EL TEOREMA DE EULER PARA LA CURVATURA NORMAL. LA INDICATRIZ DE DUPIN

Nota: las nociones básicas que se manejan en este artículo (formas fundamentales, curvatura normal, teorema de Meusnier, Curvaturas principales, líneas de curvatura) pueden ser consultadas en la primera y segunda partes, Superficies_1 y Superficies-2, en esta misma web. (http://personales.ya.com/casanchi/mat/superficies01.htm). (http://personales.ya.com/casanchi/mat/superficies02.htm).

El teorema de Euler para la curvatura normal:

Si son k_1 y k_2 las curvaturas principales de una superficie *S* en un punto *P* y es K_n la curvatura normal de una curva *C* en el punto *P*, entonces

$$k_n = k_1.\cos^2\phi + k_2.sen^2\phi$$

donde es ϕ el ángulo que forma la curva C con la dirección principal de curvatura k_1.

Demostración:

- Podemos tomar las líneas de curvatura principal como líneas paramétricas ($du_1=0$ y $du_2=0$), lo que implica, como ya se expuso antes, en el teorema 12, que $g_{12} = l_{12} = 0$.

- Por ello, la curvatura normal podemos expresarla por

$$k_n = \frac{II}{I} = \frac{l_{11}.du_1^2 + l_{22}.du_2^2}{g_{11}.du_1^2 + g_{22}.du_2^2} = l_{11}\left(\frac{du_1}{ds}\right)^2 + l_{22}\left(\frac{du_2}{ds}\right)^2 \qquad [5]$$

y las curvatura principales:

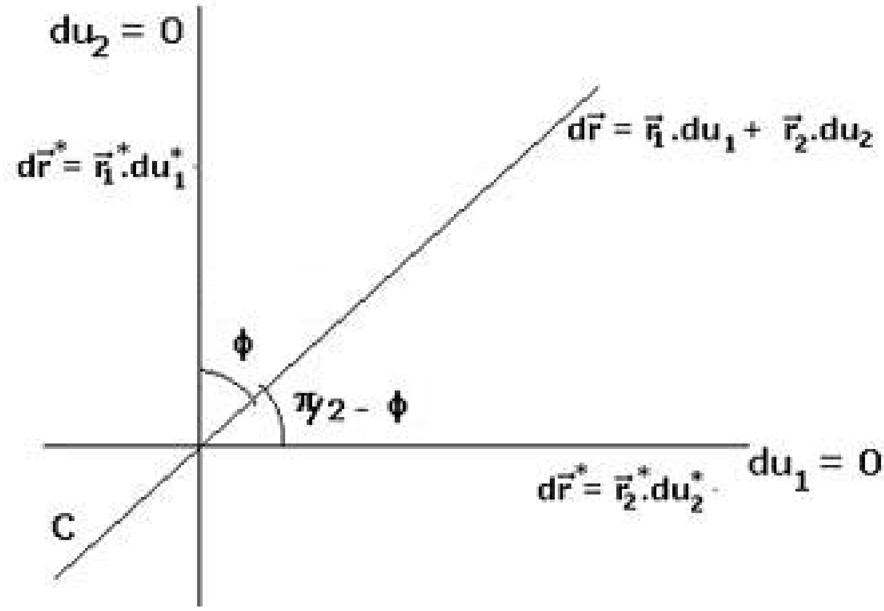
$$\begin{vmatrix} l_{11} - g_{11}k_p & l_{12} - g_{12}k_p \\ l_{12} - g_{12}k_p & l_{22} - g_{22}k_p \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} l_{11} - g_{11}k_p & 0 \\ 0 & l_{22} - g_{22}k_p \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (l_{11} - g_{11}k_p).(l_{22} - g_{22}k_p) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k_p = l_{11}/g_{11} \\ k_p = l_{22}/g_{22} \end{cases}$$

en definitiva:

$$k_1 = \frac{l_{11}}{g_{11}}, \qquad k_2 = \frac{l_{22}}{g_{22}}$$

- Puesto que las líneas de curvatura son perpendiculares, determinemos el coseno del ángulo ϕ que forma la curva C con la línea de curvatura $du_2=0$:



$$\cos\phi = \frac{d\vec{r}.d\vec{r}^*}{\left|d\vec{r}.d\vec{r}^*\right|} = \frac{\vec{r}_1.\vec{r}_1^*.du_1 du_1^* + 0}{\sqrt{(\vec{r}_1.\vec{r}_1^*.du_1 du_1^*)^2 + 0}} = \frac{g_{11}.du_1.du_1^*}{\sqrt{g_{11}^2.du_1^2.du_1^{*2}}} = \frac{g_{11}.du_1.du_1^*}{\sqrt{g_{11}.du_1^2}\sqrt{g_{11}.du_1^{*2}}} =$$

$$= \frac{g_{11}.du_1.du_1^*}{ds.\sqrt{g_{11}.du_1^{*2}}} = \sqrt{g_{11}}\cdot\frac{du_1}{ds}$$

análogamente es $\cos(\pi/2-\phi) = sen\ \phi = \sqrt{g_{22}}\cdot\frac{du_2}{ds}$

en definitiva: $\frac{du_1}{ds} = \frac{\cos\phi}{\sqrt{g_{11}}}, \qquad \frac{du_2}{ds} = \frac{sen\ \phi}{\sqrt{g_{22}}}$

sustituyendo en [5]:

$$k_n = l_{11}\cdot\left(\frac{\cos\phi}{\sqrt{g_{11}}}\right)^2 + l_{22}\cdot\left(\frac{sen\ \phi}{\sqrt{g_{22}}}\right)^2 = \frac{l_{11}}{g_{11}}.\cos^2\phi + \frac{l_{22}}{g_{22}}.sen^2\phi = k_1.\cos^2\phi + k_2.sen^2\phi$$

y se tiene:

$$k_n = k_1.\cos^2\phi + k_2.sen^2\phi$$

La indicatriz de Dupin:

Se llama *indicatriz de Dupin* de una superficie *S* en un punto *P* donde las curvaturas principales son k_1 y k_2, a la cónica

$$k_1.x^2 + k_2.x^2 = \pm 1$$

Teorema 13:

La intersección de la superficie S con un plano π^* paralelo e infinitamente próximo al plano tangente π en el punto *P* es semejante a la indicatriz de Dupin.

Demostración:

La distancia entre ambos planos, π^* y π, es, por el teorema 06:

$$D = \frac{1}{2} II + \theta_3$$

donde es θ_3 un infinitésimo de orden 3. Por lo que prescindiendo de dicho infinitésimo y considerando las líneas de curvatura como curvas paramétricas ($g_{12} = l_{12} = 0$), se tiene:

$$2D = l_{11} du_1^2 + l_{22} du_2^2$$

llamando $X = ds.\cos\phi = \sqrt{g_{11}}.du_1, \quad Y = ds.sen\phi = \sqrt{g_{22}}.du_2$, y sustituyendo:

$$2D = \frac{l_{11}}{g_{11}}.X^2 + \frac{l_{22}}{g_{22}}.Y^2 \to 2D = k_1.X^2 + k_2.Y^2 \to 1 = k_1.x^2 + k_2.y^2$$

con el cambio de semejanza $\frac{X}{\sqrt{2D}} = x, \quad \frac{Y}{\sqrt{2D}} = y$

Se tiene en definitiva:

- En un punto elíptico la curvatura total es positiva (ambas curvaturas principales tienen el mismo signo) y como ya hemos visto antes, el plano tangente está totalmente a un lado de la superficie, la intersección de la superficie con un plano paralelo al mismo y muy próximo a él es una elipse semejante a la indicatriz de Dupin.
  Si el punto no es umbílico existen dos direcciones principales.
  Un punto elíptico puede ser también umbílico, es decir, puede ocurrir que sean proporcionales los coeficientes l_{12} y g_{12} de ambas formas fundamentales, y en ese caso, por el teorema 11, no hay direcciones principales, o bien, podemos decir también que todas las direcciones son principales.
  El tipo clásico de superficie con estas características es el "balón de Rugby".
  Si el punto es elíptico umbílico la superficie es esférica.

- En un punto hiperbólico, donde la superficie está a un lado y a otro del plano tangente, por ser la segunda forma fundamental no definida, la intersección

de la superficie con dos planos paralelos al plano tangente, uno a cada lado del mismo e infinitamente próximos, es una hipérbola, semejante a la indicatriz de Dupin.
En estos puntos hay dos direcciones principales y también dos direcciones asintóticas, y el tipo clásico de superficie es la llamada "silla de montar".

- En un punto parabólico, donde el contacto es el mayor posible, bastaría con cortar la superficie con un plano paralelo al plano tangente para obtener las dos rectas paralelas que son semejantes a la indicatriz de Dupin.
  En estos puntos se anula la curvatura normal por ser nulo el discriminante $l = l_{11}l_{22} - l_{12}^2$ de la segunda forma fundamental, por lo que se les acostumbra a denominar *puntos singulares* de la superficie. Pueden ser también puntos umbilicos, en el caso de que sean nulos todos los coeficientes $l_{ij} = 0,\ i, j = 1,2$, es decir, se anule idénticamente la segunda forma fundamental *II=0* (puntos de un plano).
  En los puntos parabólicos no umbílicos hay dos direcciones principales y una dirección asintótica, siendo la superficie cilíndrica el ejemplo más clásico. Los puntos parabólicos umbílicos son los puntos de un plano. Todas las direcciones son principales y también asintóticas.

Curvatura total y curvatura media de una superficie en un punto:

Se define la curvatura total o de Gauss como el producto de las curvaturas principales:

$$K = k_1 . k_2$$

La curvatura media es la media aritmética de las curvaturas principales:

$$K_M = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

Teorema 14:

a) La curvatura total es:

$$K = \frac{l}{g}$$

b) La curvatura media es:

$$K_M = \frac{g_{11}l_{11} - 2g_{12}l_{12} + g_{22}l_{22}}{2g}$$

Demostración:

De ser $\begin{vmatrix} l_{11} - g_{11}k_p & l_{12} - g_{12}k_p \\ l_{12} - g_{12}k_p & l_{22} - g_{22}k_p \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (l_{11} - g_{11}k_p)(l_{22} - g_{22}k_p) - (l_{12} - g_{12}k_p)^2 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow (g_{11}g_{22} - g_{12}^2)k_p^2 - (l_{11}g_{22} - 2l_{12}g_{12} + g_{11}l_{22})k_p + (l_{11}l_{22} - l_{12}^2) = 0$$

ecuación de 2º grado cuyas soluciones, k_1 y k_2, verifican que

$$k_1.k_2 = \frac{l_{11}l_{22} - l_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\ , \qquad k_1 + k_2 = \frac{l_{11}g_{22} - 2g_{12}l_{12} + l_{22}g_{11}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

por tanto:

a) $k = k_1.k_2 = \dfrac{l}{g}$

b) $K_M = \dfrac{k_1 + k_2}{2} = \dfrac{l_{11}g_{22} - 2l_{12}g_{12} + l_{22}g_{11}}{2g}$

Resumen:

PUNTOS NO SINGULARES ($k_n \neq 0$)

		Curvatura total	2ª forma fundamental	Direcciones principales	Direcciones asintóticas	Indicatriz Dupin	Tipo superficie
Elípticos	No umbílicos	K>0	II>0 o II<0	2	0	Elipse	"Balón de Rugby"
Elípticos	Umbílicos	K>0	II>0 o II<0	todas	0	Circunfer	esfera
Hiperbolicos	No umbílicos	K<0	No definid	2	2	Hiperbol	"silla de montar"

PUNTOS SINGULARES ($k_n = 0$)

		Curvatura total	2ª forma fundamental	Direcciones principales	Direcciones asintóticas	Indicatriz Dupin	Tipo superficie
Parabólicos	no umbilicos	K=0	Degenerada no nula	2	1	dos rectas	Superf cilíndrica
Parabólicos	Umbílicos	K=0	II = 0	todas	todas	---------	plano

Teorema 15:

En un punto elíptico la distancia del origen O al punto Q de corte de la recta $y = tg\phi.x$ con la indicatriz de Dupin es el inverso de la raíz cuadrada de la curvatura normal de una curva que forme un ángulo ϕ con la dirección de curvatura principal k_1. Esto es:

$$OQ = \frac{1}{\sqrt{K_n}}$$

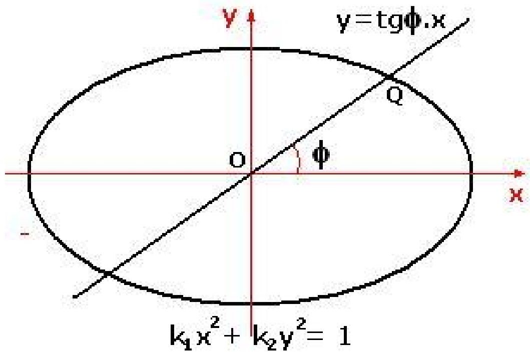
Demostración:

$$\begin{cases} k_1x^2 + k_2x^2 = 1 \\ y = tg\phi.x \end{cases} \rightarrow x = \frac{\pm\cos\phi}{\sqrt{k_1\cos^2\phi + k_2 sen^2\phi}}, \quad y = \frac{\pm sen\phi}{\sqrt{k_1\cos^2\phi + k_2 sen^2\phi}}$$

distancia OQ:

$$OQ = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{\sqrt{k_1\cos^2\phi + k_2 sen^2\phi}} = \frac{1}{\sqrt{K_n}} = \sqrt{R_n}$$

(R_n es el radio de curvatura de la sección normal que forma un ángulo ϕ con la línea de curvatura principal k_1)



Teorema 16:

En un punto hiperbólico la distancia del origen O al punto Q de corte de la recta $y = tg\phi.x$ con la indicatriz de Dupin es el inverso de la raíz cuadrada del valor absoluto de la curvatura normal de una curva que forme un ángulo ϕ con la dirección de curvatura principal k_1. O sea:

$$OQ = 1\Big/\sqrt{|K_n|}$$

Demostración:

Al ser $l_{11}l_{22} - l_{12}^2 < 0$, serán de distinto signo las curvaturas principales. Supongamos que es $k_1 > 0, k_2 < 0$. La indicatriz de Dupin es ahora:

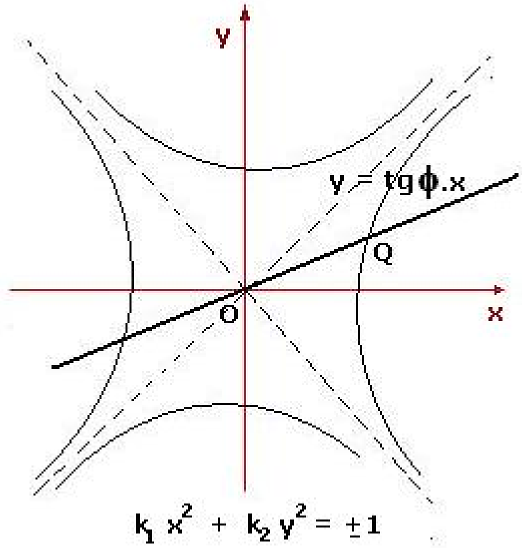
$$k_1x^2 + k_2y^2 = \pm 1$$

$$\begin{cases} k_1x^2 + |k_2|x^2 = 1 \\ y = tg\phi.x \end{cases} \rightarrow x = \frac{\pm\cos\phi}{\sqrt{k_1\cos^2\phi + |k_2| sen^2\phi}}, \quad y = \frac{\pm sen\phi}{\sqrt{k_1\cos^2\phi + |k_2| sen^2\phi}}$$

distancia OQ:

$$OQ = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{\sqrt{|k_1\cos^2\phi + k_2 sen^2\phi|}} = \frac{1}{\sqrt{|K_n|}} = \sqrt{|R_n|}$$

($|R_n|$ es el valor absoluto del radio de curvatura de la sección normal que forma un ángulo ϕ con la línea de curvatura principal k_1)



Teorema 17:

En un punto parabólico la distancia del origen O al punto A de corte de la recta $y = tg\phi.x$ con la indicatriz de Dupin (un par de rectas) es el inverso de la raíz cuadrada de la curvatura normal de una curva que forme un ángulo ϕ con la dirección de curvatura principal k_1. O sea:

$$OQ = 1 / \sqrt{K_n}$$

Demostración:

Puesto que en este caso es $l = l_{11}l_{22} - l_{12}^2 = 0$ ha de ser nula una de las dos curvaturas principales, ya que la curvatura total es nula ($K = k_1.k_2 = l / g = 0$). Supongamos que sea $k_2 = 0$. Entonces $K_n = k_1.\cos^2\phi$. Y la indicatriz de Dupin es el siguiente par de rectas

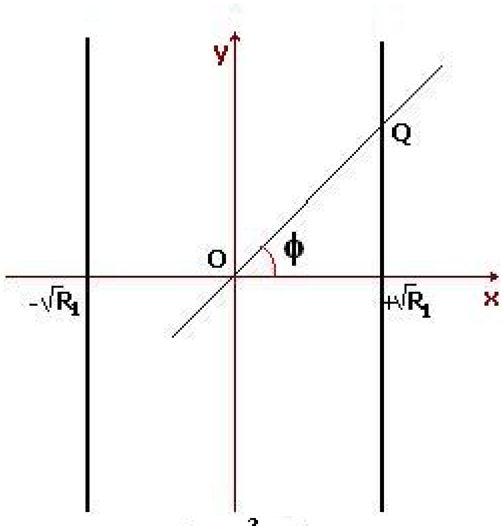
$$k_1.x^2 = 1 \to x = \pm\frac{1}{\sqrt{k_1}} = \pm\sqrt{R_1}$$

El punto de corte de la recta con la indicatriz verifica (figura siguiente):

$$OQ.\cos\phi = \sqrt{R_1} \to \cos^2\phi = R_1 / OQ^2 = 1 / k_1.OQ^2$$

Por tanto:

$$K_n = k_1.\cos^2\phi = \frac{k_1}{k_1.OQ^2} = \frac{1}{OQ^2} \to OQ = 1 / \sqrt{K_n}$$



$k_1 . x^2 = 1$