, \quad p+q = k$$

donde las $\frac{\partial^k z}{\partial x_l^p \partial x_m^q}$ son derivadas parciales de una cierta función z de las variables independientes con orden k, y las $f_j(x_1,...,x_n),\ j = 0,1,...,r$ son funciones reales de dichas variables.

Si la ecuación diferencial es lineal:

$$\sum_{j=0}^{h} f_{lmj}(x_1,...,x_n).\frac{\partial^j z}{\partial x_l^p \partial x_m^q} = \mu(x_1,...,x_n)$$

diremos que se trata de una ecuación diferencial lineal en derivadas parciales de orden h y n variables. Los términos en que $p \neq 0, q \neq 0$ se denominan derivadas mixtas.

Será homogénea si tiene término independiente nulo: $\mu(x_1,...,x_n) = 0$

$$\sum_{j=0}^{h} f_{lmj}(x_1,...,x_n).\frac{\partial^j z}{\partial x_l^p \partial x_m^q} = 0$$

Ejemplos de ecuaciones lineales en derivadas parciales

1) La ecuación

$$f_0(x_1,x_2).z + f_1(x_1,.x_2).\frac{\partial z}{\partial x_1} + f_2(x_1,.x_2).\frac{\partial z}{\partial x_2} = \mu(x_1,x_2)$$

es una ecuación diferencial lineal completa en derivadas parciales de primer orden y 2 variables independientes

2) La ecuación

$$f_0(x_1,x_2).z + f_1(x_1,.x_2).\frac{\partial z}{\partial x_1} + f_2(x_1,.x_2).\frac{\partial z}{\partial x_2} = 0$$

es una ecuación diferencial lineal homogénea en derivadas parciales de primer orden y 2 variables independientes

3) La ecuación

$$f_1(x_1,x_2).\frac{\partial z}{\partial x_1} + f_2(x_1,x_2).\frac{\partial z}{\partial x_2} + f_3(x_1,x_2).\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + f_4(x_1,x_2).\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} +$$
$$+ f_5(x_1,x_2).\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + f_0(x_1,x_2).z = \mu(x_1,.x_2)$$

es una ecuación diferencial lineal completa en derivadas parciales de segundo orden y 2 variables independientes. El término cuarto corresponde a la derivada mixta:

$$f_4(x_1,x_2).\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}$$

4) La ecuación

$$f_1(x_1,x_2).\frac{\partial z}{\partial x_1}+f_2(x_1,x_2).\frac{\partial z}{\partial x_2}+f_3(x_1,x_2).\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}+f_4(x_1,x_2).\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}+$$
$$+f_5(x_1,x_2).\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}+f_0(x_1,x_2).z=0$$

es una ecuación diferencial lineal homogénea en derivadas parciales de segundo orden y 2 variables independientes.

5) La ecuación

$$A\frac{\partial z}{\partial x_1}+B\frac{\partial z}{\partial x_2}+Cz=\mu(x_1,x_2)$$

representa una ecuación diferencial lineal completa de primer orden en derivadas parciales con dos variables y coeficientes constantes A,B,C.

6) La ecuación

$$A\frac{\partial z}{\partial x_1}+B\frac{\partial z}{\partial x_2}+Cz=0$$

es la ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden en derivadas parciales con dos variables y coeficientes constantes A,B,C.

7) La ecuación

$$A\frac{\partial z}{\partial x_1}+B\frac{\partial z}{\partial x_2}+C\frac{\partial z}{\partial x_3}+Dz=\mu(x_1,x_2,x_3)$$

es una ecuación diferencial lineal completa de primer orden en derivadas parciales con tres variables y coeficientes constantes A,B,C,D.

8) La ecuación

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}+B\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}+C\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}+E\frac{\partial z}{\partial x_1}+F\frac{\partial z}{\partial x_2}+Gz=H$$

es la ecuación diferencial lineal completa de segundo orden en derivadas parciales con dos variables independientes y coeficientes constantes A,B,C,E,F,G,H.

1. Las ecuaciones lineales de segundo orden. Expresiones canónicas

Una ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden y coeficientes constantes se dice expresada en la *forma canónica* si tiene nulo el término de la derivada mixta:

$$m_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + m_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + m_3 \frac{\partial z}{\partial x_1} + m_4 \frac{\partial z}{\partial x_2} + m_5 z = m$$

Una ecuación diferencial lineal en derivadas parciales expresada en forma canónica se dice que es de <u>tipo hiperbólico</u> si los dos primeros coeficientes son no nulos y con signo diferente:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} - \varphi \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \alpha \frac{\partial z}{\partial x_1} + \beta \frac{\partial z}{\partial x_2} + \gamma z = \rho \qquad (\varphi > 0)$$

Una ecuación diferencial lineal en derivadas parciales expresada en forma canónica se dice que es de <u>tipo elíptico</u> si los dos primeros coeficientes son no nulos y con el mismo signo:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \varphi \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \alpha \frac{\partial z}{\partial x_1} + \beta \frac{\partial z}{\partial x_2} + \gamma z = \rho \qquad (\varphi > 0)$$

Una ecuación diferencial lineal en derivadas parciales expresada en forma canónica se dice que es de <u>tipo parabólico</u> si uno de los dos primeros coeficientes es nulo:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \alpha \frac{\partial z}{\partial x_1} + \beta \frac{\partial z}{\partial x_2} + \gamma z = \rho$$

2. La reducción a los tipos canónicos de la ecuación diferencial de segundo orden

Consideremos la ecuación lineal general completa de segundo orden en derivadas parciales y 2 variables independientes

$$A.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + E.\frac{\partial z}{\partial x} + F.\frac{\partial z}{\partial y} + G.z = H \qquad [1]$$

que podemos simbolizar por

$$(A.D_x^2 + B.D_{xy}^2 + C.D_y^2 + E.D_x + F.D_y + G)z = H$$

Podemos, mediante un adecuado cambio de variables, reducirla haciendo que algunos de los términos de la misma se anulen. Veremos que según sea el valor de los coeficientes, se obtiene un tipo de ecuación reducida diferente, esto es, un tipo canónico diferente. El proceso requiere en cada caso elegir las nuevas variables en función de los coeficientes de la ecuación general antedicha. En concreto, bastará estudiar el discriminante que definen tres de los coeficientes de la ecuación para tener ecuaciones reducidas de uno u otro tipo canónico.

Consideremos en principio un cambio general de variables:

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

Y obtengamos la ecuación general en función de las nuevas variables:

$$e = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}u_x + \frac{\partial z}{\partial v}v_x$$

$$f = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}u_y + \frac{\partial z}{\partial v}v_y$$

$$a = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial e}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}u_x + \frac{\partial z}{\partial v}v_x\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}u_x + \frac{\partial z}{\partial v}v_x\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}u_x + \frac{\partial z}{\partial v}v_x\right)\frac{\partial v}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}u_x + \frac{\partial z}{\partial v}v_x\right)u_x + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}u_x + \frac{\partial z}{\partial v}v_x\right)v_x =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}u_x^2 + \frac{\partial z}{\partial u}u_{xx} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}u_x v_x + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}v_x^2 + \frac{\partial z}{\partial v}v_{xx}$$

$$c = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}u_y + \frac{\partial z}{\partial v}v_y\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}u_y + \frac{\partial z}{\partial v}v_y\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}u_y + \frac{\partial z}{\partial v}v_y\right)\frac{\partial v}{\partial y} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}u_y + \frac{\partial z}{\partial v}v_y\right)u_y + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}u_y + \frac{\partial z}{\partial v}v_y\right)v_y =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}u_y^2 + \frac{\partial z}{\partial u}u_{yy} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}u_y v_y + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}v_y^2 + \frac{\partial z}{\partial v}v_{yy}$$

$$b = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)u_y + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)v_y = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}u_x + \frac{\partial z}{\partial v}v_x\right)u_y + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}u_x + \frac{\partial z}{\partial v}v_x\right)v_y =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}u_x u_y + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}u_y v_x + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}u_x v_y + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}v_x v_y + \frac{\partial z}{\partial u}u_{xy} + \frac{\partial z}{\partial v}v_{xy} =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}u_x u_y + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\left(u_y v_x + u_x v_y\right) + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}v_x v_y + \frac{\partial z}{\partial u}u_{xy} + \frac{\partial z}{\partial v}v_{xy}$$

Si sustituimos estas expresiones en la ecuación diferencial lineal [1]:

$$Aa + Bb + Cc + Ee + Ff + Gz = H \to A\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}u_x^2 + \frac{\partial z}{\partial u}u_{xx} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}u_x v_x + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}v_x^2 + \frac{\partial z}{\partial v}v_{xx}\right) +$$

$$+B\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}u_x u_y + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\left(u_y v_x + u_x v_y\right) + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}v_x v_y + \frac{\partial z}{\partial u}u_{xy} + \frac{\partial z}{\partial v}v_{xy}\right) +$$

$$+C\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}u_y^2+\frac{\partial z}{\partial u}u_{yy}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}u_y v_y+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}v_y^2+\frac{\partial z}{\partial v}v_{yy}\right)+E\left(\frac{\partial z}{\partial u}u_x+\frac{\partial z}{\partial v}v_x\right)+$$

$$+F\left(\frac{\partial z}{\partial u}u_y+\frac{\partial z}{\partial v}v_y\right)+Gz=H$$

reordenando términos obtenemos:

[3]

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(A.u_x^2+B.u_x u_y+C.u_y^2\right)+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\left(A.u_x v_x+\frac{1}{2}B.(u_y v_x+u_x v_y)+Cu_y v_y\right)+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(A.v_x^2+Bv_x v_y+C.v_y^2\right)+$$

$$+\frac{\partial z}{\partial u}\left(A.u_{xx}+B.u_{xy}+C.u_{yy}+E.u_x+F.u_y\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(A.v_{xx}+B.v_{xy}+C.v_{yy}+E.v_x+F.v_y\right)+G.z=H$$

Para que se anulen los términos primero y tercero deben ser cero los correspondientes coeficientes de la derivada segunda:

$$A.u_x^2+B.u_x u_y+C.u_y^2=0$$
$$A.v_x^2+Bv_x v_y+C.v_y^2=0$$

que representan en ambos casos una ecuación de segundo grado de la forma

$$A.\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+B\frac{\partial\varphi}{\partial y}.\frac{\partial\varphi}{\partial x}+C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2=0$$

cuyo discriminante, considerada como ecuación de segundo grado respecto a la incógnita $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ es:

$$\left(B\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2-4.A.C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2=(B^2-4.A.C).\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2$$

Obviamente, este discriminante puede ser positivo, negativo o nulo:

$$B^2-4.A.C>0,\quad B^2-4.A.C<0,\quad B^2-4.A.C=0$$

Obteniéndose las dos ecuaciones que resultan de resolver la ecuación de segundo grado:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{-B\frac{\partial\varphi}{\partial y}\pm\sqrt{B^2-4.A.C}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{2.A}$$

Si es $B^2-4.A.C>0$ veremos que se trata de ecuaciones diferenciales de tipo Hiperbólico:

$$\begin{cases}2.A\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\left(B-\sqrt{B^2-4.A.C}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0\\[2ex]2.A\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\left(B+\sqrt{B^2-4.A.C}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0\end{cases}$$

Si es $B^2-4.A.C<0$ comprobaremos que corresponde a ecuaciones diferenciales de tipo Elíptico:

$$\begin{cases} 2.A\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\left(B-i\sqrt{-B^2+4.A.C}\right)\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \\ 2.A\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\left(B+i\sqrt{-B^2+4.A.C}\right)\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \end{cases}$$

Si es $B^2-4.A.C=0$ se tratará de las ecuaciones diferenciales de tipo Parabólico. En este caso el cambio anterior no resulta válido, pues las dos ecuaciones que aparecen son la misma:

$$\begin{cases} 2.A\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+B\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \\ 2.A\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+B\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \end{cases}$$

Veremos luego, al hacer el estudio caso por caso, que para esta situación de discriminante nulo podemos ensayar un cambio de variables más simple.

a) Ecuaciones diferenciales de *Tipo Hiperbólico* ($B^2-4.A.C>0$):

Si el discriminante es positivo, $B^2-4.A.C>0$, se obtienen dos ecuaciones en derivadas parciales lineales al resolver:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{-B\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\pm\sqrt{B^2-4.A.C}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}}{2.A}$$

esto es:

$$\begin{cases} 2.A\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\left(B-\sqrt{B^2-4.A.C}\right)\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \\ 2.A\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\left(B+\sqrt{B^2-4.A.C}\right)\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \end{cases}$$

Si en el cambio general de variables elegimos las funciones del cambio de forma que vengan dadas por $u=u(x,y),\ v=v(x,y)$ de manera que una verifique la primera ecuación y la otra la segunda, se conseguirá que los términos primero y tercero de la ecuación general se anulan, con lo que quedará:

$$M\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+N\frac{\partial z}{\partial u}+Q\frac{\partial z}{\partial v}+G.z=H$$

donde hemos llamado

$$M=2A.u_xv_x+B.(u_yv_x+u_xv_y)+2Cu_yv_y$$
$$N=A.u_{xx}+B.u_{xy}+C.u_{yy}+E.u_x+F.u_y$$
$$Q=A.v_{xx}+B.v_{xy}+C.v_{yy}+E.v_x+F.v_y$$

y que podemos escribir, dividiendo por el primer coeficiente M, de la forma:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \eta \frac{\partial z}{\partial u} + \upsilon \frac{\partial z}{\partial v} + \lambda . z = \kappa$$

que es ya la expresión canónica de las ecuaciones diferenciales lineales en derivadas parciales de segundo orden de tipo hiperbólico. Podemos escribir otra expresión equivalente de esta expresión canónica en la que no aparece la derivada mixta, haciendo un sencillo cambio de variables. Veámoslo a continuación:

$$\varphi = \frac{1}{2}(u+v), \quad \theta = \frac{1}{2}(u-v)$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial u} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\right), \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial v} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi} - \frac{\partial z}{\partial \theta}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi} - \frac{\partial z}{\partial \theta}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi} - \frac{\partial z}{\partial \theta}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi} - \frac{\partial z}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi} - \frac{\partial z}{\partial \theta}\right)\right]\right\} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}\right)$$

con lo que al sustituir, el tipo canónico queda en la forma:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}\right) + \eta \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\right) + \upsilon \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi} - \frac{\partial z}{\partial \theta}\right) + \lambda . z = \kappa$$

o bien, reordenando:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + (2\eta + 2\upsilon)\frac{\partial z}{\partial \varphi} + (2\eta - 2\upsilon)\frac{\partial z}{\partial \theta} + 4\lambda . z = 4\kappa$$

en definitiva:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \alpha \frac{\partial z}{\partial \varphi} + \beta \frac{\partial z}{\partial \theta} + \gamma . z = \rho$$

b) Ecuaciones diferenciales de *Tipo Elíptico* ($B^2 - 4.A.C < 0$):

Si el discriminante es negativo, $B^2 - 4.A.C < 0$, se obtienen dos ecuaciones en derivadas parciales lineales con componentes imaginarias:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{-B\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \pm i\sqrt{B^2 - 4.A.C}\,\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}}{2.A}$$

esto es:

$$\begin{cases} 2.A\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\left(B-i\sqrt{B^2-4.A.C}\right)\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \\ 2.A\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\left(B+i\sqrt{B^2-4.A.C}\right)\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \end{cases}$$

las soluciones de ambas ecuaciones complejas conjugadas son también funciones complejas conjugadas, $u=\omega+i\psi,\quad v=\omega-i\psi$ $\left(\omega=\frac{1}{2}(u+v),\quad \psi=\frac{1}{2i}(u-v)\right)$ tales que una verifica la primera ecuación y la otra la segunda. Se conseguirá al igual que en el tipo anterior, que los términos primero y tercero de la ecuación general se anulen, con lo que quedará, como ya hemos visto antes:

$$M\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+N\frac{\partial z}{\partial u}+Q\frac{\partial z}{\partial v}+G.z=H$$

que, al sustituir las derivadas parciales

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial\omega}\frac{\partial\omega}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial u}=\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial\omega}+\frac{1}{2i}\frac{\partial z}{\partial\psi},\qquad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial\omega}\frac{\partial\omega}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial v}=\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial\omega}-\frac{1}{2i}\frac{\partial z}{\partial\psi}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)+\frac{1}{2i}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial\omega}-\frac{1}{2i}\frac{\partial z}{\partial\psi}\right)+$$
$$+\frac{1}{2i}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial\omega}-\frac{1}{2i}\frac{\partial z}{\partial\psi}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial\omega^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial\psi^2}\right)$$

se tiene:

$$M\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial\omega^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial\psi^2}\right)+N\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial\omega}+N\frac{1}{2i}\frac{\partial z}{\partial\psi}+Q\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial\omega}-Q\frac{1}{2i}\frac{\partial z}{\partial\psi}+Gz=H\rightarrow$$
$$\rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial\omega^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial\psi^2}+\frac{2}{M}(N+Q)\frac{\partial z}{\partial\omega}+\frac{2i}{M}(-N+Q)\frac{\partial z}{\partial\psi}+Gz=H$$

y se tiene, finalmente

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial\omega^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial\psi^2}+\alpha\frac{\partial z}{\partial\omega}+\beta\frac{\partial z}{\partial\psi}+\gamma z=\rho}$$

que es la expresión canónica de las ecuaciones diferenciales lineales en derivadas parciales de segundo orden de tipo elíptico.

c) Ecuaciones diferenciales de *Tipo Parabólico* ($B^2-4.A.C=0$):

Si el discriminante es nulo, $B^2-4.A.C=0$, los cambios de variable anteriores no funcionan al aplicárselos a la ecuación general [3], pues aparece una sola ecuación. Sin embargo si podemos ensayar un cambio más sencillo:

$$\begin{cases} u = u(x,y) = x \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

con lo que obtendremos:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 1,\ u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = 0,\ v_x = \frac{\partial v}{\partial x},\ v_y = \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ u_{yy} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0,\ v_{xx} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\ v_{yy} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

$$u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0,\ v_{xy} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

$$e = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} v_x, \quad f = \frac{\partial z}{\partial v} v_y, \quad a = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} v_x + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} v_x^2 + \frac{\partial z}{\partial v} v_{xx}$$

$$c = \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} v_y^2 + \frac{\partial z}{\partial v} v_{yy}, \quad b = \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} v_y + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} v_x v_y + \frac{\partial z}{\partial v} v_{xy}$$

Y al sustituir estas expresiones en la ecuación diferencial lineal [1]:

$$Aa + Bb + Cc + Ee + Ff + Gz = H \rightarrow A\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} v_x + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} v_x^2 + \frac{\partial z}{\partial v} v_{xx}\right) +$$

$$+B\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} v_y + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} v_x v_y + \frac{\partial z}{\partial v} v_{xy}\right) + C\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} v_y^2 + \frac{\partial z}{\partial v} v_{yy}\right) + E\left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} v_x\right) +$$

$$+F\frac{\partial z}{\partial v} v_y + Gz = H$$

Reordenando:

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\left(A.v_x + \frac{1}{2}B.v_y\right) + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(A.v_x^2 + B.v_x.v_y + C.v_y^2\right) + E\frac{\partial z}{\partial u} +$$

$$+\frac{\partial z}{\partial v}\left(A.v_{xx} + B.v_{xy} + C.v_{yy} + E.v_x + Fv_y\right) + Gz = H$$

Elegimos ahora la función $v = v(x,y)$ de modo que se anule el término correspondiente a la derivada mixta: $A.v_x + \frac{1}{2}B.v_y = 0$. Lo cual implica que también se anulará su cuadrado:

$$\left(A.v_x + \frac{1}{2}B.v_y\right)^2 = 0 \rightarrow A^2 v_x^2 + A.B.v_x.v_y + \frac{1}{4}B^2.v_y^2 = 0 \rightarrow Av_x^2 + B.v_x.v_y + \frac{B^2}{4A}v_y^2 = 0$$

y como, por hipótesis, es $B^2 - 4.A.C = 0$, se tiene que es $Av_x^2 + B.v_x.v_y + Cv_y^2 = 0$, con lo que también se anula el término tercero de la ecuación diferencial construida: $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(A.v_x^2 + B.v_x.v_y + C.v_y^2\right) = 0$, resultando en definitiva:

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+E\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\left(A.v_{xx}+B.v_{xy}+C.v_{yy}+E.v_x+Fv_y\right)+Gz=H$$

y finalmente

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\alpha\frac{\partial z}{\partial u}+\beta\frac{\partial z}{\partial v}+\gamma z=\rho}$$

que es la expresión canónica de las ecuaciones diferenciales lineales en derivadas parciales de segundo orden de tipo parabólico.

d) Los casos de más de dos variables independientes:

El proceso indicado anteriormente sigue siendo válido cuando el número de variables independientes es mayor a dos. Así, en el caso de que la ecuación diferencial en derivadas parciales tenga, por ejemplo, tres variables independientes, x_1, x_2, x_3, se tendría:

$$m_1\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}+m_2\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}+m_3\frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2}+m_4\frac{\partial z}{\partial x_1}+m_5\frac{\partial z}{\partial x_2}+m_6\frac{\partial z}{\partial x_3}+m_7 z=m$$

donde los $m, m_i,\ i=1,2,...$ son coeficientes constantes.

Siendo:

- De tipo hiperbólico si los tres primeros coeficientes, m_1, m_2, m_3, no son del mismo signo.
- De tipo elíptico si estos tres coeficientes son del mismo signo.
- De tipo parabólico si alguno de los tres primeros coeficientes se anula.

3. Aplicaciones a la física:

Las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales lineales aparecen en muchas cuestiones de la física ante la necesidad de efectuar modelados matemáticos de situaciones y problemas concretos. Aunque existen en la actualidad problemas que necesitan ecuaciones lineales en derivadas parciales de mayor orden, los tipos canónicos estudiados aquí son realmente los que con frecuencia aparecen en la modelación de los problemas clásicos y también de muchas cuestiones de la actual mecánica cuántica. Son corrientes los problemas de la propagación del sonido, propagación del calor, dinámica de fluidos, ecuaciones de ondas, elasticidad, electrodinámica clásica y cuántica, etc.. En particular, las ecuaciones de segundo orden con coeficientes constantes que hemos tratado en este texto se involucran en la mayor parte de los problemas de la física.

Así, podemos observar algunos ejemplos muy notables:

- Ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 z=0\rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial w^2}=0$$

es una ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden y tres variables, homogénea de tipo elíptico y con coeficientes constantes.

- Ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 z = f \rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial w^2} = f(x,y,w)$$

es una ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden y tres variables, no homogénea de tipo elíptico y con coeficientes constantes.

- Ecuación de ondas:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 z = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial w^2} \right) = 0$$

es una ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden y cuatro variables, homogénea de tipo hiperbólico y con coeficientes constantes.

- Ecuaciones de difusión:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = k \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{k} \frac{\partial z}{\partial t} = 0$$

son ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de segundo orden y dos variables, homogéneas de tipo parabólico y con coeficientes constantes.

- Ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 z = k^2 z \rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial w^2} - k^2 z = 0$$

es una ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden y tres variables, homogénea de tipo elíptico y con coeficientes constantes.

4. Bibliografía:

Dou, A.; Ecuaciones diferenciales ordinarias, Editorial Dossat, 1964, Madrid
Dou, A.; Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y su resolución numérica, Editorial Dossat, 1964, Madrid.
Hadamard, J.; La théorie des équations aux dérivées partielles, Gauthiers-Villars, 1964, Paris.
Folland, G. B.; Introduction to Partial Differential Equations, Mathematical Notes, Princeton Univ. Press 1976.
Schwartz, L.; Métodos matemáticos para las ciencias físicas, Selecciones Científicas, 1969, Madrid
Weinberger, H.F.; Curso de Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, Editorial Reverté, 1986, Barcelona