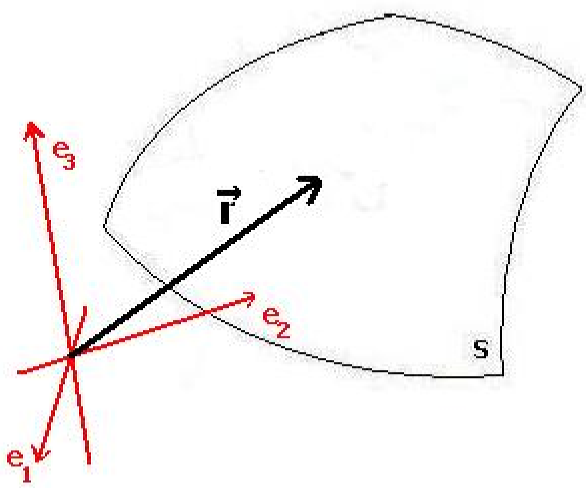
FORMAS FUNDAMENTALES. CURVATURA NORMAL Y TEOREMA DE MEUSNIER

1. Superficies diferenciables.

Consideremos las superficies S definidas vectorialmente:



Donde el vector $\vec{r} = (x(u_1, u_2),\ y(u_1, u_1),\ z(u_1, u_1))$ es diferenciable con respecto a las variables u_1, u_2:

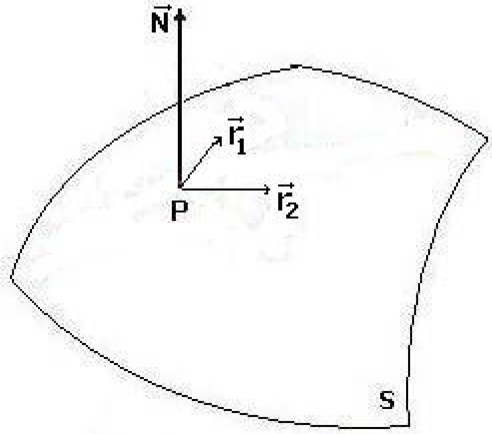
$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}.du_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}.du_2$$

llamaremos $\vec{r}_i = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u_i},\ \ i = 1,2$, teniéndose en definitiva: $\quad d\vec{r} = \vec{r}_1.du_1 + \vec{r}_2.du_2$

1.1. Vector normal en un punto:

Se llama vector normal, $\overline{N}$, de la superficie S en un punto P de la misma a un vector unitario perpendicular a los vectores $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$:

$$\vec{N} = \frac{\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2}{\left| \vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2 \right|}$$



Teorema 01: Se verifica que $\vec{r}_1.\vec{N}_2 = \vec{r}_2.\vec{N}_1$, siendo $\vec{N}_i = \dfrac{\partial \vec{N}}{\partial u_i},\ i = 1,2$

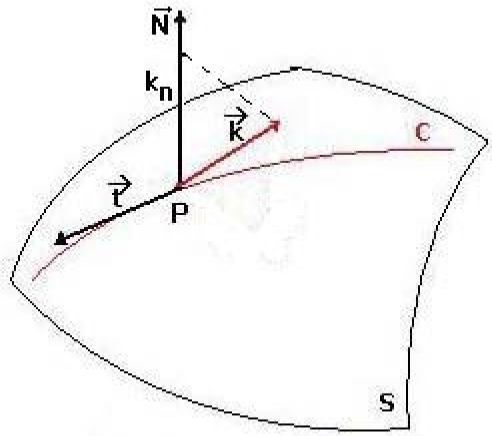
Efectivamente, pues por ser $\vec{N}.\vec{r}_i = 0,\ i = 1,2$, se tiene, al diferenciar:

$$\frac{\partial}{\partial u_j}\left(\vec{N}.\vec{r}_i\right) = \frac{\partial \vec{N}}{\partial u_j}.\vec{r}_i + \vec{N}.\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial u_j} = \vec{N}_j.\vec{r}_i + \vec{N}.\vec{r}_{ij} = 0 \Rightarrow \vec{N}_j.\vec{r}_i = -\vec{N}.\vec{r}_{ij} = -\vec{N}.\vec{r}_{ji} = \vec{N}_i.\vec{r}_j$$

(j,i=1,2)

1.2. Curvatura normal:

Dada una curva C contenida en la superficie S, de vector de curvatura $\vec{k}$ en un punto P de la misma, se llama *curvatura normal de C en el punto P, K_n,* a la proyección del vector $\vec{k}$ sobre el vector normal $\vec{N}$ a la superficie en P.



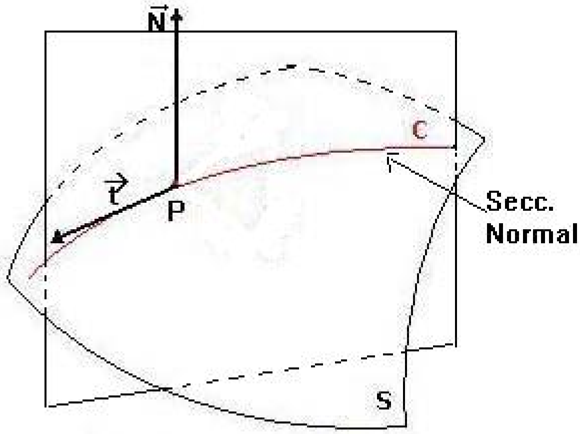
(Si llamamos *s* al parámetro longitud de arco, el vector curvatura de C en un punto dado se define como la derivada respecto de *s* del vector tangente, $\vec{k} = \dfrac{d\vec{t}}{ds}$, y el vector tangente como la derivada respecto de *s* del radio vector $\vec{t} = \dfrac{d\vec{r}}{ds}$)

En definitiva, es:

$$K_n = \vec{k}.\vec{N}$$

1.3. Sección normal:

Se llama sección normal a la superficie *S* en la dirección del vector tangente $\vec{t}$, en un punto *P* de la misma, a la intersección de la superficie con el plano definido por el punto *P* y los vectores N y t.



Teorema 02: El vector de curvatura de la curva definida por la sección normal de una superficie en un punto P tiene la dirección del vector $\vec{N}$.

En efecto: pues es $\frac{d\vec{t}}{ds} = k.\vec{n}$ (formulas de Frenet) y teniendo en cuenta que el vector $\vec{n}$ normal a la curva sección normal coincide con el vector $\vec{N}$ normal a la superficie en P.

2. Las formas fundamentales.

Se llama *Primer Forma Fundamental* al producto interior $d\vec{r}.d\vec{r}$:

$$I = ds^2 = d\vec{r}.d\vec{r} = \vec{r}_1.\vec{r}_1.du_1^2 + \vec{r}_2.\vec{r}_2.du_2^2 + 2\vec{r}_1.\vec{r}_2.du_1du_2$$

llamando $g_{ij} = \vec{r}_i.\vec{r}_j,\ i, j = 1,2$, se tiene:

$$I = g_{11}.du_1^2 + g_{22}.du_2^2 + 2g_{12}.du_1du_2$$

Teorema 03: Se verifica que $g_{11}.g_{22} - g_{12}^2 > 0$

Demostración:

Por ser *I* positiva: $I = g_{11}.du_1^2 + g_{22}.du_2^2 + g_{12}.du_1du_2 > 0$, se tiene

$$(du_1, du_2).\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \end{pmatrix} > 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow g_{11}.g_{22} - g_{12}^2 > 0$$

Teorema 04: Se verifica la expresión: $\vec{N} = \dfrac{\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2}{\sqrt{g}}$

Demostración:

$$\left|\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2\right|^2 = \left|\vec{r}_1\right|^2.\left|\vec{r}_1\right|^2.sen^2\theta = \left|\vec{r}_1\right|^2.\left|\vec{r}_1\right|^2.(1-\cos^2\theta) = \left|\vec{r}_1\right|^2.\left|\vec{r}_1\right|^2 - \left|\vec{r}_1\right|^2.\left|\vec{r}_1\right|^2\cos^2\theta =$$
$$= \vec{r}_1^{\,2}.\vec{r}_2^{\,2} - (\vec{r}_1.\vec{r}_2)^2 = g_{11}.g_{22} - g_{12}^2 = g \Rightarrow \left|\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2\right| = \sqrt{g}$$

y, en definitiva: $\vec{N} = \dfrac{\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2}{\left|\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2\right|} = \dfrac{\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2}{\sqrt{g}}$

Se llama *Segunda Forma Fundamental* al producto interior $d\vec{r}.d\vec{N}$:

$$II = d\vec{r}.d\vec{N} = \vec{r}_1.\vec{N}_1.du_1^2 + \vec{r}_2.\vec{N}_2.du_2^2 + 2\vec{r}_1.\vec{N}_2.du_1du_2$$

(pues, por el teorema *01*, es $\vec{r}_1.\vec{N}_2 = \vec{r}_2.\vec{N}_1$)

llamando $l_{ij} = \vec{r}_i.\vec{N}_j,\ i, j = 1,2$, se tiene:

$$II = l_{11}.du_1^2 + l_{22}.du_2^2 + 2l_{12}.du_1du_2$$

Teorema 05:

La curvatura normal, *Kn,* de una curva *C* contenida en una superficie *S*, es, en un punto dado *P*, el cociente de dividir la segunda por la primera forma fundamental:

$$K_n = \frac{II}{I}$$

Demostración:

$$K_n = \vec{k}.\vec{N} = \frac{d\vec{t}}{ds}.\vec{N} = -\vec{t}.\frac{d\vec{N}}{ds} = -\frac{d\vec{r}}{ds}.\frac{d\vec{N}}{ds} = -\frac{d\vec{r}.d\vec{N}}{ds^2} = \frac{II}{I}$$

Corolario: Todas las curvas de la superficie S que pasan por un punto dado, P, y son tangentes a la misma dirección, tienen la misma curvatura normal.

Efectivamente, pues la curvatura normal solo depende de los g_{ij}, l_{ij} (definidos para cada punto P) y de las direcciones $\partial u_i / \partial u_j$.

Se definen las *direcciones asintóticas* en un punto P de una superficie S como las direcciones en las que $K_n = 0$, en dicho punto. Las curvas C contenidas en S que tienen dirección asintótica en P se dicen *curvas asintóticas* en P.

Se llama *radio de curvatura* de una curva en un punto al inverso de su curvatura. Así, tenemos:

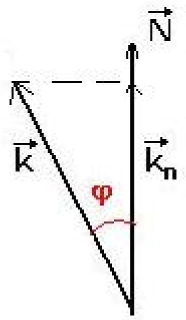
Radio de curvatura: R = 1/k, Radio de curvatura normal: $R_n = 1/K_n$

3. El Teorema de Meusnier.

Consideremos una curva C contenida en la superficie S que pasa por el punto P en la dirección $\vec{t}$ no asintótica $(k_n \neq 0)$. Sea k_n la curvatura normal y φ el ángulo que forman en P el vector de curvatura $\vec{k}$ y el vector normal $\vec{N}$ a la superficie en P. Se verifica entonces que

$$K_n = k.\cos\varphi \quad y \quad R = R_n.\cos\varphi$$

Siendo R y R_n los radios de curvatura en C y en la sección normal en P y dirección $\vec{t}$, C_n, respectivamente.



Demostración:

Por definición de curvatura normal:

$$K_n = k.\cos\varphi$$

y por el teorema 02, la curvatura normal de la sección normal tiene la dirección del vector $\vec{N}$ normal a la superficie, por lo que su radio de curvatura es R_n.

Entonces: $\dfrac{1}{R_n} = \dfrac{1}{R}\cos\varphi \Rightarrow R = R_n.\cos\varphi$

Dicho de otro modo, si llamamos cc al centro de curvatura de la curva C en una dirección no asintótica que pasa por P, y llamamos ccn el centro de curvatura de la sección normal por el punto P en la misma dirección, se tiene que cc es la proyección sobre la normal de C de ccn, que se puede visualizar mediante el siguiente gráfico.