DERIVANDO SUCESIVAMENTE. EL DESARROLLO DE TAYLOR

SEVILLA, 2004

Introducción:

Sabemos que:

- Una función f(x) es continua en un punto x_0 si y solo si el limite de la función en ese punto coincide con $f(x_0)$:

$$f(x) \ continua \ en \ el \ punto \ x_0 \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) \to 0$$

o bien:

$$f(x) \ continua \ en \ el \ punto \ x_0 \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) \in \theta(x - x_0)^0$$

- Una función f(x) es derivable en un punto x_0 si y solo si la recta tangente en ese punto coincide con $f(x_0)$:

$$f(x) \ derivable \ en \ el \ punto \ x_0 \Leftrightarrow \frac{f(x) - \left[f(x) + f'(x_0)(x - x_0)\right]}{x - x_0} \to 0$$

o bien

$$f(x) \ derivable \ en \ el \ punto \ x_0 \Leftrightarrow f(x) - \left[f(x) + f'(x_0)(x - x_0)\right] \in \theta(x - x_0)'$$

Estos conceptos podemos extenderlos a un orden mayor:

Si es *f: (a,b) → R*, ¿existe un polinomio p(x) de grado n tal que verifica esto?:

$$\frac{f(x) - p(x)}{(x - x_0)^n} \to 0, \quad o \ bien \quad f(x) - p(x) \in \theta(x - x_0)^n$$

Definición:

Dada una función *f: (a,b) → R* derivable, diremos que f es 2-veces derivable si su derivada *f': (a,b) → R* es a su vez derivable. En tal caso denotamos por la derivada segunda de f por:

$$f''(x) = (f')'(x)$$

Por inducción, si una función f es n-veces derivable (n∈N), se dice que f es (n+1)-veces derivable si la derivada n-sima es derivable y entonces:

$$f^{n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x)$$

Podemos usar, según esto, la notación f^0 para la función sin derivar: $f^0=f$.

Expresión de un polinomio cualquiera como potencias de $x-x_0$:

Todo polinomio de grado n∈N, $p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \ (a_j \in R)$, también es representable mediante potencias de $x-x_0$.

Es decir, dado un polinomio p(x) y un $x_0 \in R$ fijo, existen coeficientes b_0, b_1, ..., b_n tales que

$$p(x) = b_0 + b_1.(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + ... + b_n(x - x_0)^n$$

Demostración:

Consideremos las derivadas sucesivas de p(x):

$$\begin{aligned}
&p'(x) = b_1 + 2.b_2(x - x_0) + 3.b_3(x - x_0)^2 + ... + n.b_n.(x - x_0)^{n-1} \\
&p''(x) = 2b_2 + 2.3.b_3(x - x_0) + ... + (n-1).n.(x - x_0)^{n-2} \\
&... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\
&... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\
&p^{(n-1)}(x) = 2.3...(n-1).b_{n-1} + 2.3...n.b_n.(x - x_0) \\
&p^{(n)}(x) = 2.3...n.b_n
\end{aligned}$$

Haciendo $x=x_0$:

$$\begin{aligned}
&p(x_0) = b_0, \quad p'(x_0) = b_1, \quad p''(x_0) = 2.b_2, \quad ... \\
&... \quad p^{(n-1)}(x_0) = 2.3....(n-1).b_{n-1}, \quad p^{(n)}(x_o) = 2.3....n.b_n
\end{aligned}$$

Esto nos indica que cada coeficiente b_j es de la forma:

$$b_j = \frac{p^{(j)}(x)}{j!}$$

y el polinomio resulta con la expresión:

$$p(x) = p(x_0) + p'(x_0).(x - x_0) + \frac{p''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{p^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Polinomios de Taylor:

Sea f: (a,b) → R una función n-veces derivable ($n \in N$) y $x_0 \in (a,b)$.

Se define el Polinomio de Taylor de la función f(x) hasta el orden n y centrado en x_0, por la expresión

$$T_n(f,x_0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

En consonancia se define la diferencia entre una función f(x) y su polinomio de Taylor como el resto de Taylor hasta el orden n y centrado en el punto x_0:

$$r_n(f,x_0)(x) = f(x) - T_n(f,x_0)(x)$$

Usaremos la notación $T_n(f)(x)$ y $r_n(f)(x)$ si el punto x_0 es el origen. O sea:

Si $x_0=0$ es

$$T_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \qquad r_n(f)(x) = f(x) - T_n(f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

Propiedades:

1) $T_{n+1}(f,x_o)(x) = T_n(f,x_0)(x) + \dfrac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

- Trivialmente.

2) $T_n(f,x_0)'(x) = T_n(f',x_0)(x)$

- Veamos un razonamiento:

Puesto que es $T_n(f,x_0)'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1}$, si llamamos j=k-1, se tendrá:

$$T_n(f,x_0)'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(j+1)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j = \sum_{j=0}^{n} \frac{(f')^{j}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j = T_n(f',x_0)(x)$$

Proposición:

Si f: (a,b) → R es n-veces derivable ($n \in N$) y $x_0 \in$ (a,b), entonces:

$$r_n(f,x_0)(x) - T_n(f,x_0)(x) \in \theta(x-x_0)^n$$

o sea, es, al tender $x \to x_0$:

$$\frac{f(x) - T_n(f,x_0)(x)}{(x-x_0)^n} \to 0$$

Demostración:

Bastará aplicar la regla de L'Hôpital reiteradamente:

$$\frac{f(x)-T_n(f,x_0)(x)}{(x-x_0)^n} \rightarrow \frac{f'(x)-T_{n-1}(f',x_0)(x)}{n.(x-x_0)^{n-1}} \rightarrow \ldots \rightarrow \frac{f^{(n-1)}(x)-T_1(f^{(n-1)},x_0)(x)}{n!.(x-x_0)}$$

Y, por definición de Polinomio de Taylor es:

$$T_1(f^{(n-1)},x_0)(x) = \sum_{k=0}^{1} \frac{(f^{(n-1)})^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k =$$

$$= \frac{(f^{(n-1)})^{(0)}(x_0)}{0!}(x-x_0)^0 + \frac{(f^{(n-1)})^{(')}(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 = \frac{f^{(n-1)}(x_0)+f^{(n)}(x_0).(x-x_0)}{1!}$$

por tanto, al sustituir, se tiene:

$$\frac{f(x)-T_n(f,x_0)(x)}{(x-x_0)^n} \rightarrow \frac{f'(x)-T_{n-1}(f',x_0)(x)}{n.(x-x_0)^{n-1}} \rightarrow \ldots \rightarrow \frac{f^{(n-1)}(x)-T_1(f^{(n-1)},x_0)(x)}{n!.(x-x_0)} =$$

$$= \frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)-f^{(n)}(x_0).(x-x_0)}{x-x_0} = \frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} - f^{(n)}(x_0) \rightarrow 0$$

ya que, por definición de derivada, es:

$$\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} \rightarrow f^{(n)}(x_0) \text{ cuando } x \rightarrow x_0$$

Algunos ejemplos de desarrollos de Taylor:

Veamos los desarrollos de Taylor de algunas funciones elementales:

a) Desarrollo de $f(x)=e^x$ en $x_0=0$:

Derivadas sucesivas:

$$f(x_0)=e^{x_0},\ f'(x_0)=e^{x_0},\ ...,\ f^{(n)}(x_0)=e^{x_0}$$

Desarrollo para $x=x_0$:

$$T_n(f,x_0)(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{x_0}}{k!}(x-x_0)^k$$

Desarrollo en el origen (x=0):

$$T_n(f)(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{e^0}{k!}(x-0)^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+...+\frac{x^n}{n!}$$

b) Desarrollo de $f(x)=Ln(x+1)$ en $x_0=0$:

Derivadas sucesivas:

$$f(x_0)=Ln(1+x_0),\ f'(x_0)=\frac{1}{1+x_0},\ f''(x_0)=\frac{-1}{(1+x_0)^2}...,\ f^{(n)}(x_0)=(-1)^{n+1}.\frac{(n-1)!}{(1+x_0)^n}$$

Desarrollo para $x=x_0$:

$$T_n(f,x_0)(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1}(k-1)!.(x_0+1)^{-k}}{k!}(x-x_0)^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1}(x_0+1)^{-k}}{k}(x-x_0)^k$$

Desarrollo en el origen (x=0):

$$T_n(f,x_0)(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}(k-1)!.(0+1)^{-k}}{k!}(x-0)^k=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...+\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$$

c) Desarrollo de $f(x)=sen(x)$ en $x_0=0$:

Derivadas sucesivas:

$$f(x_0)=sen(x_0),\ f'(x_0)=\cos(x_0)=sen(x_0+\frac{\pi}{2}),\ f''(x_0)=\cos(x_0+\frac{\pi}{2})=sen(x_0+2\frac{\pi}{2}),...$$

$$...,\ f^{(n)}(x_0)=\cos(x_0+(n-1)\frac{\pi}{2})=sen(x_0+n\frac{\pi}{2})$$

Desarrollo para $x=x_0$:

$$T_n(f,x_0)(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{sen(x_0+n\frac{\pi}{2})}{k!}(x-x_0)^k$$

Desarrollo en el origen (x=0):

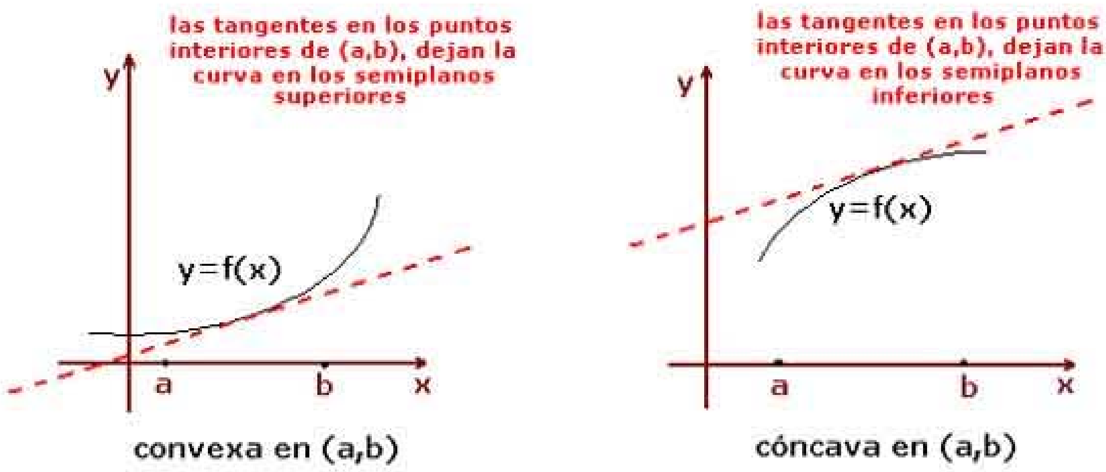
$$T_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{sen(0 + n\frac{\pi}{2})}{k!}(x-0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{sen(n\frac{\pi}{2})}{k!}x^k = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Aplicaciones al estudio de la convexidad:

Se dice que una función f: (a,b) → R, derivable, es convexa si el grafo de la función pertenece a todos los semiplanos superiores definidos por sus tangentes en dicho intervalo (a,b).

Se define simétricamente la concavidad por el hecho de el grafo pertenezca a todos los semiplanos inferiores que definen las rectas tangentes en (a,b).

Es inmediato que f(x) es convexa (globalmente) en el intervalo (a,b) sii es convexa localmente en todo punto $x_0 \in (a,b)$. Lo mismo ocurre con la concavidad.



Así, pues, si es $y - f(x_0) = f'(x_0).(x - x_0)$ la recta tangente a f(x) en $x_0 \in (a,b)$, se tiene que:

- Si $f(x) - y > 0, \forall x \in (a,b),$ f(x) es convexa en (a,b).
- Si $f(x) - y < 0, \forall x \in (a,b),$ f(x) es cóncava en (a,b).

Proposición:

Si la función f: (a,b) → R es 2-veces derivable en $x_0 \in (a,b)$, entonces, se tiene que f(x) es convexa en x_0 si $f''(x_0)>0$, o cóncava en x_0 si $f''(x_0)<0$.

Demostración:

Consideremos el desarrollo de Taylor de f(x) hasta el orden 2, y la recta tangente en x_0:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + r_2(f, x_0)(x),$$

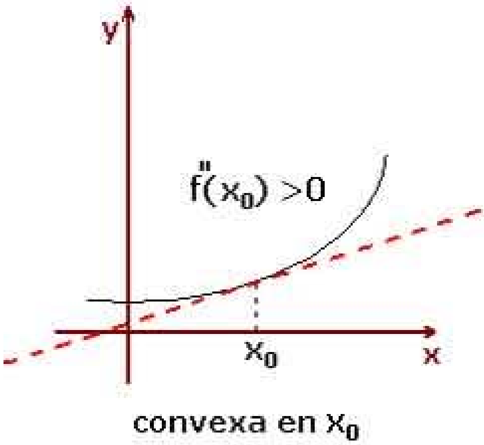
$$y = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0)$$

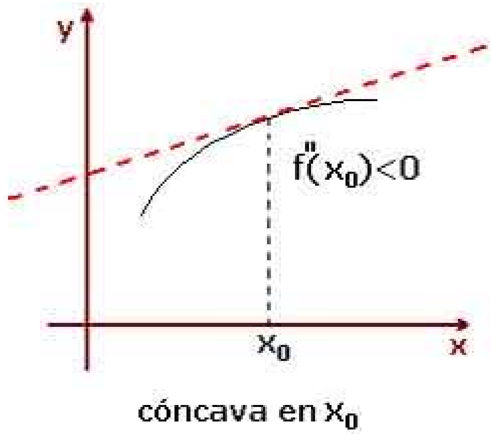
Se tiene, al restar ambas expresiones:

$$f(x) - y = \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + r_2(f, x_0)(x) = (x - x_0)^2 . \left[\frac{f''(x_0)}{2} + \frac{r_2(f, x_0)(x)}{(x - x_0)^2} \right]$$

y siendo $\dfrac{r_2(f,x_0)(x)}{(x-x_0)^2} \to 0$, se tienen las dos alternativas:

- Si es $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f(x) - y > 0 \Rightarrow f(x)$ convexa en x_0.
- Si es $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f(x) - y < 0 \Rightarrow f(x)$ cóncava en x_0.





Corolario:

Si es f(x) 3-veces derivable en $x_0 \in (a,b)$, se cumple que si $f''(x_0)=0$, y es $f'''(x_0)>0$, la función es cóncava a la izquierda y convexa a la derecha de x_0, y, simétricamente, si es $f''(x_0)=0$, y es $f'''(x_0)>0$, la función es convexa a la izquierda y cóncava a la derecha de x_0.

Para probar esto bastará aquí el desarrollo de Taylor de f(x) hasta el orden 3, y la recta tangente en x_0:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x-x_0) + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + r_3(f,x_0)(x),$$
$$y = f(x_0) + f'(x_0).(x-x_0)$$

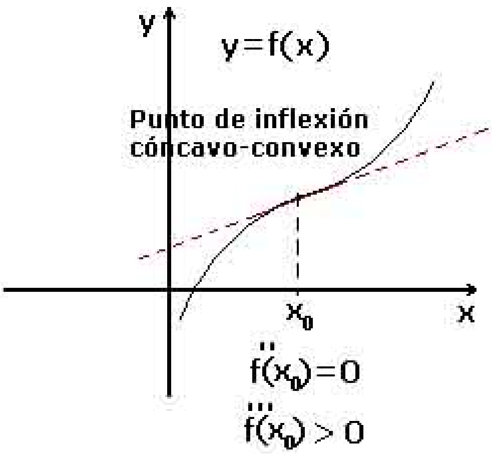
Restamos también ahora ambas expresiones:

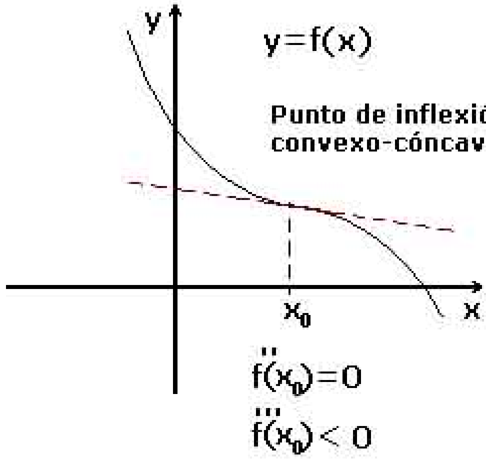
$$f(x) - y = \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + r_2(f,x_0)(x) = (x-x_0)^3.\left[\frac{f'''(x_0)}{3!} + \frac{r_3(f,x_0)(x)}{(x-x_0)^3}\right]$$

y siendo $\dfrac{r_3(f,x_0)(x)}{(x-x_0)^3} \to 0$, se tienen las dos alternativas:

- Si es $f'''(x_0) > 0 \Rightarrow \begin{cases} si\ x < x_0 \Rightarrow f(x) - y < 0 \Rightarrow concava \\ si\ x > x_0 \Rightarrow f(x) - y > 0 \Rightarrow convexa \end{cases}$ → la función es cóncava a la izquierda y convexa a la derecha de x_0. Es decir, en x_0 hay un punto de inflexión cóncavo -convexo

- Si es $f'''(x_0) < 0 \Rightarrow \begin{cases} si\ x < x_0 \ \Rightarrow f(x) - y > 0 \Rightarrow convexa \\ si\ x > x_0 \ \Rightarrow f(x) - y < 0 \Rightarrow concava \end{cases}$ → la función es convexa a la izquierda y cóncava a la derecha de x_0. Es decir, en x_0 hay un punto de inflexión convexo-cóncavo.





Generalización:

Sea f(x) suficientemente derivable en $x_0 \in (a,b)$.

Si la primera derivada que no se anula, $f^{n)}(x_0)$, es de orden par, la curva es cóncava (si $f^{n)}(x_0)>0$), o convexa (si $f^{n)}(x_0)<0$).

Si la primera derivada que no se anula, $f^{n)}(x_0)$, es de orden impar, la curva tiene un punto de inflexión , que será cóncavo-convexo (si $f^{n)}(x_0)>0$), o convexo-cóncavo (si $f^{n)}(x_0)<0$).

Aplicación a la determinación de extremos relativos:

Sabemos que los puntos que anulan a las primeras derivadas de una función f(x), lo suficientemente derivable, podemos estudiar la existencia de extremos relativos y de puntos de inflexión en su gráfica.

Si la primera derivada es cero, $f'(x_0)=0$, esto nos indica que la tangente es horizontal, y por tanto puede existir en el punto un máximo (si la función es cóncava), un mínimo (si la función es convexa), o bien, un punto de inflexión con la tangente horizontal.

Esto es, sabemos que si:

$$0 = f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n)}(x_0), \qquad f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$$

Se cumple que:

I) Si n es impar, entonces la primera derivada que no se anula es $f^{(n+1)}(x)$, de orden par, por lo que f(x) tiene un extremo relativo en x_0, que será máximo si es $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ y será mínimo si $f^{(n+1)}(x_0) > 0$.

II) Si n es par, entonces la primera derivada que no se anula es $f^{(n+1)}(x)$, de orden impar, f(x) tiene en x_0 un punto de inflexión (no hay extremo).

Esto nos hace plantearnos la siguiente pregunta: ¿existe alguna función no constante infinitamente derivable tal que todas sus derivadas se anulan en un punto dado?. La proposición siguiente contesta afirmativamente.

Proposición: La función $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ es infinitamente derivable y sus derivadas son nulas en el origen.

Veamos, pues, que $f^{(n)}(0) = 0, \forall n \in N$

En efecto:

Trivialmente, pues siempre, la derivada de un orden cualquiera será el producto de la exponencial por otro función, y la exponencial siempre es cero en el origen, luego las infinitas derivadas de esta función se anulan en el origen.

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \Rightarrow f^{k)}(x) = f(x).g_k(x) \Rightarrow f^{k)}(0) = f(0).g_k(0) = 0.g_k(0) = 0$$

Carácter infinitesimal del resto. Aplicación a la determinación de infinitésimos equivalentes:

1. Carácter infinitesimal del resto:

Si la función f(x) y sus derivadas sucesivas f′(x), f″(x), ..., $f^{(n+1)}(x)$ están definidas en $[x_0, x]$ se verifica que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(f,x_0)(x)}{(x-x_0)^n} \to 0$$

Demostración:

De ser $r_n(f,x_0)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

Y su valor y el de sus derivadas sucesivas en $x=x_0$:

$$r_n(f,x_0)(x) = f(x_0) - f(x_0) = 0$$

$$r_n'(f,x_0)(x) = f'(x_0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = 0$$

... ...

$$r_n^{(n)}(f,x_0)(x) = f^{(n)}(x_0) - n!.\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = 0$$

Por lo que, aplicando la Regla de L´Hôpital:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(f,x_0)(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{r_n'(f,x_0)(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \dots = \lim_{x \to x_0} \frac{r_n^{(n)}(f,x_0)(x)}{n!} \to 0$$

2. Aplicación a la determinación de infinitésimos equivalentes:

Mediante un Desarrollo de Taylor de orden mínimo, generalmente de orden 1 o de orden 2, puede obtener la equivalencia de los límites de algunas expresiones sencillas. Veamos algunos ejemplos:

1) $\frac{e^x - 1}{x} \to 1$

Demostración usando el desarrollo de Taylor de orden 1, en $x_0=0$:

$$e^x \to f(0) + f'(o).(x-0) \Rightarrow e^x \to 1 + 1.x = 1 + x$$

O sea:

$$\frac{e^x - 1}{x} \to 1$$

2) $\frac{Ln(x+1)}{x} \to 1$

Demostración usando el desarrollo de Taylor de orden 1, en x_0=0:

$$Ln(x+1) \to f(0) + f'(0).(x-0) \to 0 + \frac{1}{0+1}(x-0) \to x$$

Por tanto:

$$\frac{Ln(x+1)}{x} \to 1$$

3) $\frac{senx}{x} \to 1$

Demostración usando el desarrollo de Taylor de orden 1, en x_0=0:

$$senx \to f(0) + f'(0)(x-0) \to sen(0) + \cos(0).(x-0) \to 0 + 1.x = x$$

Por lo cual:

$$\frac{senx}{x} \to 1$$

4) $\frac{\cos x - 1}{\frac{1}{2}x^2} \to 1$

Demostración usando el desarrollo de Taylor de orden 2, en x_0=0:

$$\cos x \to f(0) + f'(0).(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 = \cos(0) - sen(0).(x-0) + \frac{-\cos(0)}{2!}(x-0)^2 =$$

$$= 1 - 0 - \frac{1}{2!}x^2 = 1 - \frac{1}{2!}x^2$$

En definitiva:

$$\frac{\cos x - 1}{-\frac{1}{2}x^2} \to 1$$

5) $\frac{senx - 1}{-x^3/3!} \to 1$

Demostración usando el desarrollo de Taylor de orden 3, en x_0=0:

$$senx \to sen0 + \cos 0.(x-0) - \frac{sen0}{2!}.(x-0)^2 - \frac{\cos 0}{3!}(x-0)^3 = 0 + 1.(x-0) - \frac{1}{3!}(x-0)^3$$

por tanto:

$$senx \to x - \frac{1}{3!}x_3 \Rightarrow \frac{senx - 1}{-\frac{1}{3!}x^3} \to 1$$

6) $\dfrac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!}}{\frac{x^3}{3!}} \to 1$

Demostración usando el desarrollo de Taylor de orden 3, en $x_0=0$:

$$e^x \to e^0 + e^0.(x-0) + \frac{e^0}{2!}(x-0)^2 + \frac{e^0}{3!}(x-0)^3 \Rightarrow e^x \to 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}$$

Y de ahí que sea:

$$\frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{\frac{x^3}{3!}} \to 1$$

Teorema de Taylor. Las formas del resto:

Sea el desarrollo de Taylor hasta el orden n:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+r_n(f,x_0)(x)$$

y consideremos toda la expresión en función de x_0. Por simplicidad, llamemos al resto con $s(x_0)=r_n(f,x_0)(x)$. Si derivamos con respecto a x_0 tenemos:

$$\frac{df(x)}{dx_0}=\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k-\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}k(x-x_0)^{k-1}\right]+s'(x_0)$$

por tanto, al simplificar:

$$0=-\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+s'(x_0)\Rightarrow s'(x_0)=\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Con esta expresión de la derivada podemos determinar algunas formas para el resto del desarrollo de Taylor.

i. La expresión de Cauchy del Resto:

Si aplicamos el teorema del valor medio de Lagrange a la función $s(x_0)$, se tiene:

$$\exists\xi\in(x_0,x)/\frac{s(x)-s(x_0)}{x-x_0}=s'(\xi)$$

y como es:

$$s(x)=r_n(f,x)(x)=0$$

$$s'(\xi)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n$$

queda:

$$\frac{0-s(x_0)}{x-x_0}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n\Rightarrow s(x_0)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0)$$

Quedando, por consiguiente:

$$r_n(f,x_0)(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0),\quad (\text{con }\xi\in(x_0,x))$$

(Forma de Cauchy del resto)

ii. La expresión de Lagrange del resto:

Llamando aquí también $s(x_0)=r_n(f,x_0)(x)$, y considerando la derivada hallada antes $f'(x_0)=-\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$, aplicamos el Teorema del valor medio de Cauchy a las funciones

$$s(x_0) = r_n(f, x_0)(x) \qquad g(x_0) = (x - x_0)^{n+1}$$

se tiene:

$$\exists \xi \in (x_0, x) / \frac{s(x) - s(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{s'(\xi)}{g'(\xi)}$$

y siendo $s(x) = r_n(f, x)(x) = 0, \quad g(x) = (x - x)^{n+1} = 0$, resulta:

$$\frac{-s(x_0)}{-g(x_0)} = \frac{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n}{(n+1)(x - \xi)^n} \Rightarrow s(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Y queda, definitivamente:

$$r_n(f, x_0)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad \text{(con } \xi \in (x_0, x)\text{)}$$

(Forma de Lagrange del resto)

iii. Una expresión integral para el resto:

Si la función $f^{(n+1)}(x)$ es integrable, y haciendo nuevamente $s(x_0) = r_2(f, x_0)(x)$, se tiene:

$$s(x) - s(x_0) = \int_{x_0}^{x} s'(\xi).d\xi = \int_{x_0}^{x} -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n.d\xi \Rightarrow s(x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n.d\xi$$

Así, pues, se tiene la expresión:

$$r_n(f, x_0)(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n.d\xi$$

(Forma integral del resto)

iv. El criterio de Schölomich:

Consideremos de nuevo la función $s(x_0) = r_2(f, x_0)(x)$ y la función $g(x_0) = (x - x_0)^p, \ \ p \in R^+$

Se tiene, pues, que:

$$f'(x_0) = -\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$$g'(x_0) = -p(x - x_0)^{p-1}$$

y aplicamos el Teorema del valor medio de Cauchy a ambas funciones:

$$\exists\xi \in (x_0, x) / \frac{s(x)-s(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{s'(\xi)}{g'(\xi)} \Rightarrow \frac{-s(x_0)}{-g(x_0)} = \frac{-\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n}{-p.(x-\xi)^{p-1}}$$

y, al despejar x_0:

$$\boxed{r_n(f, x_0)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{p.n!}(x-\xi)^{n-p+1}(x-x_0)^p \qquad \xi \in (x_0, x)}$$

(Fórmula de Scholömilch)

En resumen:

Desarrollo de Taylor con resto de Cauchy:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n (x-x_0) \qquad \xi \in (x_0, x)$$

Desarrollo de Taylor con resto de Lagrange:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad \xi \in (x_0, x)$$

Desarrollo de Taylor con resto integral:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n .d\xi$$

Desarrollo de Taylor con resto de Scholömilch:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{p.n!}(x-\xi)^{n-p+1}(x-x_0)^p \qquad \xi \in (x_0, x)$$

Aplicación a la demostración de la irracionalidad del número e:

Puede probarse fácilmente mediante el desarrollo de Taylor de la función e^x, en el origen, que el número e no puede ser racional:

Por una reducción al absurdo, veamos lo que ocurriría si el número e fuese racional, esto es, de la forma e=p/q, siendo p y q números naturales no nulos.

Se tiene, para el desarrollo de la exponencial e^x con resto de Lagrange:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

donde es $\xi \in (0,1)$, lo cual nos indica que $e^{\xi} \in (1,e)$

Si consideramos el desarrollo anterior para x=1, se tendrá:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}$$

por tanto,si consideramos un n>q:

1

$$(n+1)!.e = (n+1)! + (n+1)! + \frac{(n+1)!}{2} + \frac{(n+1)!}{3!} + \ldots + \frac{(n+1)!}{n!} + (n+1)!\frac{e^{\xi}}{(n+1)!} \Rightarrow$$

1

$$\Rightarrow (n+1)!.e = 2.(n+1)! + \frac{(n+1)!}{2} + \frac{(n+1)!}{3!} + \ldots + \frac{(n+1)!}{n!} + e^{\xi}$$

y si es e=p/q será entonces $(n+1)!.e \in N$, pues es n>q, pero esto implicaría que

1

$$e^{\xi} = (n+1)!.e - 2.(n+1)! - \frac{(n+1)!}{2} - \frac{(n+1)!}{3!} - \ldots - \frac{(n+1)!}{n!} \in N$$

Lo cual es imposible, pues $e^{\xi} \in (1,e)$.

Determinación aproximada del número e:

Desde la fórmula de Taylor para la función exponencial (con resto de Lagrange):

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{x_0}}{k!}(x - x_0)^k + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

o bien, si $x_0=0$:

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

y, para obtener el número e, bastará hacer x=1:

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}$$

Si pretendemos encontrar un polinomio de Taylor que se aproxime al número e hasta el orden de las centésimas, esto es, de forma que el error cometido al suprimir el resto sea inferior a una centésima, debemos determinar cuantos términos tendría dicho polinomio, o bien, hasta que orden habría que hacer el desarrollo:

$$\frac{e^{\xi}}{(n+1)!} < \frac{1}{100} \Rightarrow 100.e^{\xi} < (n+1)!$$

En definitiva, hemos de encontrar n tal que

$$n! < 100.e^{\xi} < (n+1)! \Rightarrow n! < 100.e < (n+1)!$$

y como 100e =278,1... , ha de ser n=5, pues n!=120 y (n+1)!=720, que cumplen la condición.

Por tanto, la expresión del número e con un error menor que una centésima será:

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}$$

Por analogía, puede determinarse e con cualquier aproximación.

BIBLIOGRAFÍA:

- BURGOS, J.: *Cálculo infinitesimal de varias variables*. Editorial McGraw-Hill. Madrid, 1995.
- GARCIA, A., LOPEZ, A. y otros: *Cálculo II: Teoría y problemas de funciones de varias variables. Cálculo diferencial. Cálculo integral. Ecuaciones diferenciales*. Ed. CLAGSA. Madrid.
- RODRÍGUEZ MARÍN, L., y PERÁN MAZÓN, J.: *Funciones de varias variables. Cálculo diferencial*. Colección Cuadernos de la UNED. Editorial UNED.
- SALAS y HILLE: *Calculus de una y varias variables (Tomo II)*. Editorial Reverté.
- SOLER ,M.; BRONTE, R., y MARCHANTE, L.: *Cálculo infinitesimal e integral*. Publicaciones ETSI Caminos. Politécnica de Madrid, 1989.
- THOMAS, G. B., y FINNEY, L. R.: *Cálculo con geometría analítica*. Ed. Addison-Wesley Iberoamericana, 1987.