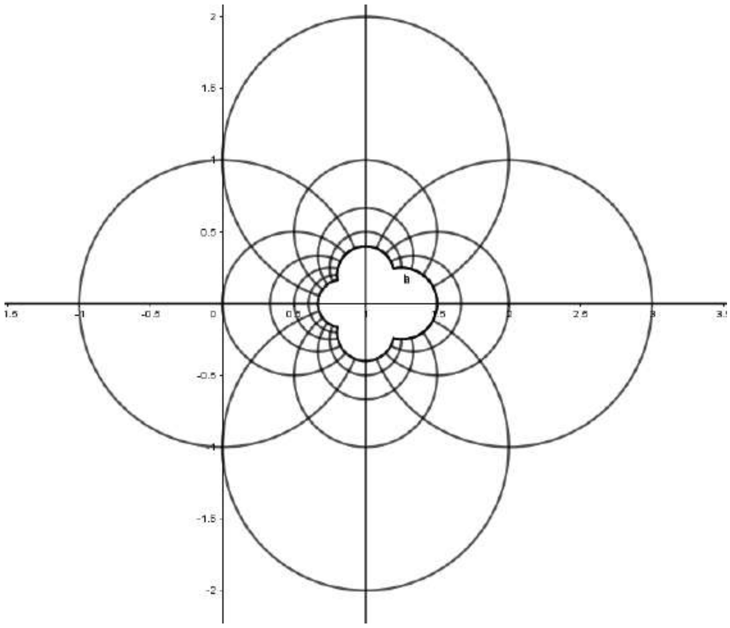
El secreto de las funciones holomorfas

Pablo Esquer Castillo, abril 2018



"Retuercen y estiran y, aun así, conservan los ángulos"

Índice

De ahora en adelante, salvo indicación, f es una función de variable compleja que toma valores en los complejos.

$$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

En tanto que el plano complejo es el isomorfo al plano euclídeo, $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, desde un punto de vista algebraico cada una de esas funciones es también:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

¿Qué es una función holomorfa?

Una función holomorfa es aquella para la cual existe el límite del cociente incremental, fijado z_0 complejo:

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \right), \qquad h = z - z_0 \in \mathbb{C}$$

Es decir, aquella que se puede derivar. Supongamos que h es suficientemente pequeño. Llamemos $f'(z_0)$ al límite del cociente incremental. Entonces:

$$f'(z_0) \cdot h = f(z_0 + h) - f(z_0) + o(h)$$

Ignoremos la formalidad que pide el análisis de sumar una o pequeña de h. Y sustituyamos h por su valor $z - z_0$. Entonces:

$$f(z) - f(z_0) = f'(z_0) \cdot (z - z_0)$$

Es decir, la esencia de la derivada dice que la diferencia entre las imágenes de dos puntos z y z_0 (fijado z_0 y z arbitrariamente cercano) es la diferencia entre esos dos puntos, corregida con un factor que es al que se le llama $f'(z_0)$. ¿Qué interpretación geométrica tiene esto?

La derivada $f'(z_0)$ toma valores complejos. Todo número complejo puede expresarse en la manera:

$$z = r \cdot e^{i \cdot \theta} = |z| \cdot e^{i \cdot \arg(z)}$$

De esto se deduce que la multiplicación por un número complejo codifica un cambio de escala de magnitud $|z|$ conjuntamente con una rotación de magnitud $\arg(z)$, en tanto que se multiplican los módulos y se suman los argumentos.

Los números $f(z), f(z_0), z, z_0$ no dejan de ser puntos en el plano, por tanto la diferencia de una pareja de ellos es un vector en el plano.

Volviendo al desarrollo de la derivada compleja:

$$f(z) - f(z_0) = f'(z_0) \cdot (z - z_0)$$

El vector de extremos $f(z_0)$ y $f(z)$ es el vector de extremos z y z_0 re-escalado en un factor $|f'(z_0)|$ y rotado en un factor $\arg\big(f'(z_0)\big)$. Y esto para cada par (z, z_0).

Es decir que la derivada de una función, cuando existe, dice cómo rota y re-escala el plano complejo esa función. De lo cual se deduce:

<u>Resultado 1</u>: Si f es holomorfa con $f'(z_0) \neq 0$ entonces f conserva ángulos.

En el caso de que en un punto $f'(z_0) = 0$ desaparece esta propiedad porque se tiene $f(z) = f(z_0)$ cuando $z \to z_0$. Por eso lo que tiene sentido es hablar de funciones *localmente constantes*, más que simplemente "constantes", salvo cuando la derivada es nula en todo punto de cierto dominio.

Existe una definición alternativa. Una función holomorfa es aquella que es diferenciable en el sentido real, esto es, como función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, (es decir, las derivadas parciales existen y son continuas) y además verifica las ecuaciones de Cauchy – Riemann <u>en un entorno</u> de z_0. Cuando se es diferenciable en el sentido real y se verifican tales ecuaciones se dice que es $\mathbb{C}$-diferenciable.

En otras palabras, una función holomorfa en un punto es una función $\mathbb{C}$-diferenciable en un entorno del punto. Por tanto la propiedad de holomorfismo es una propiedad *local*, o bien *global* (si es local en cada punto), pero jamás *puntual*. Piénsese en ello: ¿Qué sentido tendría hablar de conservar ángulos en un punto?

Desde un punto de vista *algebraico* las funciones complejas son funciones de dos variables reales. Pero desde el punto de vista *analítico*, la derivada en el sentido real es un concepto mucho más pobre que la derivada en el sentido complejo, y del mismo modo con la diferenciación compleja. Una función $\mathbb{C}$-diferenciable es una función $\mathbb{R}$-diferenciable, que además cumple las ecuaciones de Cauchy – Riemann. Estas son las que convierten la matriz jacobiana de f (Df) como función de dos variables reales, en una matriz cuyas columnas son vectores ortogonales. Por consiguiente, las ecuaciones de Cauchy – Riemann son otra vía para concluir que las funciones holomorfas conservan los ángulos. Siempre y cuando $|f'(z_0)| = |Df(z_0)| \neq 0$.

Series de potencias

Se tiene la manía de hablar de series de potencias en todo curso de variable compleja.

Toda serie de potencias expresa una función y tiene la forma general:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n, \qquad a_n, z_0 \in \mathbb{C}$$

Se dice que está centrada en z_0 y converge siempre en un disco de radio R. Concretamente f converge en el disco abierto $D(z_0, R)$, es decir en $|z - z_0| < R$ y diverge en $|z - z_0| > R$.

$$0 \leq R \leq \infty$$

Tal radio está determinado por el criterio de convergencia de Cauchy, y se llama Radio de Hadamard. Por la naturaleza del criterio de Cauchy, no podemos saber, con estas herramientas, qué ocurre en el borde del disco de convergencia: $|z - z_0| = R$.

Derivar f se hace siguiendo las mismas reglas que en el análisis real sumando a sumando.

$$f'(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (z - z_0)^{n-1}$$

Eso es una serie distinta, pero que por criterio de Cauchy converge en el mismo disco. Por tanto:

Resultado 2: Toda serie de potencias es una función holomorfa.

Esto es una maravilla, todas las series de potencias conservan los ángulos, en concreto, cogen el disco de convergencia, lo re-escalan y lo rotan, siempre respecto de su centro z_0.

¿Qué sucede en los bordes?

El comportamiento en el borde del disco de convergencia de las series de potencias nos lo dan dos resultados. El primero es:

> Resultado 3: Teorema de Picard.
>
> Dada $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ serie de potencias centrada en 0 convergente en $R < 1$. Si se verifica:
>
> $$a_0 > a_1 > \cdots > 0, \qquad a_n \to 0, \qquad n \to +\infty$$
>
> Entonces f converge en $R = 1$, excepto, quizás, en $z = 1$.

¿Qué pasa con $z = 1$? Es un punto escurridizo, pero Abel consiguió afinar más.

El teorema del límite de Abel nos dice que si la serie:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Es convergente, entonces:

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ |z|<1}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n \right] = S$$

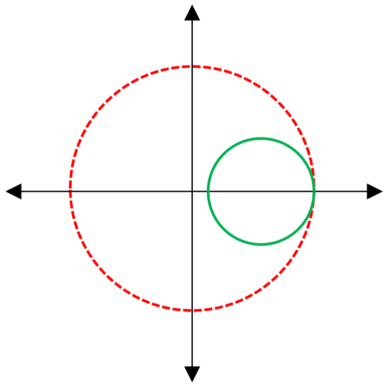
Algo francamente intuitivo. Pero Abel dice que para que eso suceda (o para poder garantizarlo), nos tenemos que aproximar de una manera muy particular: nos tenemos que aproximar de manera que el siguiente cociente permanezca acotado.

$$\frac{|1 - z|}{1 - |z|}$$

¿Por qué esa elección tan caprichosa? Se puede probar que:

$$\frac{|1 - z|}{1 - |z|} < \frac{2}{\cos(\alpha)}$$

Donde α es *el ángulo que forma* $1 - z$ *con el eje real*. Pedir que no se descontrole el cociente es pedir que α no se abra hasta $\pi/2$. Es decir que nos aproximemos a 1 desde dentro del disco $D(0,1)$ donde se tiene convergencia, y apuntando oblicuamente al eje real, nunca perpendicularmente.



La función f converge dentro del círculo rojo. Converge en el círculo rojo siempre y cuando se verifique la hipótesis de Picard, y el límite en 1 existe siempre que nos aproximemos a él dentro del círculo verde, que puede ser arbitrariamente pequeño manteniendo el punto de tangencia con el disco de convergencia.

Integración compleja.

Indicación:

$$\int_\gamma f \cdot dz \coloneqq \int_a^b f\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t) \cdot dt$$

$$\gamma: [a, b] \to \mathbb{C}$$

No se puede hablar de derivación sin hablar de integración.

Resultado 4: Cuando existe primitiva de f, es decir, existe una función compleja $F(z)$ tal que $F'(z) = f(z)$ (llamada primitiva holomorfa), entonces:

$$\int_\gamma f \cdot dz = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big)$$

Entonces existe una primitiva holomorfa si, y sólo si, la integral a lo largo de cualquier camino cerrado se anula.

Alguien sagaz observará lo siguiente. Sea $\gamma(t) = r \cdot e^{it}$ una circunferencia orientada positivamente entorno a 0 de radio $r > 0$, con $t \in 2\pi$.

Sea $f(z) = z^{-1}$.

Entonces:

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_{0}^{2\pi} \frac{r \cdot e^{it}}{r \cdot e^{it}} \cdot i \cdot dt = 2\pi i \neq 0$$

¿Cómo se asimila esto junto con el resultado anterior?

Pues que la función $f(z) = z^{-1}$ no tiene primitiva holomorfa en un entorno de 0. En general, $f(z) = (z - c)^{-1}$ no tiene primitiva holomorfa en un entorno de c. Sin embargo, no se puede zanjar esto tan rápidamente. Encontrando una función analítica en casitodo un conjunto con una integral en un camino cerrado que no se anula, hemos encontrado uno de los filones del análisis complejo.

Buscando la primitiva

El comentario anterior nos invita a preguntarnos: ¿Cuándo existe la primitiva holomorfa? Y, siendo más ambiciosos: ¿Cuál es?

Volvamos por un instante a la variable real. Defínase la siguiente función:

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t) \cdot dt, \qquad a \in \mathbb{R}$$

Por el teorema fundamental del cálculo:

$$F'(x) = f(x)$$

Así que F es la primitiva de f. Yo quisiera generalizar esto a la variable compleja. lo que hago en variable real, en variable compleja es hacerlo sobre un segmento del plano, que casualmente cae sobre el eje real. La generalización natural es esta:

$$F(z) := \int_{[z_0, z]} f(\omega) \cdot d\omega$$

Esto es demasiado perfecto para ser verdad. Necesito varias cosas: una obviamente que f sea holomorfa en la región en cuestión Ω, y también que el segmento $[z_0, z]$ no se me salga de allá donde f es holomorfa. Entonces para z_1 en Ω y z arbitrariamente cercano calculamos el cociente incremental:

$$\frac{F(z)-F(z_1)}{z-z_1}=\frac{1}{z-z_1}\cdot\left(\int_{[z_0,z]}f(\omega)\cdot d\omega-\int_{[z_0,z_1]}f(\omega)\cdot d\omega\right)$$

Supongamos sólo por soñar durante un instante que, al igual que en variable real, se verifica que:

$$\int_{[z_0,z]}f(\omega)\cdot d\omega-\int_{[z_0,z_1]}f(\omega)\cdot d\omega=\int_{[z_1,z]}f(\omega)\cdot d\omega$$

Entonces estaría hecho.

$$\frac{F(z)-F(z_1)}{z-z_1}=\frac{1}{z-z_1}\cdot\int_{[z_1,z]}f(\omega)\cdot d\omega$$

$$[z_1,z]\equiv\gamma(t)=z_1+t\cdot(z-z_1),\qquad t\in(0,1)$$

$$\frac{F(z)-F(z_1)}{z-z_1}=\frac{1}{z-z_1}\cdot\int_0^1 f(z_1+t\cdot(z-z_1))\cdot(z-z_1)\cdot dt$$

$$z\to z_1\Longrightarrow\frac{F(z)-F(z_1)}{z-z_1}=F'(z_1)=f(z_1)$$

Como decimos, esto es demasiado bueno para ser verdad. Requerimos del cumplimiento de un par de condiciones, que son las que habrán de cumplir tanto f como Ω para la existencia de primitiva holomorfa. Están recogidas en el teorema de Cauchy para regiones estrelladas.

Resultado 5: Sea Ω una abierto estrellado y q un centro. Sea f holomorfa. Entonces:

$$F(z)=\int_{[q,z]}f(\omega)\cdot d\omega$$

En particular, la integral a lo largo de todo camino cerrado se anula.

Cauchy es incluso más generoso: permite que f mantenga continuidad pero deje de ser holomorfa en q (teorema de Cauchy extendido para dominios estrellados).

Singularidades: No todas son buenas.

Seguimos escuchando el zumbido de la integral $\int_\gamma z^{-1} \cdot dz$ que no se anula ni para discos alrededor de 0, ni para rectángulos (es equivalente), ni para trayectorias cerradas, en general.

Eso es porque escapa incluso de la relajación de las hipótesis de Cauchy: la función $f(z) = z^{-1}$ no es ni siquiera continua en el cero.

Una versión más elegante del teorema de Cauchy extendido pedirá que f no se descontrole en un entorno de 0. Esto es:

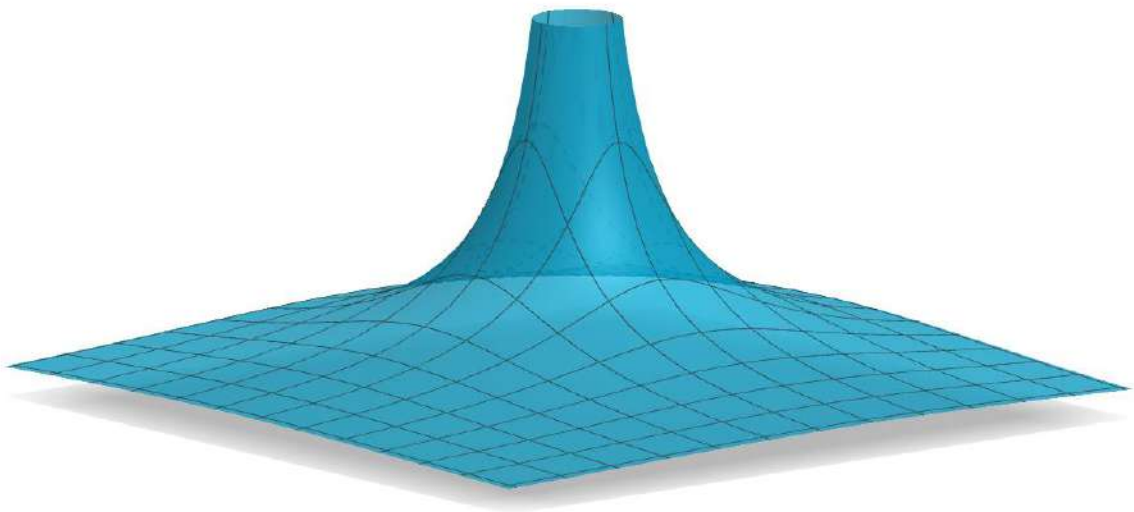
$$\lim_{z \to 0} [z \cdot f(z)] = 0$$

En general, la región estrellada de holomorfía Ω puede tener un número numerable de agujeros z_i en los que para cada uno de ellos se verifique:

$$\lim_{z \to z_i} [z \cdot f(z)] = 0$$

Y entonces f seguirá teniendo una primitiva holomorfa.

El módulo de $f(z) = z^{-1}$ se representa así, como ya se puede uno imaginar:



Cerca del cero f se hace grande no menos rápido de lo que z se hace pequeño.

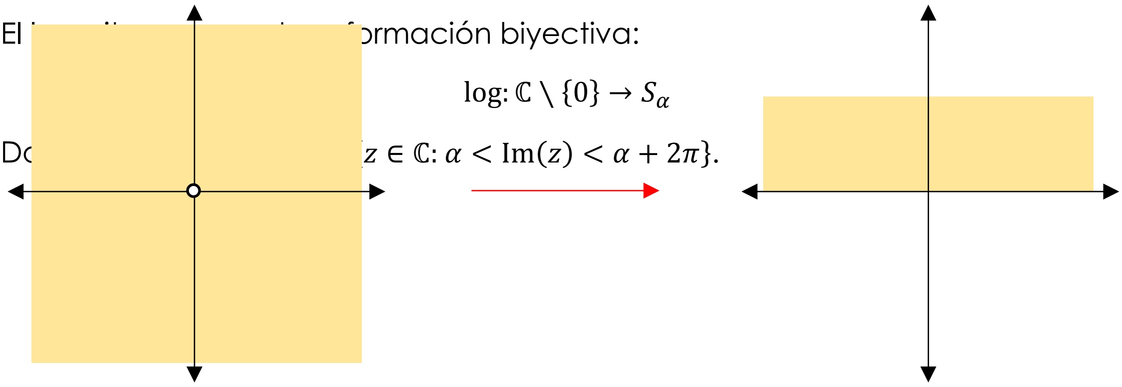
Vamos a seguir dándole vueltas, nunca mejor dicho, a esto.

A vueltas con el logaritmo

El ormación biyectiva:

$$\log\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to S_\alpha$$

Do $z \in \mathbb{C}\colon \alpha < \mathrm{Im}(z) < \alpha + 2\pi\}$.



Transformación escogiendo S_0.

$$\log(z) = \log(|z|) + i \cdot \arg(z)$$

Esto se generaliza a funciones. Si S es cualquier subconjunto del plano complejo y f es una función $f\colon S \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ continua, entonces $g\colon S \to \mathbb{C}$ es el <u>logaritmo continuo</u> de f si se verifica: $e^g = f$ en cualquier punto de S.

El logaritmo permite definir en cierta manera el argumento, pues:

$$\arg_\alpha(z) = \mathfrak{Im}(\log_\alpha(z))$$

Es más, de lo que se ha mencionado antes se desprende que:

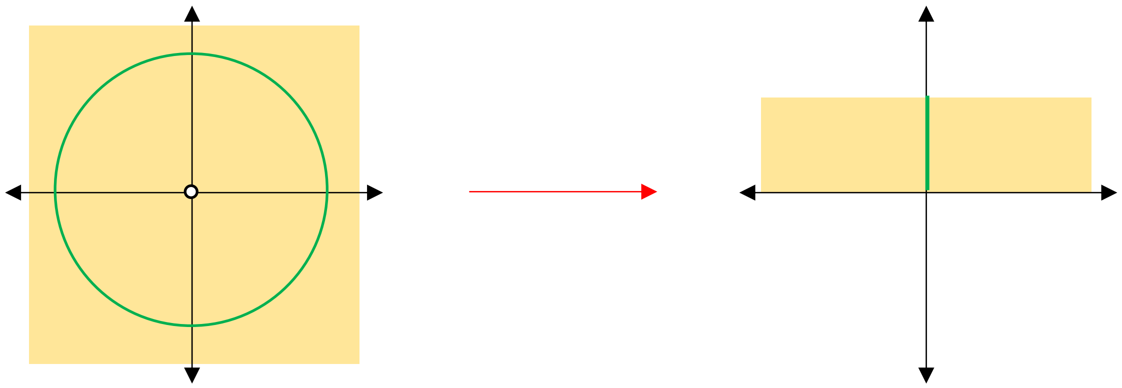
$$g(s) = \log\big(f(s)\big), \qquad s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$\arg\big(f(s)\big) = \mathfrak{Im}\big(g(s)\big)$$

Así que el logaritmo continuo de f define inmediatamente el argumento continuo de f, unívocamente definido mediante α.

Y esto se puede aplicar a caminos: si $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es un camino continuo en el plano, entonces tiene logaritmo continuo, y por tanto, argumento continuo.

El propósito de esta formalización se justifica ahora. Supongamos que γ es la circunferencia unidad centrada en el origen. Es transformada en un segmento de longitud 2π sobre el eje imaginario ($\log(1) = 0$).



Pero puede entenderse de otra manera. En tanto que:

$$\log(z) = \log(|z|) + i \cdot \arg(z)$$

Cuando z recorre una curva sobre el plano, la parte imaginaria de su logaritmo me informa de cuánto está cambiando su argumento. Mientras que la parte real da una medida de cuánto se aleja del origen.

¿Qué es integrar $f(z) = z^{-1}$?

$$f(z) = \frac{d}{dz} \cdot \log(z) = \frac{1}{z}$$

Es integrar la variación del valor del logaritmo respecto conforme varía z.

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_\gamma \frac{d}{dz} \cdot \log(z) \cdot dz = \int_\gamma d \cdot \log(z) =$$

$$= \int_\gamma d \cdot \ln(|z|) + i \cdot \int_\gamma d \cdot \arg(z)$$

Cuando γ es cerrada, la integral del primer sumando se va a anular porque $|z|$ es el mismo en el punto final y en el de partida. Pero, habiendo definido bien qué es $\arg(z)$ como función continua, la integral del segundo sumando da el valor del incremento de z, que si z recorre una curva cerrada entorno a 0, es 2π.

Este es el motivo del misterioso valor $2\pi \cdot i$ en la integral de la función inversa. En tanto que la función logaritmo aporta información acerca del módulo de un número (parte real) y el argumento (parte imaginaria), la integral de la derivada del logaritmo a lo largo de una trayectoria informa de cuánto varía el argumento del numero al recorrer la trayectoria.

El poder de esto está en que el resultado de la integral es $2\pi \cdot i$ para cualquier trayectoria cerrada entorno al centro del logaritmo.

Una fórmula para dominarlos a todos

Dada una función holomorfa f en un dominio Ω, se puede construir la función asociada al cociente incremental:

$$F(z) = \frac{f(z) - f(\omega)}{z - \omega}$$

Se tiene continuidad en $z = \omega$ o, equivalentemente, F no se descontrola cerca de ω – no hace ni falta comprobarlo sabiendo que f holomorfa. Por el teorema de Cauchy extendido, dada <u>cualquier</u> curva cerrada γ:

$$\int_\gamma F \cdot dz = 0$$

Entonces:

$$\int_\gamma \frac{f(\omega)}{\omega - z} \cdot d\omega = f(z) \cdot \int_\gamma \frac{d\omega}{\omega - z}$$

Pero ya hemos visto que el resultado de integrar la derivada del logaritmo centrado en z es medir el incremento del argumento del vector $\omega - z$ cuando ω recorre la curva.

> <u>Definición</u>: Se define como índice de γ respecto de z, a.k.a. $\boldsymbol{\eta(z, \gamma)}$, simplemente el número de vueltas que da γ alrededor de ω en su parametrización.

Por ejemplo $\gamma(t) \equiv r \cdot e^{it}$ para $r > 0$ y $t \in (0{,}4\pi)$ da dos vueltas alrededor de cualquier punto del interior de la circunferencia que describe.

Entonces, generalizando y aplicando lo descubierto en el capítulo anterior:

$$\int_\gamma \frac{f(\omega)}{\omega - z} \cdot d\omega = f(z) \cdot 2\pi i \cdot \eta(z, \gamma)$$

Suponiendo que γ no gira entorno a puntos que no están en Ω, se suele escribir:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i \cdot \eta(z,\gamma)} \cdot \int_{\gamma} \frac{f(\omega)}{\omega - z} \cdot d\omega\,, \qquad z \in \Omega \setminus \gamma^*$$

Este es el teorema general de Cauchy, una piedra angular del análisis complejo.

Contiene la siguiente información:

- ✓ El valor de una función en cualquier punto del interior de un dominio, típicamente un disco, depende de los valores en su borde.
- ✓ Da una condición necesaria y suficiente de los caminos cerrados en los que se anula la integral de cualquier función holomorfa. Esta es que el camino γ no gire alrededor de puntos que no están en Ω.
- ✓ Esa es, a su vez, una condición necesaria y suficiente de los abiertos Ω en los que se anula la integral entorno a cualquier camino cerrado.

En adición, al teorema general de Cauchy se le caen varios corolarios.

La función $f(z)$ se puede derivar, y entonces se puede probar, mediante técnicas de convergencia uniforme junto con inducción, o bien estudiando la diferenciación bajo el signo de la integral, que:

$$f^{n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i \cdot \eta(z,\gamma)} \cdot \int_{\gamma} \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^{n+1}} \cdot d\omega$$

Por supuesto, como $2\pi i \cdot \eta(z,\gamma)$ es constante puedo multiplicárselo sin perder generalidad.

$$f^{n)}(z) = n! \cdot \int_{\gamma} \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^{n+1}} \cdot d\omega$$

Y entonces γ no necesariamente ha de cerrarse. De esto se deduce:

1. Si f holomorfa en Ω entonces tiene derivadas de todos los órdenes.
2. Si f tiene primitiva holomorfa entonces tiene derivadas de todos los órdenes.

3. Si f es continua en Ω y se anula la integral entorno a cualquier triángulo, entonces es holomorfa en Ω (teorema de Morera).

4. Si f holomorfa en $\Omega \setminus z_0$ entonces f admite una extensión holomorfa sobre z_0 (teorema de la singularidad evitable). Esto es equivalente a decir que:

$$\lim_{z \to z_0} [f(z) \cdot (z - z_0)] = 0$$

   Lo cual hace esta hipótesis anteriormente usada inservible.

5. Estimación de Cauchy:

$$\left|f^{n)}(z_0)\right| \leq \frac{n!}{r^n} \cdot \max_{z \in \partial D(z_0, r)} \{f(z)\}$$

6. Como consecuencia de lo anterior, si f entera y acotada, entonces f constante (teorema de Liouville).

¡Cosa extraña las funciones holomorfas!

La conclusión número 4 deja ver que una función, de la misma manera en la que no puede ser holomorfa en un solo punto, tampoco puede dejar de serlo. Por la naturaleza de la holomorfía pareciera que los puntos se arrastran unos a otros a la hora de cumplir propiedades. Las funciones holomorfas no son amigas de propiedades puntuales. En esta línea van también los siguientes resultados.

Resultado 6: Principio de identidad.

Si f es holomorfa y no idénticamente nula, entonces el conjunto de ceros $Z(f) = \{z \in \mathbb{C}: f(z) = 0\}$ no tiene punto límite. No se acumulan.

Resultado 8: Principio del módulo máximo.

Si f holomorfa en Ω entonces $|f|$ alcanza el máximo en $\partial\Omega$, si no, es constante.

El secreto de las funciones holomorfas

Un sitio especial de entre todas las aplicaciones de la fórmula de Cauchy tiene la siguiente:

> Restultado 7: Si f es holomorfa, entonces f es representable en series de potencias.

Demostración:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(\omega)}{\omega - z} \cdot d\omega$$

Pero:

$$\frac{f(\omega)}{\omega - z} = \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\omega - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(f(\omega) \cdot \frac{(z - z_0)^n}{(\omega - z_0)^{n+1}} \right)$$

Por criterios de convergencia uniforme es posible integrar término a término, y aplicar la fórmula de las derivadas de una función holomorfa. QED.

Entonces recordamos el resultado 2 del capítulo de series de potencias y concluimos que las funciones holomorfas y las series de potencias son lo mismo. Todas las propiedades mencionadas se pueden aplicar a las series de potencias.