Sobre la convergencia de las series enteras de variable compleja

Definición:
Sea la serie formal de indeterminada X y coeficientes el cuerpo k:

$$S(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$$

Una serie entera de variable compleja es la serie obtenida al sustituir la indeterminada X en la serie $S(X)$ por $z \in C$, y donde el cuerpo k de los coeficientes es el cuerpo C de los números complejos:

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n$$

1.1. La convergencia:

Teorema 1.1 (Lema de Abel):
Dado un número real r, positivo y menor que la unidad, $0 < r < 1$, la serie entera de variable compleja

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n$$

converge absolutamente en $|z| \leq r$ si $\forall r_0 \in R / 0 < r < r_0 < 1$ existe un número real positivo $M > 0$, tal que

$$|a_n|.r_0^n \leq M,\ \forall n \geq 0$$

Demostración:
Basta aplicar el criterio de convergencia por comparación, pues siendo

$$|a_n z^n| \leq |a_n||z|^n \leq \frac{M}{r_0^n}.r^n = M.\left(\frac{r}{r_0}\right)^n$$

se tiene que si la serie $\sum_{n\geq 0} M.\left(\frac{r}{r_0}\right)^n$ es convergente, también será convergente la serie $\sum_{n\geq 0} |a_n z^n|$, y, efectivamente, la serie indicada, $\sum_{n\geq 0} M.\left(\frac{r}{r_0}\right)^n$, es convergente, ya que se trata de una progresión geométrica de infinitos términos cuya suma es:

$$\sum_{n\geq 0} M.\left(\frac{r}{r_0}\right)^n = \frac{M}{1-\frac{r}{r_0}} = M.\frac{r_0}{r_0 - r}$$

1.3. Radio de convergencia:
Teorema 1.2 (existencia de disco de convergencia):
Para toda serie formal $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ existe un nº real ρ tal que:

a) $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge en norma para $|z| < \rho$.

b) $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ diverge para $|z| > \rho$.

Demostración:
Consideremos la suma indicada por la serie

$$\sum_{n\geq 0} |a_n| r^n$$

donde es $0 < r < \rho$. Tal suma puede ser finita o bien infinita. Si es finita indicaremos que $\sum_{n\geq 0} |a_n| r^n < +\infty$, y diremos que es convergente, y si es infinita lo indicaremos por $\sum_{n\geq 0} |a_n| r^n = +\infty$ y diremos que se trata de una serie divergente.
Así, pues, para ciertos valores de *r* la serie puede ser convergente y para otros valores de r la serie puede ser divergente.
Consideremos el conjunto de valores de *r* para los cuales la serie converge, y llamémoslo I:

$$I = \left\{ r / r \in R^+ \cup \{0\} \wedge \sum_{n\geq 0} |a_n| r^n < +\infty \right\}$$

Es inmediato que $I \in R$, pues sus elementos son números reales, y que $I \neq \phi$, pues la serie indicada converge al menos para *r=0*.
Llamemos $\rho = \sup(I)$ al supremo del conjunto I de los valores r para los cuales la serie $\sum_{n\geq 0} |a_n| r^n$ es convergente.
Se tiene:
a) $\forall r \in I / r < \rho, \exists r_0 \in I / 0 \leq r < r_0 < \rho$, y la serie $\sum_{n\geq 0} |a_n| r_0^n$ es convergente, por lo que cada término de la serie está acotado:

$$\exists M \in R / |a_n| r_0^n \leq M, \forall n \geq 0$$

entonces, utilizando el Lema de Abel, $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge en norma para $|z| < \rho$

b) Si $|z| > \rho, \exists n \in N / |a_n| |z|^n$ es arbitrariamente grande, pues caso contrario, $\exists r' \in R^+ / \rho < r' < |z| \wedge \sum_{n\geq 0} |a_n| r'^n$ converge, con lo que contradice el hecho de que $\rho = \sup(I)$.

Obviamente, $\rho = \sup(I)$ es único y se denomina radio de convergencia de la serie.
Si es ρ el radio de convergencia de la serie entera $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ se llama círculo o disco de convergencia al dominio $|z| < \rho$.

1.4. La fórmula de Hadamard:

Teorema 1.3 (Fórmula de Hadamard):

Dada la serie entera de variable compleja $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, se puede obtener el valor del radio de convergencia mediante la expresión

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{n\to\infty} \sup |a_n|^{1/n}$$

Demostración:

Sabemos, por el criterio de la raíz, que una serie de números reales positivos $\sum_{n\geq 0} \varphi_n$ es convergente si se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} \sup(\varphi_n)^{1/n} < 1$$

y es divergente si

$$\lim_{n\to\infty} \sup(\varphi_n)^{1/n} > 1$$

siendo tal serie indeterminada si

$$\lim_{n\to\infty} \sup(\varphi_n)^{1/n} = 1$$

entonces, aplicando esto a la serie $\sum_{n\geq 0} |a_n| r^n$ se tiene:

$\sum_{n\geq 0} |a_n| r^n$ converge si $\lim_{n\to\infty} \sup(|a_n| r^n)^{1/n} < 1 \to \lim_{n\to\infty} \sup r(|a_n|)^{1/n} < 1$

O sea, si

$$\lim_{n\to\infty} \sup(|a_n|)^{1/n} < \frac{1}{r} \to \lim_{n\to\infty} \sup(|a_n|)^{1/n} = \frac{1}{\rho}$$

(no puede ser $\lim_{n\to\infty} \sup(|a_n|)^{1/n} < \frac{1}{\rho}$ pues entonces sería, para algún $r' > \rho : \lim_{n\to\infty} \sup(|a_n|)^{1/n} < \frac{1}{r'} < \frac{1}{\rho}$ con lo que no seria ρ el radio de convergencia de la serie)

1.5. Continuidad de la función definida por una serie entera convergente:

Teorema 1.4:

La función definida por una serie entera de variable compleja, $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, es continua en el disco de convergencia de la serie.

Demostración:

Se trata de probar la continuidad de la función $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, es decir, es preciso probar que, para z, z_0 del círculo de convergencia: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / |z - z_0| < \delta \to \to |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Si escribimos:

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n = \sum_{n=0}^{M} a_n z^n + \sum_{n\geq M} a_n z^n = A(z) + B(z)$$

$$f(z_0) = \sum_{n\geq 0} a_n z_0^n = \sum_{n=0}^{M} a_n z_0^n + \sum_{n\geq M} a_n z_0^n = A(z_0) + B(z_0)$$

Se tiene:

$$|f(z) - f(z_0)| = |A(z) + B(z) - A(z_0) - B(z_0)| = |A(z) - A(z_0) + B(z) - B(z_0)|$$

por lo que

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |A(z) - A(z_0)| + |B(z) - B(z_0)| = |A(z) - A(z_0)| + |B(z)| + |B(z_0)|$$

por tanto:

Eligiendo δ adecuadamente es

$$|A(z) - A(z_0)| = \left|\sum_{n=0}^{M} a_n (z^n - z_0^n)\right| =$$

$$= \left|\sum_{n=0}^{M} a_n (z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \cdots + z_0^{n-2} z + z_0^n)(z - z_0)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{M} a_n |z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \cdots + z_0^{n-2} z + z_0^n||z - z_0| \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{M} a_n |z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \cdots + z_0^{n-2} z + z_0^n| \delta < \varepsilon/3$$

Por otra parte, eligiendo M adecuadamente podemos hacer que

$$|B(z)| = \left|\sum_{n\geq M} a_n z^n\right| < \varepsilon/3, \qquad |B(z_0)| = \left|\sum_{n\geq M} a_n z_0^n\right| < \varepsilon/3$$

En definitiva:

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |A(z) - A(z_0)| + |B(z) - B(z_0)| \leq |A(z) - A(z_0)| +$$
$$+ |B(z)| + |B(z_0)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

Bibliografía:

Cartan, H.; Teoría elemental de las funciones analíticas de una y varias variables, Madrid Selecciones Científicas , 1968.
Series de números reales http://casanchi.com/mat/sobreseries01.pdf
Una incursión en la teoría de las series formales
http://casanchi.com/mat/sformales01.htm