DIRECCIONES SOBRE UNA SUPERFICIE

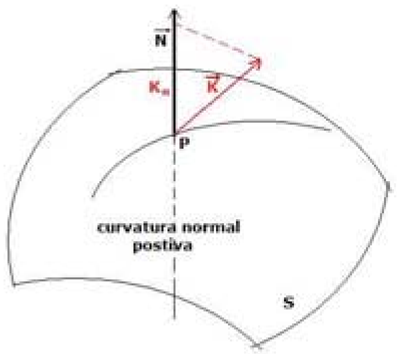
Líneas de curvatura principal. Direcciones principales.

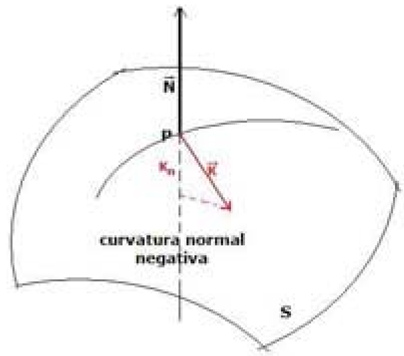
Nota: las nociones básicas que se manejan en este artículo (formas fundamentales, curvatura normal, teorema de Meusnier) pueden ser consultadas en la primera parte, Superficies_1, en esta misma web (http://personales.ya.com/casanchi/mat/superficies01.htm).

Sabemos que las direcciones sobre una superficie S en un determinado punto P de la misma, presentan distinta curvatura $\vec{k}$, y también, por consiguiente, distinta curvatura normal $\vec{K}_n$, proyección sobre el vector normal $\vec{N}$ del vector de curvatura $\vec{k}$ en dicho punto P.

El sentido del vector de curvatura normal puede ser el mismo que el sentido del vector normal o bien puede ser de sentido contrario, esto es, puede ser la proyección positiva, negativa o nula, dependiendo de las dos formas fundamentales, ya que sabemos que es

$$K_n = \frac{II}{I} = \frac{l_{11}du_1^2 + 2l_{12}du_1du_2 + l_{22}du_2^2}{g_{11}du_1^2 + 2g_{12}du_1du_2 + l_{22}du_2^2}$$





Como I siempre es positiva ($I = d\vec{r}.d\vec{r} = ds^2 > 0$) el signo de K_n viene determinado por la segunda forma fundamental II. Así, se tienen tres casos posibles:

1) $II > 0 \to K_n > 0.$ El punto P se llama *punto elíptico.*

2) $II = 0 \to K_n = 0.$ El punto P se llama *punto parabólico.*

3) $II < 0 \to K_n < 0.$ El punto P se llama *punto hiperbólico.*

Para poder determinar de qué forma es el contacto con el plano tangente a la superficie en el punto P, en cada uno de estos tres casos, debemos establecer el grado de aproximación de la superficie al plano tangente en cada situación. Esto lo podemos conseguir con el siguiente teorema.

Teorema 06:

Si es T el plano tangente a la superficie S en el punto P y es q un punto de S infinitamente próximo a P, entonces la distancia de q al plano tangente es igual a la mitad de II más un infinitésimo de tercer orden:

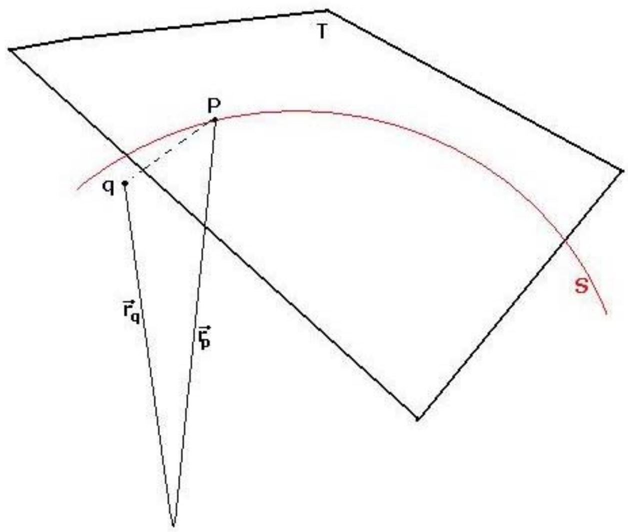
$$d(q,T) = \frac{1}{2} II + \theta_3$$

Demostración:

Siendo $\vec{r}_p, \vec{r}_q$ los vectores de posición de ambos puntos y $(\vec{r} - \vec{r}_p).\vec{N} = 0$ la ecuación del plano tangente, es $\vec{r}_q = \vec{r}_p + d\vec{r} + \frac{1}{2} d^2\vec{r} + \frac{1}{3!} d^3\vec{r} + \ldots$, y la distancia del punto q al plano tangente es

$$d(q,T) = \left|(\vec{r}_q - \vec{r}_p).\vec{N}\right| = \left|d\vec{r}.\vec{N} + \frac{1}{2} d^2\vec{r}.\vec{N} + \frac{1}{3!} d^3\vec{r}.\vec{N} + \ldots\right| =$$

$$= \left|0 + \frac{1}{2}\left(\vec{r}_{11}.\vec{N}.du_1^2 + \vec{r}_{12}.\vec{N}.du_1 du_2 + \vec{r}_{22}.\vec{N}.du_2^2\right) + \theta_3\right| = \frac{1}{2} II + \theta_3$$



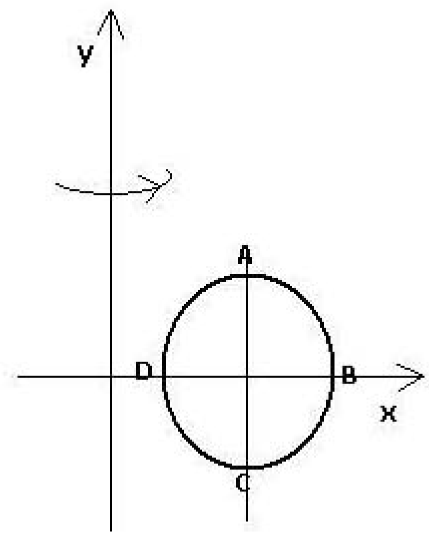
Teorema 07:

1) En un punto elíptico toda la superficie S está a un lado del plano tangente en dicho punto.
2) En un punto parabólico P se cumple que la dirección en la que II=0 es asintótica y tiene el mayor contacto posible con el plano tangente.
3) En un punto hiperbólico la superficie corta al plano tangente.

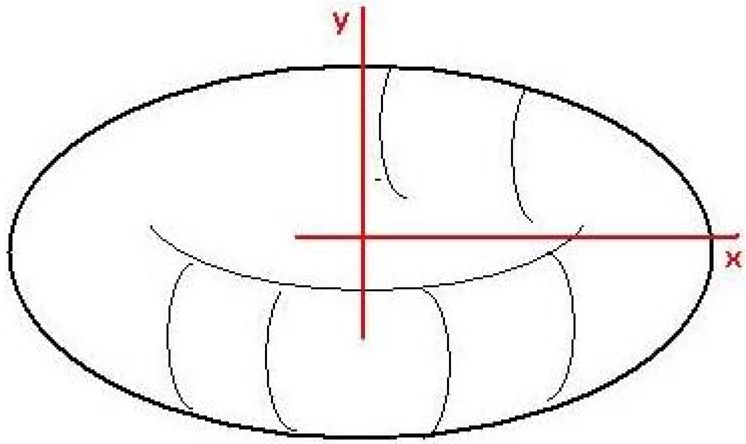
Demostración:

1) Si es $II > 0$, la distancia es siempre positiva: $d(q,T) = \frac{1}{2}II + \theta_3 > 0$, y por consiguiente, los puntos de la superficie S se encuentran a un lado del plano tangente.
2) Si es $II = 0$, la distancia es un infinitésimo de orden 3: $d(q,T) = \theta_3 \to 0$ y la superficie S está en la mayor proximidad posible al plano tangente T en la dirección en la que se anula la segunda forma fundamental. (dirección asintótica).
3) Si es $II < 0$, la segunda forma fundamental es indefinida y la superficie no está totalmente del mismo lado del plano tangente, es decir, lo corta.

El ejemplo más clásico de superficie en la que se distinguen los tres tipos de puntos es el toro.



1) Los puntos exteriores de la superficie, engendrados al rotar ABC, son elípticos.
2) Los puntos de las circunferencias que definen tanto el movimiento del punto A como el movimiento del punto C, son parabólicos.
3) Los puntos interiores, engendrados al rotar el arco ADC, son hiperbólicos.



De lo anterior inferimos que en cada punto P de la superficie pueden haber direcciones en donde se anula la curvatura normal (direcciones asintóticas de puntos parabólicos), direcciones en donde la curvatura normal es positiva (puntos elípticos) y direcciones en donde la curvatura normal es negativa (puntos hiperbólicos).

Podemos también tratar de encontrar aquellas direcciones en las que la curvatura normal presenta valor máximo o valor mínimo (presenta un extremo). Tales direcciones se llaman principales y las correspondientes curvaturas se denominan curvaturas principales.

Para encontrar el valor máximo o mínimo de la curvatura normal emplearemos el cálculo diferencial, derivando e igualando a cero la curvatura normal con respecto a la variable dirección $\left(\frac{du_2}{du_1}\right)$.

Si hacemos $x = \frac{du_2}{du_1}$ en $K_n = \frac{II}{I}$:

$$K_n(x) = \frac{l_{11} + 2l_{12}.x + l_{22}.x^2}{g_{11} + 2g_{12}.x + g_{22}.x^2}$$

Bastará obtener los valores de x para los cuales $\frac{dK_n(x)}{dx} = 0$.

$$\frac{dK_n(x)}{dx} = \frac{(2l_{12} + 2l_{22}x)(g_{11} + 2g_{12}x + g_{22}x^2) - (2g_{12} + 2g_{22}x)(l_{11} + 2l_{12}x + l_{22}x^2)}{(g_{11} + 2g_{12}x + g_{22}x^2)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (l_{12} + l_{22}x)(g_{11} + 2g_{12}x + g_{22}x^2) - (g_{12} + g_{22}x)(l_{11} + 2l_{12}x + l_{22}x^2) = 0 \qquad [1]$$

de lo cual:

$$\frac{l_{12} + l_{22}x}{g_{12} + g_{22}x} = \frac{l_{11} + 2l_{12}x + l_{22}x^2}{g_{11} + 2g_{12}x + g_{22}x^2} = \frac{l_{11} + l_{12}x + (l_{12} + l_{22}x)x}{g_{11} + g_{12}x + (g_{12} + g_{22}x)x} = k_p \qquad [2]$$

ordenando [1] con respecto a las potencias de x:

$$(l_{12}g_{11} - l_{11}g_{12}) + (l_{22}g_{11} - l_{11}g_{22})x + (l_{22}g_{12} - l_{12}g_{22})x^2 = 0$$

y los valores de $x = \frac{du_2}{du_1}$ que hacen extrema la curvatura normal son las soluciones de dicha ecuación de 2º grado:

$$x_1 = \frac{l_{11}g_{22} - l_{22}g_{11} + \sqrt{(g_{11}l_{22} - g_{22}l_{11})^2 - 4(g_{12}l_{22} - g_{22}l_{12})(g_{11}l_{12} - g_{12}l_{11})}}{2(g_{12}l_{22} - g_{22}l_{12})}$$

$$x_2 = \frac{l_{11}g_{22} - l_{22}g_{11} - \sqrt{(g_{11}l_{22} - g_{22}l_{11})^2 - 4(g_{12}l_{22} - g_{22}l_{12})(g_{11}l_{12} - g_{12}l_{11})}}{2(g_{12}l_{22} - g_{22}l_{12})}$$

que, por lo demás, cumplen que:

$$x_1 + x_2 = -\frac{l_{22}g_{11} - l_{11}g_{22}}{l_{22}g_{12} - l_{12}g_{22}} \qquad x_1.x_2 = \frac{l_{12}g_{11} - l_{11}g_{12}}{l_{22}g_{12} - l_{12}g_{22}} \qquad [3]$$

Veamos como obtener los valores máximo y mínimo de la curvatura normal mediante el siguiente teorema.

Teorema 08:

Los valores de las curvaturas principales son las soluciones K_p de la ecuación de segundo grado

$$\begin{vmatrix} l_{11} - g_{11}k_p & l_{12} - g_{12}k_p \\ l_{12} - g_{12}k_p & l_{22} - g_{22}k_p \end{vmatrix} = 0$$

Demostración:

De la igualdad [2] y teniendo en cuenta la conocida equivalencia de proporciones:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow \frac{A}{B} = \frac{A + r.C}{B + r.D} \qquad r \ real$$

se tiene:

$$\frac{l_{12} + l_{22}x}{g_{12} + g_{22}x} = \frac{l_{11} + l_{12}x + (l_{12} + l_{22}x)x}{g_{11} + g_{12}x + (g_{12} + g_{22}x)x} = k_p \Rightarrow \frac{l_{12} + l_{22}x}{g_{12} + g_{22}x} = \frac{l_{11} + l_{12}x}{g_{11} + g_{12}x} = k_p$$

de lo cual:

$$\begin{aligned} l_{12} - g_{12}k_p + (l_{22} - g_{22}k_p)x = 0 \\ l_{11} - g_{11}k_p + (l_{12} - g_{12}k_p)x = 0 \end{aligned}$$ y siendo $x = \dfrac{du_2}{du_1}$, podemos escribir

$$\begin{pmatrix} l_{11} - g_{11}k_p & l_{12} - g_{12}k_p \\ l_{12} - g_{12}k_p & l_{22} - g_{22}k_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de donde, finalmente:

$$\begin{vmatrix} l_{11} - g_{11}k_p & l_{12} - g_{12}k_p \\ l_{12} - g_{12}k_p & l_{22} - g_{22}k_p \end{vmatrix} = 0 \qquad [4]$$

Asimismo podemos obtener la ecuación de las líneas de curvatura principal de la superficie S en un punto P.

Teorema 09:

Las ecuación de las líneas de curvatura principal viene dada por

$$(g_{11}l_{12} - g_{12}l_{11}).du_1^2 + (g_{11}l_{22} - g_{22}l_{11}).du_1 du_2 + (g_{22}l_{12} - g_{12}l_{22}).du_2^2 = 0$$

Demostración:

De [1]: $(l_{12} + l_{22}x)(g_{11} + 2g_{12}x + g_{22}x^2) - (g_{12} + g_{22}x)(l_{11} + 2l_{12}x + l_{22}x^2) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (g_{11}l_{12} - g_{12}l_{11}) + (g_{11}l_{22} - g_{22}l_{11})x + (g_{12}l_{22} - g_{22}l_{12})x^2 = 0$$

y sustituyendo $x = \dfrac{du_2}{du_1}$:

$$\left(g_{11}l_{12} - g_{12}l_{11}\right).du_1^2 + \left(g_{11}l_{22} - g_{22}l_{11}\right).du_1du_2 + \left(g_{22}l_{12} - g_{12}l_{22}\right).du_2^2 = 0$$

que puede considerarse el desarrollo del determinante

$$\begin{vmatrix} du_2^2 & -du_1du_2 & du_2^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ l_{11} & l_{12} & l_{22} \end{vmatrix} = 0$$

Teorema 10:

Las líneas de curvatura son perpendiculares.

Demostración:

Sean $x_1 = \dfrac{du_2}{du_1}, \quad x_2 = \dfrac{du_2^*}{du_1^*}$. Las direcciones las determinan los vectores:

$$d\vec{r} = \vec{r}_1.du_1 + \vec{r}_2.du_2, \qquad d\vec{r}^{\,*} = \vec{r}_1^{\,*}.du_1^* + \vec{r}_2^{\,*}.du_2^*$$

Veamos que su producto interior es nulo:

$$\begin{aligned} d\vec{r}.d\vec{r}^{\,*} &= \vec{r}_1.\vec{r}_1^{\,*}.du_1.du_1^* + \vec{r}_1.\vec{r}_2^{\,*}.du_1.du_2^* + \vec{r}_2.\vec{r}_1^{\,*}.du_2.du_1^* + \vec{r}_2.\vec{r}_2^{\,*}.du_2.du_2^* = \\ &= g_{11}.du_1.du_1^* + g_{12}du_1.du_2^* + g_{12}du_2.du_1^* + g_{22}du_2.du_2^* = \\ &= g_{11}.du_1.du_1^* + g_{12}(du_1.du_2^* + du_2.du_1^*) + g_{22}du_2.du_2^* = \\ &= g_{11} + g_{12}\left(\frac{du_2^*}{du_1^*} + \frac{du_2}{du_1}\right) + g_{22}.\frac{du_2}{du_1}.\frac{du_2^*}{du_1^*} = g_{11} + g_{12}(x_1 + x_2) + g_{22}.x_1.x_2 \end{aligned}$$

Sustituyendo las expresiones [3]: $x_1 + x_2 = -\dfrac{l_{22}g_{11} - l_{11}g_{22}}{l_{22}g_{12} - l_{12}g_{22}} \qquad x_1.x_2 = \dfrac{l_{12}g_{11} - l_{11}g_{12}}{l_{22}g_{12} - l_{12}g_{22}}$

Resulta:

$$d\vec{r}.d\vec{r} = g_{11} + g_{12}(x_1 + x_2) + g_{22}.x_1.x_2 = g_{11} + g_{12}\left(-\frac{l_{22}g_{11} - l_{11}g_{22}}{l_{22}g_{12} - l_{12}g_{22}}\right) + g_{22}\left(\frac{l_{12}g_{11} - l_{11}g_{12}}{l_{22}g_{12} - l_{12}g_{22}}\right) =$$

$$= g_{11}\left(l_{22}g_{12} - l_{12}g_{22}\right) + g_{12}\left(-l_{22}g_{11} + l_{11}g_{22}\right) + g_{22}\left(l_{12}g_{11} - l_{11}g_{12}\right) = 0$$

y las direcciones principales son, efectivamente, perpendiculares.

Teorema 11:

Si son proporcionales los coeficientes de ambas formas fundamentales, entonces no hay direcciones principales. Es decir:

$$l_{ij} = c.g_{ij}, \quad i, j = 1,2 \Rightarrow k_n = k_1 = k_2 = c$$

Demostración:

Bastará sustituir en [4]:

$$\begin{vmatrix} l_{11} - g_{11}k_p & l_{12} - g_{12}k_p \\ l_{12} - g_{12}k_p & l_{22} - g_{22}k_p \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} c.g_{11} - g_{11}k_p & c.g_{12} - g_{12}k_p \\ c.g_{12} - g_{12}k_p & c.g_{22} - g_{22}k_p \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} g_{11}(c - k_p) & g_{12}(c - k_p) \\ g_{12}(c - k_p) & g_{22}(c - k_p) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left(c - k_p\right)^2 . \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (c - k_p)^2 = 0 \Rightarrow k_p = c \ (doble)$$

(Estos puntos se denominan *puntos umbílicos)*

Corolario:

Si $l_{ij} = 0, \quad i, j = 1,2 \Rightarrow k_n = k_1 = k_2 = 0$

Demostración: trivial. (los puntos se dicen *umbílicos parabólicos.* Todos los puntos de un plano son umbílicos parabólicos*)*.

Teorema 12:

La condición necesaria y suficiente para que las líneas paramétricas, *du_1=0 y du_2=0*, sean líneas de curvatura es que

$$g_{12} = l_{12} = 0$$

Demostración:

- Veamos que es condición necesaria:

Si las líneas paramétricas, *du_1=0 y du_2=0,* son líneas de curvatura, esto implica que son perpendiculares por el teorema 10, luego $g_{12} = 0$.
Y de ser $g_{12}l_{22} - l_{12}g_{22} = 0 \Rightarrow l_{12} = 0$

- Veamos que es condición suficiente:

Sustituyendo en la ecuación de las líneas de curvatura principal:

$$(g_{11}l_{12} - g_{12}l_{11}).du_1^2 + (g_{11}l_{22} - g_{22}l_{11}).du_1du_2 + (g_{22}l_{12} - g_{12}l_{22}).du_2^2 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0 + (g_{11}l_{22} - g_{22}l_{11}).du_1du_2 + 0 = 0 \Rightarrow (g_{11}l_{22} - g_{22}l_{11}).du_1du_2 = 0 \Rightarrow du_1 = du_2 = 0$$

Bibliografía:

ABELLANAS, Pedro, “Geometría Básica”, Ediciones Romo, Madrid, 1969
STRUICK, D.J., “Geometría Diferencial clásica”, Aguilar Ediciones, Madrid, 1961
LELONG-FERRAND, Jacqueline, “Geometrie Differentielle”, Masson and Cie., Paris, 1963
CHOQUET-BRUHAT, Yvonne, “Geometrie Differentielle et systemes exterieurs”, Dunod, París, 1968
CARTAN, Elie, ‘’La theorie des groupes finis et continus et la geometrie differentielle traitées par le methode du repere mobile’’, Gauthiers-Vilars. París, 1937

Carlos S. Chinea
casanchi@terra.es