

Una breve introducción a las series trigonométricas de Fourier

01. Introducción:

01.1. El producto interior:

Llamaremos $IR[a,b]$ al conjunto de las funciones integrables Riemann en el intervalo cerrado $[a,b]$. Y nos planteamos la posibilidad de que el producto algebraico de dos funciones sea también integrable Riemann. Cuando esto ocurre podemos hablar de producto interior de dos funciones integrables Riemann.

Definimos el *producto interior* de dos funciones integrables Riemann en un intervalo cerrado como la integral Riemann de su producto algebraico en dicho intervalo:

$$\forall f, g \in IR[a,b], (f, g) = \int_a^b f(x) \cdot g(x) \cdot dx$$

La *norma* $|f|$ de una función integrable Riemann en $[a,b]$ se define como la raíz cuadrada del producto interior por sí misma en $[a,b]$:

$$\forall f \in IR[a,b], |f|^2 = (f, f) = \int_a^b f^2(x) \cdot dx$$

¿Porqué llamar a esta integral producto interior?. Pues, realmente, podemos comprobar que se verifican las mismas propiedades que verifica el producto interior de vectores en un espacio euclídeo. Veámoslo mediante un sencillo teorema que nos muestra sus propiedades básicas:

Teorema 01. Propiedades del producto interior y de la norma:

Para cualesquiera que sean las funciones integrables Riemann siguientes, es decir, para $\forall f, g, f_1, f_2, g_1, g_2 \in IR[a,b]$, y para todo número real $c \in R$, se tiene

- 1) $(f, g) = (g, f)$
- 2) $(f, cg) = (cf, g) = c(f, g)$
- 3) $(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g)$ y $(f, g_1 + g_2) = (f, g_1) + (f, g_2)$
- 4) $|(f, g)| \leq |f| \cdot |g|$
- 5) $|f + g| \leq |f| + |g|$

Demostración:

- 1) Trivial.
- 2) Trivial.
- 3) Trivial.
- 4) Consideremos la integral del cuadrado del determinante funcional siguiente:

$$0 \leq \frac{1}{2} \int_a^b \left[\int_a^b \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f(y) & g(y) \end{vmatrix}^2 dy \right] dx$$

Desarrollando:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2} \int_a^b \left[\int_a^b (f(x) \cdot g(y) - g(x) \cdot f(y))^2 dy \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \left[\int_a^b (f^2(x) \cdot g^2(y) - 2g(x) \cdot f(y)g(y) \cdot f(x) + g^2(x) \cdot f^2(y)) dy \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \left[\int_a^b f^2(x) \cdot g^2(y) dy - \int_a^b 2g(x) \cdot f(y)g(y) \cdot f(x) dy + \int_a^b g^2(x) \cdot f^2(y) dy \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \left[\int_a^b f^2(x) \cdot g^2(y) dy \right] dx - \frac{1}{2} 2 \int_a^b \left[\int_a^b g(x) \cdot f(y)g(y) f(x) dy \right] dx + \frac{1}{2} \int_a^b \left[\int_a^b g^2(x) \cdot f^2(y) dy \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \left[\int_a^b g^2(y) dy \right] f^2(x) dx - \frac{1}{2} 2 \int_a^b \left[\int_a^b f(y)g(y) dy \right] f(x)g(x) dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_a^b \left[\int_a^b f^2(y) dy \right] g^2(x) dx = \frac{1}{2} \left[\int_a^b f^2(x) dx \right] \left[\int_a^b g^2(y) dy \right] - \left[\int_a^b f(x)g(x) dx \right] \left[\int_a^b f(y)g(y) dy \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\int_a^b g^2(x) dx \right] \left[\int_a^b f^2(y) dy \right] = \frac{1}{2} (f, f)(g, g) - (f, g)^2 + \frac{1}{2} (g, g)(f, f) = \\ &= \frac{1}{2} |f|^2 |g|^2 - |(f, g)|^2 + \frac{1}{2} |f|^2 |g|^2 = |f|^2 |g|^2 - |(f, g)|^2 \end{aligned}$$

En definitiva, vemos que $0 \leq |f|^2 |g|^2 - |(f, g)|^2$, por lo que $|(f, g)| \leq |f| |g|$

$$\begin{aligned} 5) |f + g|^2 &= \int_a^b (f(x) + g(x))^2 dx = \int_a^b (f^2(x) + 2f(x)g(x) + g^2(x)) dx = \int_a^b f^2(x) dx + \\ &+ 2 \int_a^b f(x)g(x) dx + \int_a^b g^2(x) dx = (f, f) + 2(f, g) + (g, g) = |f|^2 + 2(f, g) + |g|^2 \end{aligned}$$

Es decir, $|f + g|^2 = |f|^2 + 2(f, g) + |g|^2$, y como es $(f, g) \leq |(f, g)|$, y además se tiene que, por 4), es $(f, g) \leq |(f, g)| \leq |f| |g|$, sustituimos:

$$|f + g|^2 \leq |f|^2 + 2|f| |g| + |g|^2 = (|f| + |g|)^2 \rightarrow |f + g| \leq |f| + |g|$$

Podemos extender la noción de producto interior al caso de funciones complejas definiéndolo en la forma:

$$\forall f, g \in IR[a, b], (f, g) = \int_a^b f(x) \cdot \overline{g(x)} dx$$

cumpliéndose las propiedades anteriormente enunciadas, ahora en la forma:

$$(f, g) = \overline{(g, f)}, (cf, g) = c(f, g), (f, cg) = \overline{c}(f, g)$$

¿Podemos hablar aquí también de combinación lineal de funciones? ¿de sistema de funciones linealmente independientes? ¿de sistema ortogonal de funciones?. Veamos cómo podemos establecer estas definiciones.

01.2. Ortogonalidad, ortonormalidad, independencia lineal:

Dos funciones integrables Riemann en un cierto intervalo $[a, b]$ se dicen *ortogonales* en dicho intervalo si su producto interior es nulo.

$$\varphi_i(x), \varphi_j(x) \in IR[a, b] \text{ ortogonales en } [a, b] \leftrightarrow (\varphi_i, \varphi_j) = \int_a^b \varphi_i(x) \cdot \varphi_j(x) \cdot dx = 0$$

Un sistema de funciones se dice *ortogonal* si y solo si todas las funciones del sistema son ortogonales dos a dos.

$$S = \{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots\} \text{ ortogonal} \leftrightarrow (\varphi_i(x), \varphi_j(x)) = 0, \text{ si } i \neq j$$

Un sistema ortogonal se dice que es *ortonormal* si y solo si todas las funciones tienen norma unidad. Podemos definirlo así:

$$S = \{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots\} \text{ ortonormal} \leftrightarrow (\varphi_i(x), \varphi_j(x)) = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j \\ 1, & \text{si } i = j \end{cases}$$

Un sistema S de n funciones se dice linealmente independiente en $[a, b]$ si y solo si una combinación lineal de las mismas igualada a cero implica necesariamente que todos los coeficientes de la combinación son nulos:

$$S = \{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\} \text{ l.independ} \leftrightarrow \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x) = 0 \rightarrow c_k = 0, k = 1, \dots, n, \forall x \in [a, b]$$

Una familia infinita de funciones se dice linealmente independiente en $[a, b]$ si todo subconjunto finito es linealmente independiente en $[a, b]$.

En realidad, todo sistema ortonormal en un intervalo cerrado es también linealmente independiente en dicho intervalo. Veamos esto en el siguiente teorema.

Teorema 02.

Si $S = \{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}$ ortonormal $\rightarrow S = \{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}$ l.independiente

En efecto:

Multiplicando la combinación lineal por $\varphi_j(x)$, $j = 1, \dots, n$:

$$\left(\sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x), \varphi_j(x) \right) = 0 \rightarrow \sum_{k=0}^n c_k (\varphi_k(x), \varphi_j(x)) = c_j (\varphi_j(x), \varphi_j(x)) = c_j = 0, j = 1, \dots, n$$

01.3. Ejemplos de conjuntos de funciones ortonormales en un intervalo cerrado:

Ejemplo 1: El conjunto $S = \{\cos kx\}_{k \geq 0} = \{\cos 0x, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots\}$ es ortogonal en el intervalo cerrado $[-\pi, \pi]$.

Comprobemos tal ortogonalidad y determinemos la norma de cada una de las funciones:

a) Ortogonalidad: Si es $m \neq n$, se tiene que

$$\begin{aligned} (\cos nx, \cos mx) &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx \cdot dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x \cdot dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x \cdot dx = \\ &= \frac{1}{2(m+n)} \text{sen}(m+n)x \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2(m-n)} \text{sen}(m-n)x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

b) Norma: Se tiene que para $n \neq 0$ es

$$|\cos nx|^2 = (\cos nx, \cos nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos 2nx + 1) \, dx = \frac{1}{4n} \text{sen} 2nx \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ + \frac{1}{2} x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 + \frac{1}{2} 2\pi = \pi \rightarrow |\cos nx| = \sqrt{\pi}$$

para $n = 0$:

$$|\cos 0x|^2 = (\cos 0x, \cos 0x) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos 0x \cdot \cos 0x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx = x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi \rightarrow \\ \rightarrow |\cos 0x| = \sqrt{2\pi}$$

Por tanto, el sistema ortonormalizado será:

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$$

Ejemplo 2: El conjunto $S = \{\text{sen} kx\}_{k \geq 0} = \{\text{sen} 0x, \text{sen} x, \text{sen} 2x, \dots, \text{sen} nx, \dots\}$ es ortogonal en el intervalo cerrado $[-\pi, \pi]$.

Comprobemos tal ortogonalidad y determinemos la norma de cada una de las funciones:

a) Ortogonalidad: Si es $m \neq n$, se tiene que

$$(\text{sen} nx, \text{sen} mx) = \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen} nx \cdot \text{sen} mx \, dx = -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x \, dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x \, dx = \\ = -\frac{1}{2(m+n)} \text{sen}(m+n)x \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2(m-n)} \text{sen}(m-n)x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 + 0 = 0$$

b) Norma: Se tiene que para $n \neq 0$ es

$$|\text{sen} nx|^2 = (\text{sen} nx, \text{sen} nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^2 nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx) \, dx = +\frac{1}{2} x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\ \frac{1}{4n} \text{sen} 2nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2} 2\pi + 0 \rightarrow |\text{sen} nx| = \sqrt{\pi}$$

para $n = 0$: $\text{sen} 0x = 0$

Por tanto, el sistema ortonormalizado será:

$$S = \left\{ \frac{\text{sen} x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\text{sen} 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\text{sen} nx}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$$

Ejemplo 3: El conjunto

$S = \{\text{sen} kx, \cos kx\}_{k \geq 0} = \{\cos 0x, \text{sen} 0x, \cos x, \text{sen} x, \text{sen} 2x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \text{sen} nx, \dots\}$ es ortogonal en el intervalo cerrado $[-\pi, \pi]$.

Comprobemos tal ortogonalidad y determinemos la norma de cada una de las funciones:

a) Si es $m \neq n$, se tiene que

$$(\text{sen} nx, \cos mx) = \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen} nx \cdot \cos mx \, dx = -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(m+n)x \, dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(m-n)x \, dx = \\ = \frac{1}{2(m+n)} \cos(m+n)x \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2(m-n)} \cos(m-n)x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^{m+n}}{2(m+n)} - \frac{(-1)^{m-n}}{2(m-n)} = 0 \\ (\cos nx, \cos mx) = 0 \text{ (por el ejemplo 1)}$$

$(\text{senn}x, \text{sen}mx) = 0$ (por el ejemplo 2)

$$(\text{senn}x, \cos nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \text{senn}x \cdot \cos nx \cdot dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(2nx) \cdot dx = -\frac{1}{4n} \cos(2nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= -\frac{1}{4n} [\cos(2n\pi) - \cos(-2n\pi)] = -\frac{1}{4n} [\cos(2n\pi) - \cos(2n\pi)] = 0$$

b) Norma: Se tiene que para $n \neq 0$ es

$$|\text{senn}x| = \sqrt{\pi} \quad (\text{por el ejemplo 2})$$

$$|\cos nx| = \sqrt{\pi} \quad (\text{por el ejemplo 1})$$

para $n = 0$:

$$|\cos 0x| = \sqrt{2\pi} \quad (\text{por el ejemplo 1})$$

Por tanto, el sistema ortonormalizado será:

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\text{sen}x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\text{sen}2x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\text{senn}x}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$$

02. Desarrollos en serie de Fourier:

Teorema 03. Si para un sistema $S = \{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x), \dots\}$ ortonormal en $[a, b]$,

la serie $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$ converge uniformemente en $[a, b]$ hacia la función $f(x)$, se

cumple que la función $f(x)$ es integrable Riemann en $[a, b]$ y los coeficientes $c_k, k = 1, \dots, n$, se obtienen como

$$c_k = (f(x), \varphi_k(x)) = \int_a^b f(x) \cdot \varphi_k(x) \cdot dx, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Demostración:

Si la serie $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$ converge uniformemente en $[a, b]$ a $f(x)$, entonces $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y, por tanto, integrable Riemann.

Del producto interior de $f(x)$ por cada una de las funciones $\varphi_k(x)$ del sistema ortonormal, resulta:

$$\begin{aligned} (f(x), \varphi_k(x)) &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i \varphi_i(x), \varphi_k(x) \right) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i (\varphi_i(x), \varphi_k(x)) = 0 + \dots + c_k (\varphi_k(x), \varphi_k(x)) + 0 + \dots = \\ &= c_k \cdot 1 = c_k \end{aligned}$$

$$\text{Por tanto } c_k = (f, \varphi_k(x)) = \int_a^b f(x) \cdot \varphi_k(x) \cdot dx, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Podemos establecer, en definitiva, la siguiente definición:

Se denomina *serie de Fourier* de la función $f(x)$, integrable Riemann en $[a, b]$ con respecto al sistema ortonormal $S = \{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}$ a la expresión

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j \varphi_j(x)$$

donde los coeficientes del desarrollo c_j , $j = 1, 2, \dots$ vienen dados por las expresiones

$$c_j = (f(x), \varphi_j(x)) = \int_a^b f(x) \varphi_j(x) dx, \quad j = 0, 1, \dots$$

Lo indicaremos en la forma

$$f(x) \approx \sum_{j=1}^{\infty} c_j \varphi_j(x) = \sum_{j=1}^{\infty} (f(x), \varphi_j(x)) \varphi_j(x)$$

Tal desarrollo se acostumbra a llamar *serie de Fourier generalizada* de la función $f(x)$ respecto al sistema ortonormal y los coeficientes del desarrollo se denominan *coeficientes de Fourier*.

Nos podemos preguntar si la serie de Fourier de una función es o no la que mejor se aproxima a la función. Veremos en el siguiente teorema que la aproximación media cuadrática del desarrollo en serie de Fourier es la mejor posible.

Teorema 04:

Consideremos el sistema ortogonal $S = \{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x), \dots\}$ y sean los

desarrollos iniciales $\alpha(n) = \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x)$ y $\beta(n) = \sum_{k=0}^n d_k \varphi_k(x)$ donde los c_k son

coeficientes de Fourier y d_k son coeficientes cualesquiera. Se cumple entonces que:

$$\int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x) \right|^2 dx \leq \int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=0}^n d_k \varphi_k(x) \right|^2 dx$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{k=0}^n d_k \varphi_k(x) \right|^2 &= |f(x) - \beta_n(x)|^2 = (f(x) - \beta_n(x), f(x) - \beta_n(x)) = (f(x), f(x)) - \\ &- (\beta_n(x), f(x)) - (f(x), \beta_n(x)) + (\beta_n(x), \beta_n(x)) = |f(x)|^2 - \sum_{k=0}^n d_k (\varphi_k(x), f(x)) - \\ &- \sum_{k=0}^n \bar{d}_k (f(x), \varphi_k(x)) + |\beta_n(x)|^2 = |f(x)|^2 - \sum_{k=0}^n d_k \bar{c}_k - \sum_{k=0}^n \bar{d}_k c_k - \sum_{k=0}^n |d_k|^2 = |f(x)|^2 - \sum_{k=0}^n |c_k|^2 + \\ &+ \sum_{k=0}^n |d_k - c_k|^2 \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x) \right|^2 &= |f(x) - \alpha_n(x)|^2 = (f(x) - \alpha_n(x), f(x) - \alpha_n(x)) = (f(x), f(x)) - \\ &- (\alpha_n(x), f(x)) - (f(x), \alpha_n(x)) + (\alpha_n(x), \alpha_n(x)) = |f(x)|^2 - \sum_{k=0}^n c_k (\varphi_k(x), f(x)) - \\ &- \sum_{k=0}^n \bar{c}_k (f(x), \varphi_k(x)) + |\alpha_n(x)|^2 = |f(x)|^2 - \sum_{k=0}^n c_k \bar{c}_k - \sum_{k=0}^n \bar{c}_k c_k - \sum_{k=0}^n |c_k|^2 = |f(x)|^2 - \sum_{k=0}^n |c_k|^2 - \sum_{k=0}^n |c_k|^2 + \\ &+ \sum_{k=0}^n |c_k|^2 = |f(x)|^2 - \sum_{k=0}^n |c_k|^2 \end{aligned}$$

por tanto:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n d_k \varphi_k(x) \right|^2 = |f(x)|^2 - \sum_{k=0}^n |c_k|^2 + \sum_{k=0}^n |d_k - c_k|^2$$

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x) \right|^2 = |f(x)|^2 - \sum_{k=0}^n |c_k|^2$$

de lo cual:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n d_k \varphi_k(x) \right|^2 = \left| f(x) - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x) \right|^2 + \sum_{k=0}^n |d_k - c_k|^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \left| f(x) - \sum_{k=0}^n d_k \varphi_k(x) \right|^2 \leq \left| f(x) - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x) \right|^2$$

en definitiva:

$$\int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=0}^n d_k \varphi_k(x) \right|^2 dx \leq \int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x) \right|^2 dx$$

03. Desarrollos trigonométricos en serie de Fourier:

03.1. Desarrollo de una función cualquiera en serie de Fourier de senos y cosenos:

Determinemos, en el intervalo $[-\pi, \pi]$, y con respecto al sistema de funciones entre sí ortonormales

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \varphi_{2n-1}(x) = \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \varphi_{2n}(x) = \frac{\text{sen} nx}{\sqrt{\pi}}$$

la serie de Fourier correspondiente a la función $f(x)$, esto es, la suma $\sum_{j=1}^{\infty} c_j \varphi_j(x)$:

Hemos visto antes, en el ejemplo 3, que este conjunto de funciones es ortonormal, en el intervalo $[-\pi, \pi]$ siendo:

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\text{sen} x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\text{sen} 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 3x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\text{sen} 3x}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$$

Determinemos los coeficientes de Fourier:

$$c_0 = (f, \varphi_0(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \varphi_0(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$c_1 = (f, \varphi_1(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \varphi_1(x) \cdot dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}} \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x dx$$

$$c_2 = (f, \varphi_2(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \varphi_2(x) \cdot dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \frac{\text{sen} x}{\sqrt{\pi}} \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{sen} x dx$$

$$c_3 = (f, \varphi_3(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \varphi_3(x) \cdot dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}} \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos 2x dx$$

$$c_4 = (f, \varphi_4(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \varphi_4(x) \cdot dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \frac{\text{sen} 2x}{\sqrt{\pi}} \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{sen} 2x dx$$

... ..

$$c_{2n-1} = (f, \varphi_{2n-1}(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \varphi_{2n-1}(x) \cdot dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$c_{2n} = (f, \varphi_{2n}(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \varphi_{2n}(x) \cdot dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \frac{\text{sen} nx}{\sqrt{\pi}} \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{sen} nx dx$$

... ..

y los términos del desarrollo serán:

$$c_0 \varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right] = \frac{a_0}{2}$$

$$c_1 \varphi_1(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x dx \right) \cdot \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}} = \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x dx \right] \cos x = a_1 \cos x$$

$$c_2 \varphi_2(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{sen} x dx \right) \cdot \frac{\text{sen} x}{\sqrt{\pi}} = \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{sen} x dx \right] \text{sen} x = b_1 \text{sen} x$$

$$c_3 \varphi_3(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos 2x dx \right) \cdot \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}} = \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos 2x dx \right] \cos 2x = a_2 \cos 2x$$

$$c_4 \varphi_4(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{sen} 2x dx \right) \cdot \frac{\text{sen} 2x}{\sqrt{\pi}} = \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{sen} 2x dx \right] \text{sen} x = b_2 \text{sen} 2x$$

... ..

$$c_{2n-1} \varphi_{2n-1}(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \right) \cdot \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} = \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \right] \cos nx = a_n \cos nx$$

$$c_{2n} \varphi_{2n}(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{sen} nx dx \right) \cdot \frac{\text{sen} nx}{\sqrt{\pi}} = \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{sen} nx dx \right] \text{sen} nx = b_n \text{sen} nx$$

... ..

En definitiva, la suma es:

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \operatorname{sen} 2x) + (a_3 \cos 3x + b_3 \operatorname{sen} 3x) + \dots$$

$$\dots + (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) + \dots$$

O sea:

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos jx + b_j \operatorname{sen} jx)$$

Siendo los coeficientes:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos jx dx, \quad b_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} jx dx, \quad j = 1, 2, \dots$$

03.2. Desarrollo de una función periódica en serie de Fourier de senos y cosenos:

Supongamos que tenemos una función $f(x)$ que es periódica de periodo P . Veamos que mediante un simple cambio de escala puede convertirse en una función de periodo 2π , y, por consiguiente, desarrollable en una serie de Fourier de senos y cosenos en el intervalo de ortonormalidad del sistema.

Teorema 05. Si $f(x)$ es una función de periodo P entonces la función $g(t) = f\left(\frac{P}{2\pi}t\right)$

obtenida al hacer el cambio de variable $x = Pt/2\pi$, es una función periódica de periodo 2π . O sea:

$$f(x) = f(x+P) \rightarrow g(t) = g(t+2\pi)$$

Demostración:

$$\text{Se tiene que } g(t) = f\left(\frac{P}{2\pi}t\right) = f\left(\frac{P}{2\pi}t + P\right) = f\left(\frac{P}{2\pi}(t+2\pi)\right) = g(t+2\pi)$$

Desarrollo en serie de Fourier:

El desarrollo de $g(t)$ es, como sabemos: $g(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos jt + b_j \operatorname{sen} jt)$ con los coeficientes

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt, \quad a_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos jtdt, \quad b_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \operatorname{sen} jtdt, \quad j = 1, 2, \dots$$

Si deshacemos el cambio de variable, haciendo ahora $t = 2\pi x / P$:

$$f(x) = g\left(\frac{2\pi}{P}x\right) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos jt + b_j \operatorname{sen} jt) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(a_j \cos\left(\frac{2\pi j}{P}x\right) + b_j \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi j}{P}x\right) \right)$$

O sea:

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(a_j \cos\left(\frac{2\pi j}{P}x\right) + b_j \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi j}{P}x\right) \right)$$

Siendo los coeficientes, para $j=1, 2, \dots$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-P/2}^{P/2} g\left(\frac{2\pi x}{P}\right) \frac{2\pi}{P} dx = \frac{2}{P} \int_{-P/2}^{P/2} f(x) dx,$$

$$a_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos jtdt = \frac{1}{\pi} \int_{-P/2}^{P/2} g\left(\frac{2\pi x}{P}\right) \cos\left(\frac{2\pi jx}{P}\right) \frac{2\pi}{P} dx = \frac{2}{P} \int_{-P/2}^{P/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi j}{P} x\right) dx$$

$$b_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \operatorname{sen} jtdt = \frac{1}{\pi} \int_{-P/2}^{P/2} g\left(\frac{2\pi x}{P}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi jx}{P}\right) \frac{2\pi}{P} dx = \frac{2}{P} \int_{-P/2}^{P/2} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi j}{P} x\right) dx$$

03.3. Desarrollos en serie de Fourier de cosenos:

Hemos visto antes, en el ejemplo 1, que el siguiente conjunto de funciones es ortonormal en el intervalo $[-\pi, \pi]$:

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$$

Determinemos los coeficientes de Fourier:

$$c_0 = (f, \varphi_0(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \varphi_0(x) \cdot dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$c_1 = (f, \varphi_1(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \varphi_1(x) \cdot dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}} \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x dx$$

$$c_2 = (f, \varphi_2(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \varphi_2(x) \cdot dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}} \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos 2x dx$$

$$c_3 = (f, \varphi_3(x)) = \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \varphi_3(x) \cdot dx = \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \frac{\cos 3x}{\sqrt{\pi}} \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \cos 3x dx$$

... ..

$$c_n = (f, \varphi_n(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \varphi_n(x) \cdot dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

... ..

y los términos del desarrollo serán:

$$c_0 \varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right] = \frac{a_0}{2}$$

$$c_1 \varphi_1(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x dx \right) \cdot \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}} = \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x dx \right] \cos x = a_1 \cos x$$

$$c_2 \varphi_2(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos 2x dx \right) \cdot \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}} = \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos 2x dx \right] \cos 2x = a_2 \cos 2x$$

... ..

$$c_n \varphi_n(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \right) \cdot \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} = \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \right] \cos nx = a_n \cos nx$$

... ..

$$c_2 \varphi_2(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} 2x dx \right) \cdot \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{\pi}} = \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} 2x dx \right] \operatorname{sen} 2x = b_2 \operatorname{sen} 2x$$

... ..

$$c_n \varphi_n(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx dx \right) \cdot \frac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{\pi}} = \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx dx \right] \operatorname{sen} nx = b_n \operatorname{sen} nx$$

... ..

En definitiva, la suma es:

$$f(x) \approx b_1 \operatorname{sen} x + b_2 \operatorname{sen} 2x + b_3 \operatorname{sen} 3x + \dots + b_n \operatorname{sen} nx + \dots$$

O sea:

$$f(x) \approx \sum_{j=1}^{\infty} b_j \operatorname{sen} jx$$

Siendo los coeficientes:

$$b_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} jx dx, \quad j = 1, 2, \dots$$

Si se trata de una función periódica de periodo P , se tiene:

$$f(x) \approx \sum_{j=1}^{\infty} b_j \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi j}{P} x \right)$$

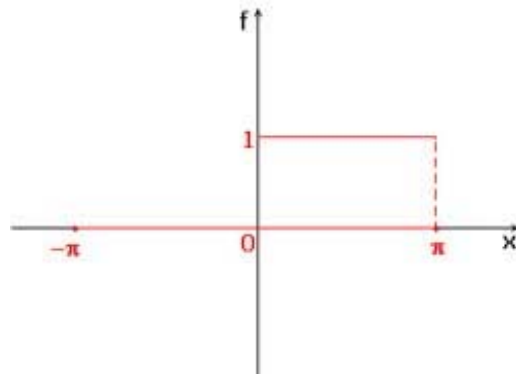
Siendo los coeficientes:

$$b_j = \frac{2}{P} \int_{-P/2}^{P/2} f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi j}{P} x \right) dx, \quad j = 1, 2, \dots$$

04. Ejemplos de desarrollos en serie de Fourier:

04.1. Desarrollo en serie de Fourier de la función definida a trozos siguiente

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$



Calculemos $f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos jx + b_j \operatorname{sen} jx)$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx = \frac{x}{\pi} \Big|_0^{\pi} = 1$$

$$a_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos jx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos jx dx = \frac{1}{\pi j} \operatorname{sen} jx \Big|_0^{\pi} = \frac{\operatorname{sen} j\pi - \operatorname{sen} j0}{\pi j} = \frac{0 - 0}{\pi j} = 0$$

$$b_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} jx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} jx dx = -\frac{1}{\pi j} \cos jx \Big|_0^{\pi} = \frac{(-1) \cos(j\pi) - (-1) \cos(0)}{\pi j} =$$

$$= \frac{(-1)^{j+1} + 1}{\pi j}$$

En definitiva:

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos jx + b_j \operatorname{sen} jx) = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (0 \cdot \cos jx + b_j \operatorname{sen} jx) = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1 + (-1)^{j+1}}{\pi j} \operatorname{sen} jx \right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1 + (-1)^2}{\pi} \operatorname{sen} x + \frac{1 + (-1)^3}{2\pi} \operatorname{sen} 2x + \frac{1 + (-1)^4}{3\pi} \operatorname{sen} 3x + \frac{1 + (-1)^5}{4\pi} \operatorname{sen} 4x + \frac{1 + (-1)^6}{5\pi} \operatorname{sen} 5x + \dots =$$

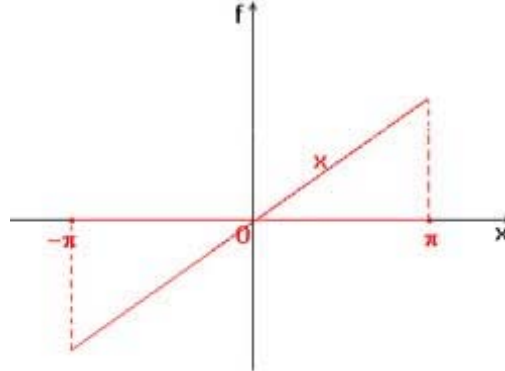
$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} x + \frac{0}{2\pi} \operatorname{sen} 2x + \frac{2}{3\pi} \operatorname{sen} 3x + \frac{0}{4\pi} \operatorname{sen} 4x + \frac{2}{5\pi} \operatorname{sen} 5x + \dots = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} x + \frac{2}{3\pi} \operatorname{sen} 3x + \frac{2}{5\pi} \operatorname{sen} 5x + \dots$$

Desarrollo en serie de Fourier:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} x + \frac{2}{3\pi} \operatorname{sen} 3x + \frac{2}{5\pi} \operatorname{sen} 5x + \dots$$

04.2 Desarrollo en serie de Fourier de la función siguiente

$$f(x) = x \text{ en } [-\pi, \pi]$$



Calculemos $f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos jx + b_j \operatorname{sen} jx)$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{x^2}{2\pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2 - (-\pi)^2}{2\pi} = 0$$

$$a_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos jx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos jx dx = \frac{1}{\pi j} x \operatorname{sen} jx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi j} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} jx dx = \frac{1}{\pi j} x \operatorname{sen} jx \Big|_{-\pi}^{\pi} +$$

$$+ \frac{1}{\pi j^2} \cos jx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi \operatorname{sen} j\pi - (-\pi) \operatorname{sen} j(-\pi)}{\pi j} + \frac{\cos j\pi - \cos j(-\pi)}{\pi j^2} = \frac{0+0}{\pi j} + \frac{(-1)^j - (-1)^j}{\pi j^2} = 0$$

$$b_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} jx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} jx dx = -\frac{x \cos jx}{\pi j} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi j} \int_{-\pi}^{\pi} \cos jx dx =$$

$$= \frac{\pi(-1)^{j+1} - (-\pi)(-1)^{j+1}}{\pi j} + \frac{\operatorname{sen} j\pi - \operatorname{sen} j(-\pi)}{\pi j^2} = \frac{2\pi}{\pi j} (-1)^{j+1} + 0 = 2 \frac{(-1)^{j+1}}{j}$$

En definitiva:

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos jx + b_j \operatorname{sen} jx) = 0 + \sum_{j=1}^{\infty} \left(0 \cdot \cos jx + 2 \frac{(-1)^{j+1}}{j} \operatorname{sen} jx \right) =$$

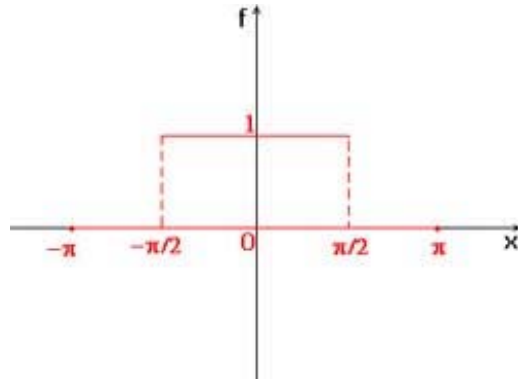
$$= 2 \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{j+1}}{j} \operatorname{sen} jx \right) = 2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x + \frac{2}{3} \operatorname{sen} 3x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 4x + \frac{2}{5} \operatorname{sen} 5x - \dots$$

Desarrollo en serie de Fourier:

$$f(x) \approx 2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x + \frac{2}{3} \operatorname{sen} 3x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 4x + \frac{2}{5} \operatorname{sen} 5x - \dots$$

04.3. Desarrollo en serie de Fourier de la función definida a trozos siguiente

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < -\pi/2 \\ 1, & -\pi/2 \leq x \leq \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < x \leq \pi \end{cases}$$



$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx = \frac{x}{\pi} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi/2 - (-\pi/2)}{\pi} = \frac{\pi}{\pi} = 1$$

$$a_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos jx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos jx dx = \frac{1}{\pi j} \operatorname{sen} jx \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{\pi j} [\operatorname{sen}(j\pi/2) - \operatorname{sen}(-j\pi/2)] =$$

$$= \frac{2}{\pi j} \operatorname{sen}(j\pi/2)$$

$$b_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} jx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen} jx dx = -\frac{1}{\pi j} \cos jx \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = -\frac{1}{\pi j} [\cos(j\pi/2) - \cos(-j\pi/2)] = 0$$

En definitiva:

$$\begin{aligned}
 f(x) &\approx \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos jx + b_j \operatorname{sen} jx) = 1/2 + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{2}{j\pi} \operatorname{sen}(j\pi/2) \cos jx + 0 \right) = \\
 &= 1/2 + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{2}{j\pi} \operatorname{sen}(j\pi/2) \cos jx \right) = 1/2 + \frac{2}{\pi} \cos x - \frac{2}{3\pi} \cos 3x + \frac{2}{5\pi} \cos 5x - \frac{2}{7\pi} \cos 7x + \dots
 \end{aligned}$$

Desarrollo en serie de Fourier:

$$f(x) \approx \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos x - \frac{2}{3\pi} \cos 3x + \frac{2}{5\pi} \cos 5x - \frac{2}{7\pi} \cos 7x + \dots$$

5. Bibliografía:

- APÓSTOL, T. M.; Cálculo, Editorial Reverté, Barcelona, 1985
 APÓSTOL, T.M.; Análisis Matemático, Editorial Reverté, Barcelona, 1976
 SPIVAK, M.; Cálculus, Editorial Reverté, Barcelona, 1996
 MARAVALL, D.; CASTRO, A.; Métodos Matemáticos de la Ingeniería, Edit. Dossat, Madrid, 1961
 SEELEY, R. T.; Introducción a las series de Fourier, Editorial Reverté, Barcelona, 2004.