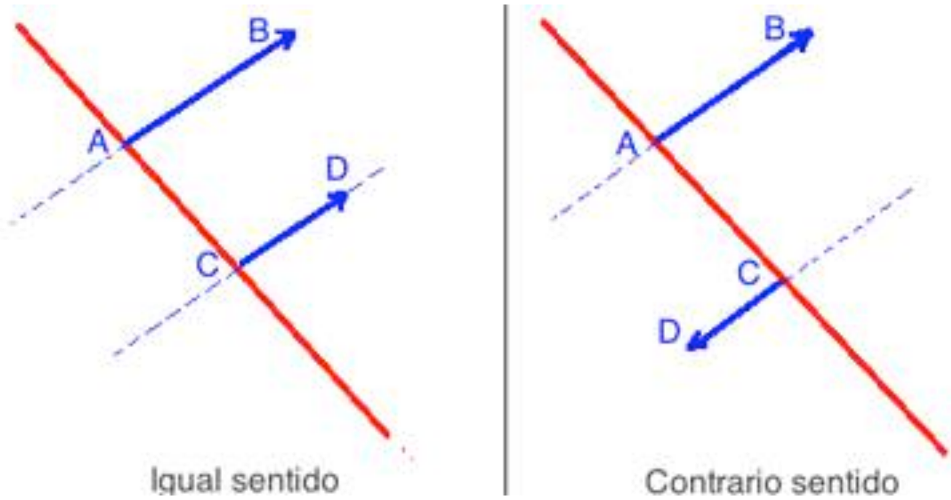
Sobre semejanzas en el plano

El estudio de las homotecias y las semejanzas en el plano se asienta en forma natural en la teoría de los segmentos generales o absolutos del plano, en la idea de movimiento (simetrías, giros, traslaciones), así como en las nociones de razón de segmentos y de proporcionalidad entre razones de segmentos.

Para quienes necesiten repasar estas ideas y relaciones es recomendable consultar en esta misma web el artículo "La proporcionalidad de segmentos en el plano. Una mirada a la Geometría clásica" (http://casanchi.com/mat/psegmentos01.pdf), que puede servir de base para fundamentar la idea de homotecia y semejanza.

01 Vectores paralelos del plano. Sentido y razón orientada:

Sentido:
Si entendemos la idea de vector como un segmento orientado con origen y extremo en puntos dados del plano, podemos definir el sentido de dos vectores paralelos por la condición de que sus puntos extremos queden o no situados en el mismo semiplano de los dos semiplanos que define la recta que pasa por sus puntos orígenes.
Si sus puntos extremos quedan situados en el mismo semiplano, se dice que ambos vectores tienen igual sentido. Caso contrario, ambos vectores paralelos tienen contrario sentido:



Razón orientada:
Si consideramos el cuerpo conmutativo y ordenado de las razones de segmentos orientados del plano (ver "La proporcionalidad de segmentos en el plano. Una mirada a la Geometría Clásica.", articulo publicado en esta misma web, en la dirección http://casanchi.com/mat/psegmentos01.htm) podemos definir la razón orientada de dos vectores paralelos como la razón orientada de los respectivos segmentos que definen, afectando de signo opuesto para diferenciar que tengan

igual o contrario sentido. Así, si son $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$ vectores paralelos y es $\frac{[\vec{AB}]}{[\vec{CD}]}$ la razón orientada de los correspondientes segmentos:

$$\frac{\vec{AB}}{\vec{CD}} = \begin{cases} \dfrac{[\vec{AB}]}{[\vec{CD}]}, & si\ son\ de\ igual\ sentido \\ -\dfrac{[\vec{AB}]}{[\vec{CD}]}, & si\ no\ son\ de\ igual\ sentido \end{cases}$$

02 Homotecias

Definición 01:
Se define como homotecia de centro el punto O y razón $k \in K$, a la aplicación

$$H_{(O,k)} : E_2 \to E_2$$

del plano en sí mismo, $\forall X \in E_2, H_{(O,k)}(X) = X' \in E_2$, definida por la condición de que X' pertenezca a la recta OX ($X' \in OX$) y que

$$\frac{[\vec{OX'}]}{[\vec{OX}]} = k$$

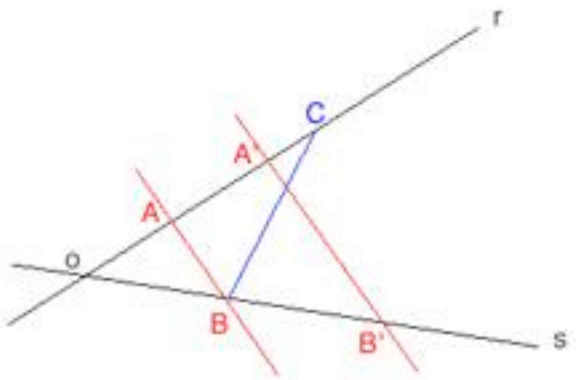
De la definición es obvio que la homotecia de razón $k = -1_k$ es un giro de amplitud igual a 180º.

Teorema 01:
1) Si $k \neq 0$ entonces $H_{(O,k)}$ es una biyección del plano en sí mismo.
2) Las homotecias transforman las rectas en rectas paralelas, conservando las relaciones de incidencia y orden de puntos.
3) Si A'B' es el segmento homólogo de AB por $H_{(O,k)}$ entonces $k = \vec{A'B'} / \vec{AB}$.
4) Los ángulos homólogos son iguales y del mismo sentido.
5) Las homotecias con el mismo centro forman un grupo conmutativo isomorfo al grupo multiplicativo $(K,.)$.

Demostración:
1) Se trata de comprobar que es sobreyectiva e inyectiva.
Para ver que $H_{(O,k)}$ es sobreyectiva, veamos que todo punto A' del plano es imagen de otro punto A del plano, esto es, $\forall A' \in E, \exists A \in E / H_{(O,k)}(A) = A'$.
Bastará encontrar la imagen B' de un punto B cualquiera, con lo que

$$\left[\vec{OB'}\right] \Big/ \left[\vec{OB}\right] = k,$$

Si llamamos *r* la recta que pasa por O y A', y *s* a la recta que pasa por O, B y B', se tiene que bastará trazar una paralela por B al segmento A'B' para determinar sobre r un punto A que verifica obviamente que $H_{(O,k)}(A) = A'$. Luego todo punto A' es imagen de algún punto A.



Para ver que $H_{(O,k)}$ es inyectiva, hemos de comprobar que

$$H_{(O,k)}(A) = H_{(O,k)}(C) \rightarrow A' = C$$

lo cual es inmediato de la figura, ya que si unimos C con B, los segmentos CB y A'B' han de ser paralelos, lo cual será imposible si A y B son distintos, pues por un punto solo pasa una paralela a una recta. Luego, A=C.
2) Consideremos $\left[\vec{OA'}\right] \Big/ \left[\vec{OA}\right] = \left[\vec{OB'}\right] \Big/ \left[\vec{OB}\right] = k$. Si D es un punto cualquiera de la recta AB situado entre A y B, como la recta OD está dentro del ángulo $A\hat{O}B$, su homólogo D' estará entre A' y B', por lo que se conserva el orden de los puntos.
3) Si $k > 0$, B y B' están en la misma semirrecta determinada por O sobre la recta OB. Por tanto, B y B' están en el mismo semiplano determinado por A y A', por lo que $\vec{A'B'} / \vec{AB} = \left[\vec{A'B'}\right] \Big/ \left[\vec{AB}\right] = k$, y la paralela BD a AA' determina el punto D. Por el teorema de Thales es inmediato que:

$$\left[\vec{A'B'}\right] \Big/ \left[\vec{A'D}\right] = \left[\vec{A'B'}\right] \Big/ \left[\vec{AB}\right] = \left[\vec{OB'}\right] \Big/ \left[\vec{OB}\right] = k$$

4) Los lados homólogos de ambos ángulos son paralelos, por 2).
5) Veamos que el producto de dos homotecias del mismo centro es una homotecia del mismo centro y razón el producto de ambas razones:

$$H_{(O,k')} \bullet H_{(O,k)}(A) = H_{(O,k')}\left(H_{(O,k)}(A)\right) = H_{(O,k')}(A') = A''$$

siendo $A', A'' \in OA$ (ambos puntos pertenecen a la recta OA).
Supongamos que ambas homotecias son de razón positiva, $k' > 0, k > 0$. Se tiene:

$$\frac{\vec{OA''}}{\vec{OA}} = \frac{\vec{OA''}}{\vec{OA'}} \cdot \frac{\vec{OA'}}{\vec{OA}} = k.k' \rightarrow H_{(O,k')} \bullet H_{(O,k)} = H_{(O,k.k')}$$

Obviamente, es $H^{-1}_{(O,k)} = H_{(O,k^{-1})}$, ya que

$$H_{(O,k)} \bullet H^{-1}_{(O,k)} = H_{(O,k)} \bullet H_{(O,k^{-1})} = H_{(O,k.k^{-1})} = H_{(O,1)}$$

y análogamente se comprueban las restantes propiedades que convierten al conjunto de las homotecias de un mismo centro en un grupo conmutativo multiplicativo isomorfo a $(k,.)$.

Sabemos que dos ángulos son iguales si mediante un movimiento pueden hacerse coincidir. Cuando el movimiento necesario para esta coincidencia es un número par de simetrías axiales, diremos que *se conserva el sentido* de los ángulos.

En general, toda homotecia de razón negativa, -k, se descompone siempre en un giro de 180º (homotecia de razón -1) y una homotecia de razón positiva k.

Teorema 02:
El producto $H_{(O,k)}.H_{(O',k')}$ con $O \neq O'$ es
a) Si $k.k' \neq 1$, una homotecia de razón $k.k'$ y centro $C \in OO'$.
b) Si $k.k' = 1$, una traslación.
Demostración:

a) Si $k.k' \neq 1$:
Sean, $\forall A, B \in E_2$:

$$H_{(O',k')}(A) = A'', H_{(O',k')}(B) = B''$$

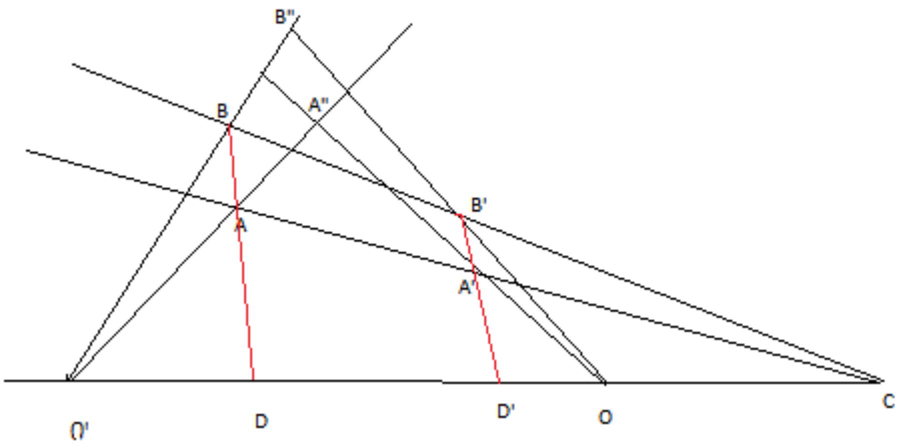
$$H_{(O,k)}(A'') = A', H_{(O,k)}(B'') = B'$$

Si es $H_{(c,kk')} = H_{(O,k)} \bullet H_{(O',k')}$ se tendrá:

$$H_{(c,kk')}(A) = \left(H_{(O,k)} \bullet H_{(O',k')}\right)(A) = H_{(O,k)}\left(H_{(O',k')}(A)\right) = H_{(O,k)}(A'') = A'$$

$$H_{(c,kk')}(B) = \left(H_{(O,k)} \bullet H_{(O',k')}\right)(B) = H_{(O,k)}\left(H_{(O',k')}(B)\right) = H_{(O,k)}(B'') = B'$$

Cumpliéndose que son paralelos los segmentos AB y $A'B'$, los cuales, al prolongarlos interceptan la recta OO' en los puntos respectivos D y D', tal como se muestra en la figura



Se tiene, en definitiva, que son paralelos los pares de segmentos AB y $A'B'$, BD y $B'D'$, AD y $A'D'$, por lo que, aplicando el axioma de Desargues a las rectas BB', AA' y OO', se deduce que la recta OO' contiene al punto C.

En definitiva, las rectas BB′, AA′ y OO′ se encuentran en el punto C, que es el origen de la homotecia producto de ambas.

b) Si $k.k'=1$:

En este caso $H_{(O',k')}(A)=A, H_{(O',k')}(B)=B$ y son iguales los segmentos AB y A′B′, por lo que las rectas correspondientes no se cortan, ni cortan a la recta OO′ que contiene los centros de ambas homotecias. Se trata de una traslación definida por el vector AA′.

03 Semejanzas

Definición 02:

Se define una semejanza en el plano de razón $|k|>0$ como el producto de un movimiento por una homotecia de razón k.

Teorema 03:

1_Las semejanzas son aplicaciones biunívocas del plano en sí mismo.

2_Las semejanzas transforman rectas en rectas conservando las relaciones de orden entre sus puntos.

3_Transforman ángulos en ángulos iguales, conservando o invirtiendo su sentido según sea directo o inverso el movimiento que interviene como factor de su expresión.

4_Si $\vec{AB}$ se transforma en $\vec{A'B'}$ entonces $\left[\vec{A'B'}\right]\Big/\left[\vec{AB}\right]=|k|$.

5_Existe una y solo una semejanza que transforma el par de puntos A, B, en el par A′, B′, y uno de los dos semiplanos determinados por AB en otro determinado por A′B′.

6_Toda semejanza S puede expresarse por $S=M.H=M'.H'$, donde M, M′ son movimientos y H, H′ son homotecias.

7_Las semejanzas del plano forman un grupo no conmutativo.

Demostración:

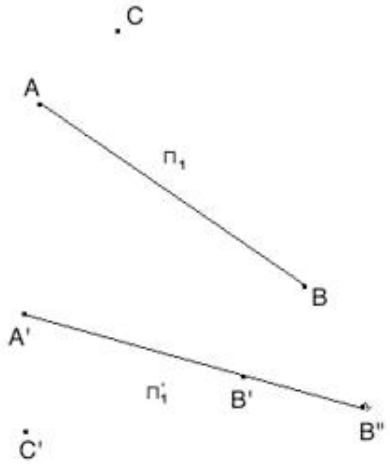
1_Pues tanto los movimientos como las homotecias son biyecciones del plano en sí mismo.

2_También esta propiedad es obvia, ya que tanto los movimientos como las homotecias transforman rectas en rectas conservando el orden entre los puntos.

3_Sabemos que un movimiento transforma ángulos en ángulos iguales, que tendrán el mismo o distinto sentido según que el movimiento conste de un número par o impar, respectivamente, de simetrías axiales. Las homotecias transforman ángulos en ángulos iguales y del mismo sentido, por el teorema 01, 4).

4_Los movimientos transforman, por definición, un segmento $[AB]$ en otro segmento igual $[A'B']$, mientras que una homotecia de razón k transforma el segmento $[A'B']$ en otro segmento $[A''B'']$ tal que $[A''B'']/[A'B']=|k|$, por lo que, en definitiva, es $[A''B'']/[AB]=|k|$.

5_Sean los cuatro puntos A, B, C, D. Construyamos una aplicación S del plano en si mismo que sea semejanza y tal que $S(A) = A', S(B) = B', S(\pi_1) = \pi_1^{'}$, donde son $\pi_1, \pi_1^{'}$ semiplanos que definen respectivamente los segmentos AB y A′B′. Un punto C genérico se transforma en otro punto C′, obtenido mediante un movimiento M (que transforma la recta AB en la recta A′B″ y el plano π_1 en $\pi_1^{'}$) por una homotecia H (de razón $[A'B']/[AB]$).

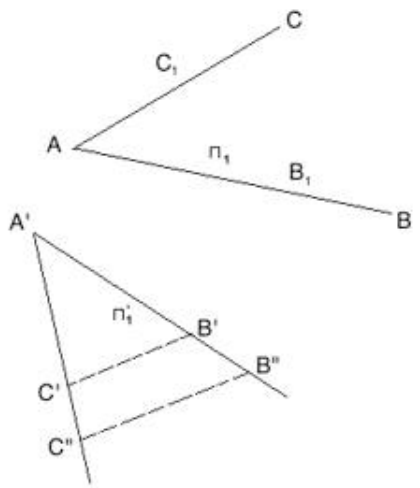


Por tanto, $S = M \bullet H$ es una semejanza, que es la única que tiene la propiedad indicada, pues cualquier otra S′ verifica necesariamente que $S'(C) = C'$, lo que implica que es S′.

6_Consideremos una semejanza S que queda definida por dos puntos A y B, sus respectivos puntos homólogos A′ y B′, así como los semiplanos homólogos $\pi_1, \pi_1^{'}$. Para hallar el punto C′ homólogo de un punto C genérico podemos actuar de dos maneras:

a) Realizamos un movimiento M que transforma la semirrecta AB en la semirrecta AB″, π_1 en $\pi_1^{'}$ y el punto C en C″. Luego aplicamos una homotecia H de centro A′ y razón $k = [A'B']/[AB]$, con lo que será H(C″)=C′, y por el apartado anterior, $S = M \bullet H$.
b) Practicamos primero una homotecia H′ de centro A y razón k, con lo que será $H'(C) = C_1$ y $H'(B) = B_1$. Ahora será $[AC_1] = [A'C']$, $[AB_1] = [A'B']$, $B_1\hat{A}C_1 = C'\hat{A'}B'$.

   Por tanto, existe un movimiento M′ que transforma dichos ángulos y tal que es $M'(A) = A', M'(C_1) = C', M'(B_1) = B'$. Por tanto, también es $S = M' \bullet H'$



7_Sean las semejanzas $S_1 = M_1 \bullet H_1$ y $S_2 = M_2 \bullet H_2$. Por 6_ tenemos que es $H_2 \bullet M_1 = M_1' \bullet H_2'$. Por tanto, se tiene que

$$S_2 \bullet S_1 = M_2 \bullet H_2 \bullet M_1 \bullet H_1 = M_2 \bullet M_1' \bullet H_2' \bullet H_1 = M \bullet H$$

(donde H es, por el teorema 02, una homotecia o una traslación)

En definitiva, el producto de dos semejanzas es también una semejanza. Como la inversa de $M \bullet H$ es $H^{-1} \bullet M^{-1}$, otra semejanza, se verifica la asociatividad y la existencia de elemento neutro.

04 Centro de semejanza directa

Todo movimiento directo es igual al producto de dos simetrías axiales, por lo que es una traslación T (ejes paralelos) o giro G (ejes incidentes). Como toda semejanza S es expresable de la forma $S = M.H = M'.H'$, si M es movimiento directo, será $M = T$ o bien $M = G$. En el caso de $M = G$, el centro del giro G se denomina *centro de semejanza directa* de S, y es único por ser único el giro G. Su construcción es trivial.

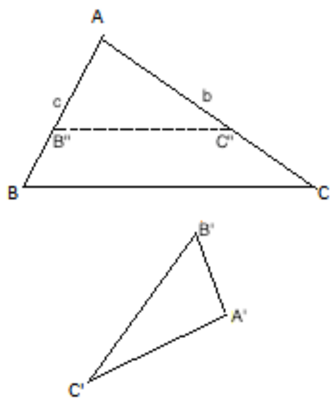
05 Figuras semejantes

Definición 03:

Dos figuras, F1 y F2, se dice que son semejantes si existe una semejanza S tal que S(F1)=F2. La relación de semejanza es trivialmente de equivalencia y parte a la familia de las figuras del plano en clases de equivalencia que se denominan *formas del plano*.

Teorema 04:

Dado el triángulo ABC, de ángulos A, B y C, con lados opuestos respectivos a, b y c, y asimismo el triángulo A’B’C’, de ángulos A’, B’ y C’, con lados opuestos respectivos a’, b’ y c’, se verifica que los siguientes enunciados son equivalentes:



1) Los triángulos ABC y A’B’C’ son semejantes.

2) $\hat{A} = \hat{A}'$ y $c/c' = b/b'$

3) $a/a' = b/b' = c/c'$

4) $\hat{A} = \hat{A}'$ y $\hat{B} = \hat{B}'$

Demostración:

- Veamos que 1) implica 2):

Si son semejantes, por el teorema 03 se cumple 2).

- Veamos también que 2) implica 3):

Como es $\hat{A} = \hat{A}'$, existe un movimiento M que lleva A'B'C' a la posición AB"C". Probemos que $B"C" \| BC$. En efecto, se cumple que $c/c' = b/b' \rightarrow B"C" \| BC$. Finalmente, por el Teorema de Thales, es $a/a' = b/b' = c/c'$.

- Asimismo, 3) implica 4):

Si tomamos en AB el punto B" tal que $[AB"] = c'$ y trazamos B"C" paralela a BC, se tiene: $\frac{c}{c'} = \frac{c}{[AB"]} = \frac{a}{[B"C"]} = \frac{b}{[AC"]} \rightarrow a' = [B"C"],\ b' = [AC"]$

Por los casos de igualdad de triángulos, $A'B'C'$ y $AB"C"$ son iguales, luego $\hat{A} = \hat{A}'$ y $C"\hat{B}"A = \hat{B}' = \hat{B}$.

- Finalmente, 4) implica 1)

Existirá un movimiento que transforma A' en A y $\hat{A}"$ en $\hat{A}$. El punto B' pasará a B" y C' a C". Como $\hat{B}' = C"\hat{B}"A = \hat{B} \rightarrow B"C" \| BC$, por lo cual existe una homotecia que transforma AB"C" en ABC. De lo que se deduce que ABC y A'B'C' son semejantes.

06 Bibliografía

ABELLANAS, Pedro, "Elementos de Matemáticas". Ediciones Romo. Madrid, 1969
Hilbert, David; *The Foundations of Geometry*. The Open Court Publishing Company 1950, p. 4
HILBERT, David, "Les Fondements de la Géometrie". Editorial Dunod. París, 1971
MOISE, Edwin E., "Elementos de Geometría Superior". CECSA Ediciones, 1968
PUIG ADAM, Pedro, "Geometría Métrica". Biblioteca Matemática, Madrid, 1958
SEVERI, Francesco, "Elementos de Geometría". Editorial Labor, 1952