UNA INCURSIÓN EN LA TEORÍA DE LAS SERIES FORMALES

01. ÁLGEBRA DE SERIES FORMALES

Consideremos un cuerpo conmutativo *k* y una letra *X* que llamaremos *indeterminada*. Se entiende por serie formal a una expresión de la forma

$$\sum_{n\geq 0} a_n X^n$$

Donde es $a_n \in k, n \geq 0$. Representaremos por $k[[X]]$ al conjunto de las series formales en la indeterminada *X* con coeficientes en el cuerpo *k.*

Es inmediato que con las clásicas definiciones de suma, producto por elementos del cuerpo y producto interno de series formales, el conjunto $k[[X]]$ queda dotado de estructura de *álgebra asociativa, conmutativa y unitaria*.

- Suma:

$$\forall \left(\sum_{n\geq 0} a_n X^n \right), \left(\sum_{n\geq 0} b_n X^n \right) \in [[X]], \sum_{n\geq 0} a_n X^n + \sum_{n\geq 0} b_n X^n = \sum_{n\geq 0} c_n X^n$$

(siendo $c_n = a_n + b_n$)

- Producto por elementos del cuerpo:

$$\forall \alpha \in k, \forall \left(\sum_{n\geq 0} a_n X^n \right) \in [[X]], = \alpha . \sum_{n\geq 0} a_n X^n = \sum_{n\geq 0} c_n X^n$$

(siendo $c_n = \alpha . a_n$)

- Producto interno de series formales:

$$\forall \left(\sum_{n\geq 0} a_n X^n \right), \left(\sum_{n\geq 0} b_n X^n \right) \in [[X]], \sum_{n\geq 0} a_n X^n . \sum_{n\geq 0} b_n X^n = \sum_{n\geq 0} c_n X^n$$

(siendo $c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$)

Si simbolizamos por *S(X)* la serie $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$, esto es $S(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$, se define el *orden* $\theta(S(X))$ de la misma por:

$$\theta(S(X)) = \begin{cases} +\infty, \; si \; S(X) = 0 \\ n, \; si \; es \; a_n el \; menor \; número \; natural \; tal \; que \; a_n \neq 0 \end{cases}$$

Una familia de series $\{S(X_i)\}_{i\in I}$ se dice que es sumable si para todo entero *m* es $\theta(S(X_i)) \geq m$ salvo para un número finito de índices *i*.

La suma de la familia sumable $\{S(X_i)\}_{i\in I} = \left\{\sum_{n\geq 0} a_{ni}X^n\right\}_{i\in I}$ es, por definición, la serie formal $S(X)=\sum_{n\geq 0} a_n X^n$, donde $a_n = \sum_{i\in I} a_{ni}$, y la suma queda perfectamente definida, pues al tratarse de series sumables, los coeficientes a_{ni} son para cada n, todos nulos salvo un número finito de índices *i*.

El siguiente teorema es inmediato:
Teorema: El anillo $k[[X]]$ de las series formales es de integridad, esto es, no tiene divisores de cero.
Demostración:
Veamos que para dos series cualesquiera no nulas, el producto de ambas es no nulo.
Sean $S(X)=\sum_{n\geq 0} a_n X^n, T(X)=\sum_{n\geq 0} b_n X^n$ cuyos ordenes $\theta(S(X)) = p, \theta(T(Y)) = q$, siendo $p\neq 0, q\neq 0$. En la serie producto, $S(X).T(X)=\sum_{n\geq 0} c_n X^n$, se verifica que $c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$, por lo que si $n < p+q$ será $c_n = 0$, y cuando resulta $n = p+q$ es $c_n = \sum_{j=0}^{p+q} a_j b_{n-j} = a_p.b_q \neq 0$ por lo que el producto de ambas es no nulo. Y puesto que el primer término de la serie producto distinto de cero es $c_{p+q}X^{p+q}$, se tiene que su orden es $\theta(\sum_{n\geq 0} c_n X^n) = p+q = \theta(S(X)) + \theta(T(X))$

02. SUSTITUCIÓN DE UNA SERIE FORMAL EN OTRA

Sean dos series formales no nulas, $S(X)=\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ y $T(Y)=\sum_{n\geq 1} b_n Y^n$, y asociemos a cada término de S(X) el resultado de sustituir la indeterminada por T(Y), con lo que obtenemos la serie formal

$$\sum_{n\geq 0} a_n (T(Y))^n$$

Teorema 02: Dadas las series formales $S(X)=\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ y $T(Y)=\sum_{n\geq 1} b_n Y^n$, en la serie compuesta $S(X)\circ T(Y) = S(T(Y)) = \sum_{n\geq 0} a_n (T(Y))^n$ se cumple que la familia de los sumandos, $\{a_n(T(Y))^n\}_{n\geq 0}$, es una familia de series formales sumable.

Demostración:

Al ser $T(Y)=\sum_{n\geq 1} b_n Y^n$ se tiene que $b_0 = 0$, por lo que $\theta(T(Y)) = q \geq 1$. Entonces:

$$\theta(T(Y)^n) = n.T(Y) = n.q \geq n \rightarrow \theta(a_n(T(Y)^n) \geq n \rightarrow \{a_n(T(Y)^n\}_{n\geq 0} \ sumable$$

Teorema 03: Para las series formales $S_1(X)$, $S_2(X)$ en la indeterminada X y para la serie formal $T(Y)$ en la indeterminada Y se verifican las igualdades de distributividad siguientes:

a) $(S_1(X)+S_2(X))\circ T(Y)=S_1(X)\circ T(Y)+S_2(X)\circ T(Y)$

b) $S_1(X).S_2(X))\circ T(Y)=(S_1(X)\circ T(Y)).(S_2(X)\circ T(Y))$

Demostración:

Llamemos $S_1(X)=\sum_{n\geq 0}c_nX^n$, $S_2(X)=\sum_{n\geq 0}d_nX^n$, $T(Y)=\sum_{n\geq 0}b_nY^n$, asimismo si llamamos $(T(Y)^n=\sum_{k\geq 0}b_k(n).Y^k$, se tiene:

a) $S_1(X)+S_2(X)=\sum_{n\geq 0}c_nX^n+\sum_{n\geq 0}d_nX^n=\sum_{n\geq 0}(c_n+d_n)X^n$

$$\left(S_1(X)+S_2(X)\right)\circ T(Y)=\sum_{n\geq 0}(c_n+d_n)\left(T(Y)\right)^n=\sum_{n\geq 0}(c_n+d_n)\left(\sum_{n\geq 0}b_nY^n\right)^n=$$

$$=\sum_{n\geq 0}(c_n+d_n)\sum_{k\geq 0}b_k(n)Y^k=\sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0}(c_n+d_n)b_k(n)Y^k=\sum_{h\geq 0}d_hY^h$$

de donde:

$$d_h=\sum_{n=0}^{h}(c_n+d_n).b_h(n)=\sum_{n=0}^{h}c_n.b_h(n)+\sum_{n=0}^{h}d_n.b_h(n)$$

Análogamente:

$$S_1(X)\circ T(Y)=\sum_{n\geq 0}c_n\left(\sum_{n\geq 0}b_nY^n\right)^n=\sum_{n\geq 0}c_n\sum_{k\geq 0}b_k(n)Y^k=\sum_{h\geq 0}e_{1h}Y^h$$

$$S_2(X)\circ T(Y)=\sum_{n\geq 0}d_n\left(\sum_{n\geq 0}b_nY^n\right)^n=\sum_{n\geq 0}d_n\sum_{k\geq 0}b_k(n)Y^k=\sum_{h\geq 0}e_{2h}Y^h$$

donde:

$$e_{1h}=\sum_{n=0}^{h}c_n.b_h(n),\ \ e_{2h}=\sum_{n=0}^{h}d_n.b_h(n)$$

En definitiva: $S_1(X)+S_2(X))\circ T(Y)=S_1(X)\circ T(Y)+S_2(X)\circ T(Y)$

b) Si es $S_1(X).S_2(X)=\sum_{n\geq 0}m_nX^n,\ con\ m_n=\sum_{k=0}^{n}c_kd_{n-k}$ se tiene:

$$(S_1(X).S_2(X))\circ T(Y)=\sum_{n\geq 0}m_n(T(Y))^n=\sum_{n\geq 0}m_n(\sum_{n\geq 0}b_nY^n)^n=\sum_{n\geq 0}m_n\sum_{k\geq n}b_k(n)Y^k=$$

$=\sum_{p\geq 0}t_pY^p$, donde es $t_p=\sum_{n=0}^{p}m_nb_p(n)=\sum_{n=0}^{p}\sum_{h=0}^{n}c_hd_{n-h}.b_p(n)$

Por otra parte

$$\left(S_1(X)\circ T(Y)\right).\left(S_2(X)\circ T(Y)\right)=\sum_{n\geq 0}\alpha_nY^n.\sum_{m\geq 0}\beta_mY^m=\sum_{p\geq 0}s_pY^p$$

donde es $s_p=\sum_{n=0}^{p}\alpha_n\beta_{p-n}=\sum_{n=0}^{p}\left(\sum_{h\geq 0}c_hb_n(h)\right)\left(\sum_{k\geq 0}d_kb_{p-n}(k)\right)=$

$$=\sum_{h\geq 0}\sum_{k\geq 0}c_hd_k\left(\sum_{n=0}^{p}b_n(h).b_{n-p}(k)\right)$$

(al ser sumas finitas es válida la permutación de sumatorios)

Obviamente, si h>n es $b_n(h)=0$, y también es $b_{p-n}(k)=0$ cuando $k>p$

Es inmediato que $\sum_{n=0}^{p}b_n(h).b_{p-n}=b_p(h+k)$, por lo que haciendo $h+k=n$:

$$s_p = \sum_{h\geq 0}\sum_{k\geq 0} c_h d_k b_p(h+k) = \sum_{n=0}^{p}\sum_{h=0}^{n} c_h d_{n-h} b_p(n) = t_p$$

y en definitiva:

$$(S_1(X).S_2(X)) \circ T(Y) = (S_1(X)\circ T(Y)).(S_2(X)\circ T(Y))$$

Teorema 04: Sea $\{S_i(X)\}_{i\in I}$ una familia sumable de series formales. Se verifica que la familia $\{S_i(X)\circ T(Y)\}_{i\in I}$ es también sumable, cumpliendo que

$$\sum_i S_i(X)\circ T(Y) = \sum_i (S_i(X)\circ T(Y))$$

Demostración:
Si es $S_i(X) = \sum_{n\geq 0} a_{ni}X^n$, y llamando $\sum_i S_i(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$, se tendrá que $a_n = \sum_i a_{ni}$.
Tenemos, por una parte, que:

$$\left(\sum_i S_i(X)\right)\circ T(Y) = \sum_{n\geq 0} a_n (T(Y))^n = \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0} a_n b_k(n) Y^k = \sum_{p\geq 0} t_p Y^p \text{ , siendo } t_p = \sum_{n=0}^{p} a_n b_k(n)$$

Y por otra parte:

$$\sum_i (S_i(X)\circ T(Y)) = \sum_i\sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0} a_{ni} b_k(n) Y^k = \sum_{p\geq 0} s_p Y^p$$

siendo:

$$s_p = \sum_i \sum_{n=0}^{p} a_{ni} b_p(n) = \sum_{n=0}^{p}\sum_i a_{ni} b_p(n) = \sum_{n=0}^{p} a_n b_p(n) = t_p$$

se tiene en definitiva que

$$\sum_i S_i(X)\circ T(Y) = \sum_i (S_i(X)\circ T(Y))$$

Teorema 04: Para las series formales $S(X), T(X), V(X)$ de órdenes respectivos dados por $\omega(S)\geq 0, \omega(T)\geq 1, \omega(V)\geq 1$ se verifica que

$$S(X)\circ (T(X)\circ V(X)) = (S(X)\circ T(X))\circ V(X)$$

Demostración:

Si aplicamos el Teorema 03, parte b), se tiene: $S(X)^n \circ T(X) = (S(X)\circ T(X))^n$, y si es $S(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ se tendrá que $S(X)\circ T(X) = \sum_{n\geq 0} a_n T(X)^n$, con lo cual, aplicando nuevamente Teorema 03, parte b), se tiene que al ser $\{a_n T(X)^n\}_{n\geq 0}$ sumable:

$$(S(X)\circ T(X))\circ V(X) = \sum_{n\geq 0} a_n (T(X)^n \circ V(X)) = \sum_{n\geq 0} a_n (T(X)\circ V(X))^n =$$
$$= S(X)\circ (T(X)\circ V(X))$$

03. INVERSA DE UNA SERIE FORMAL

La serie inversa de una serie formal, $S(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$, es, si existe, otra serie formal, $S^{-1}(X) = \sum_{n\geq 0} \varphi_n X^n$, tal que

$$S(X).S^{-1}(X) = S^{-1}(X).S(X) = 1$$

Teorema 05: Existe al menos la inversa de una serie formal.
Demostración:
Sea la serie de solamente dos términos, $S(X) = 1 - X$. Se verifica la identidad

$$S(X).S^{-1}(X) = (1 - X).(1 + X + X^2 + ... + X^N + ...) = 1$$

Luego la inversa de la serie $S(X) = 1 - X$ existe y es

$$S^{-1}(X) = \sum_{n \geq 0} X^n = 1 + X + X^2 + ... + X^n + ...$$

Teorema 06: Para que una serie formal, $S(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$, posea serie inversa es condición necesaria y suficiente que $a_0 \neq 0$.
Demostración:
a) es condición necesaria:
Pues si existe $Z(X) = \sum_{n \geq 1} b_n X^n$ tal que $S(X).Z(X) = 1$, ha de ser

$S(X).Z(X) = \sum_{n \geq 0} c_n X^n = 1$ con $c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$, por lo que $c_0 = a_0.b_0 = 1 \rightarrow a_0 \neq 0$

b) es condición suficiente:

$$a_0 \neq 0 \rightarrow S(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + ... \rightarrow S_1(X) = \frac{1}{a_0} S(X) =$$

$$= 1 + \frac{a_1}{a_0} X + \frac{a_1}{a_0} X^2 + ... \rightarrow S_1(X) = 1 + \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{a_0} X^n = 1 - V(X),$$

siendo $V(X) = \sum_{n \geq 0} \left(-\frac{a_n}{a_0} \right) X^n$

por el teorema 05, la inversa de $1 - V(X)$ existe y es $\sum_{n \geq 0} V(X)^n$ pues se verifica la identidad $(1 - V(X)) \sum_{n \geq 0} V(X) = 1$, con lo cual $S_1(X) = 1 - V(X)$ tiene inversa, y, por consiguiente, también tiene inversa $S(X) = a_0.S_1(X)$

04. DERIVADA DE UNA SERIE FORMAL

Se denomina serie formal derivada de la serie formal $S(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ a la serie formal dada por $S'(X) = \sum_{n \geq 1} n.a_n X^{n-1}$ que suele representarse por $dS(X)/dx$ o bien $\frac{d}{dx} S(X)$.

Son propiedades inmediatas de la serie derivada:

1) Se trata de un homomorfismo en $k[[X]]$, pues $d/dX : k[[X]] \rightarrow k[[X]]$ es tal que

$$\forall S_1(X), S_2(X) \in k[[X]], d/dX(a_1 S_1(X) + a_2 S_2(X)) = a_1 dXS_1(X)/dX + a_2 d/dS_2(X)/dX$$

2) La serie formal derivada de la serie producto de dos series formales, $S(X).T(X)$, obedece la regla $[S(X).T(X)]' = S'(X).T(X) + S(X).T'(X)$
3) Si es $S(0) = a_0 \neq 0$ y *T(X)* es la serie formal inversa de *S(X)*, se deduce del apartado 2) que $T'(X) = -T(X)^2 S'(X)$
4) La derivada n-sima de la serie S(X) es $S^{(n)}(X) = n!.a_n + [ter\_g > 1]$, siendo $[ter\_g > 1]$ un conjunto de términos de grado mayor que la unidad.

05. SERIES FORMALES RECÍPROCAS

Teorema 07: La serie de un solo término *I=X* es elemento neutro para la composición de series formales: $\forall S(X) \in k[[X]], S(X) \circ I = I \circ S(X) = S(X)$

Demostración:

$$S(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n \rightarrow \begin{cases} S(X) \circ I = \sum_{n\geq 0} a_n I^n = \sum_{n\geq 0} a_n X^n = S(X) \\ I \circ S(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n = S(X) \end{cases}$$

Las series $S(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ y $T(Y) = \sum_{n\geq 0} b_n Y^n$ se dicen recíprocas sii

$$S(X) \circ T(Y) = Y \text{ y } T(Y) \circ S(X) = X$$

Teorema 08:Dada la serie formal $S(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$, se tiene que la condición necesaria y suficiente para que exista una serie formal $T(Y) = \sum_{n\geq 0} b_n Y^n$ tal que $S(X) \circ T(Y) = I$, con $T(0) = 0$, es que $S(0) = 0$ y $S'(0) \neq 0$.

Demostración:

1) Es condición necesaria:

$S(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ y $T(Y) = \sum_{n\geq 1} b_n Y^n$

Si es $S(X) \circ T(Y) = Y \rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n T(Y)^n = Y$, y al identificar términos, tenemos que $a_0 = 0 \wedge a_1 b_1 \neq 0 \rightarrow a_1 \neq 0$. Entonces:

$$S(x) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n = 0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... \rightarrow S(0) = 0$$

$$S'(X) = \sum_{n\geq 1} n a_n X^{n-1} = 1.a_1 + 2a_2 X + 3a_3 X^2 + ... \rightarrow S'(0) = a_1 \neq 0$$

2) Es condición suficiente:

Hacemos $b_1 = 1/a_1$. Como es $S(X) = \sum_{n\geq 1} a_n X^n$, $(a_0 = 0, a_1 \neq 0)$

$$S(X) \circ T(Y) = S(T(Y)) = \sum_{n\geq 1} a_n T(Y)^n = \sum_{n\geq 1} a_n \sum_{n\geq 0} b_n Y^n = a_1 \left(\sum_{n\geq 0} b_n Y^n \right) + a_2 \left(\sum_{n\geq 0} b_n Y^n \right) + ... =$$

$$= c_0 + c_1 Y + c_2 Y^2 + ...$$

Si imponemos que $c_0 = c_2 = ...c_n = ... = 0$, se tendrá que $S(X) \circ T(Y) = b_1 a_1 Y = Y$

Como $c_n = a_1 b_1 + P_n(a_1, a_2, ..., a_n, b_1, ..., b_{n-1}) = 0$ donde es P_n un polinomio conocido, lo cual nos permite calcular cada b_n. Es decir la serie $T(Y) = \sum_{n\geq 1} b_n Y^n$ existe y es única, cumpliendo que $T(0) = 0$ y $T'(0) = b_1 \neq 0$.

Por lo que si aplicamos a T(X) el resultado obtenido para S(X), existe una serie formal, $S_1(X)$, tal que $S_1(0) = 0, T(Y) \circ S_1(X) = I$

Se tiene, en definitiva que

$S_1(x) = I \circ S_1(X) = \left(S(X) \circ T(Y)\right) \circ S_1(X) = S(X) \circ I = S(X)$

y, por tanto es $S_1(X) = S(X) \to T(Y) \circ S(X) = I$

Bibliografía

Dubreil,P.;Dubreil-Jacotin, M.L.,Lecciones de Algebra Moderna, Ed. Reverté
Cartan, H.; Teoría elemental de las funciones analíticas de una y varias variables, Madrid Selecciones Científicas , 1968.
Apóstol, T. M.; Análisis Matemático, Editorial Reverté, 1977
Caratheodory, C.; Theory of functions of a complex variable, AMS Chelsea Publishing, 2000
Markushevich, A. I.; Teoría de las funciones analíticas, Urmo S.A. de Ediciones, 1977