

Sobre el Ajuste de Funciones. Metodo de los mínimos cuadrados. Polinomios ortogonales

About Function Setting. Method of least squares. Orthogonal polynomials

Resumen

Estudiamos el ajuste de funciones de una variable real, mostrando el fundamento del método de los mínimos cuadrados y usando polinomios ortogonales en la nube de puntos de la función a ajustar, con generalización a funciones ortogonales en un intervalo cerrado. Mostramos el ajuste mediante funciones trigonométricas ortogonales en un intervalo dado y también mediante los polinomios de Tchebycheff.

Summary

We study the adjustment function of a real variable, showing the basis of the least squares method, and using, as well, orthogonal polynomials in the point cloud of the adjusted function, with generalizing orthogonal functions in a closed interval. We show the adjustment by orthogonal trigonometric functions in a given interval and by Tchebycheff polynomials.

Palabras clave

Ajuste, interpolación, ortogonal, polinomio, función, base, soporte, norma, minimizar, cuadrados, euclidiana, aproximación, mínimos, cuadrados

keywords

Adjustment, interpolation, orthogonal, polynomial, function, base, support, norm, minimize, squares, Euclidean, approximation, least squares

0. Idea de interpolación y de ajuste. Soporte y base de ajuste

Es frecuente encontrar en el análisis numérico funciones $y=f(x)$ definidas por tablas, de forma que solo se conocen los valores que toman en un conjunto finito de puntos, $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$:

x_0	x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n
y_0	y_1	y_2	...	y_{n-1}	y_n

Con la necesidad de conocer valores de tal función $f(x)$ en puntos distintos de los que ya figuran en la tabla.

El problema de la interpolación consiste en la determinación de una función $g(x)$ que en los puntos de la tabla dada, $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$, toma los mismos valores, $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n$, de la función $f(x)$ tabulada, mientras que en los puntos intermedios se toman como valores de $f(x)$ los valores que tome la función interpoladora $g(x)$.

Son muchos los fenómenos experimentales que se comportan en ciertos intervalos como funciones de determinadas variables. Realizando su medición en un número finito de puntos se obtendrá una tabla y, al interpolar, una función que describe con un cierto error el fenómeno tabulado.

Teniendo en cuenta el espacio de las funciones de una variable real y en él, el conjunto de $n+1$ funciones $g_0(x), g_1(x), \dots, g_{n-1}(x), g_n(x)$, de forma que cualquier subconjunto de las mismas es linealmente independiente, se trata de encontrar un polinomio generalizado

$$p_n(x) = c_0 \cdot g_0(x) + c_1 \cdot g_1(x) + \dots + c_{n-1} \cdot g_{n-1}(x) + c_n \cdot g_n(x)$$

tal que

$$p_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1, n$$

Los puntos $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$, se denominan soporte de la interpolación, y el error cometido depende tanto de la base de la interpolación, las funciones $g_0(x), g_1(x), \dots, g_{n-1}(x), g_n(x)$, como del criterio escogido para la determinación de los coeficientes $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}, c_n$, del polinomio generalizado $p_n(x)$.

Sin embargo, cuando se conoce una base de $m+1$ funciones

$$g_0(x), g_1(x), \dots, g_{m-1}(x), g_m(x)$$

con $m < n$, es decir, en número menor que el número de puntos del soporte, el problema de determinar las $p(x_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, n-1, n$, no tiene solución, siendo preciso idear otros métodos y otros criterios de aproximación. El problema ahora es el conocido como *problema del ajuste de funciones*.

1. El método de los Mínimos cuadrados

1.1. Ajuste mediante combinación lineal de las funciones de la base:

Si en un determinado punto (x_i, y_i) de la función a ajustar el valor que toma el polinomio de ajuste es $p(x_i)$, el error cometido en el ajuste viene dado por la diferencia $e_i = y_i - p(x_i)$. Si consideramos el error en cada uno de los $n+1$ puntos del soporte, obtendremos $n+1$ valores que constituyen lo que llamaremos el vector de error.

Si son $e_i = y_i - p(x_i), i = 0, 1, \dots, n-1, n$, las componentes del vector de error,

$$e = (e_0, e_1, \dots, e_n),$$

se trata de encontrar el polinomio generalizado

$$p(x) = c_0 \cdot g_0(x) + c_1 \cdot g_1(x) + \dots + c_m \cdot g_m(x)$$

que haga mínimo el vector de error, esto es, que haga mínima la norma del vector de error.

Cuando tomamos como norma del vector de error la norma euclidiana

$$|e| = +\sqrt{e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_n^2}$$

el proceso desemboca en el método conocido como de los *mínimos cuadrados*.

Estudiamos a continuación el ajuste de funciones, primero elementalmente, cuando las funciones del ajuste son potencias de la variable independiente x , y, después, cuando tales funciones son polinomios ortogonales y en general funciones ortogonales, tratando de describir el caso de las funciones trigonométricas y asimismo el de los polinomios de Tchebycheff.

1.2. El método de los mínimos cuadrados. Minimizar la norma euclidiana:

Si utilizamos la norma euclidiana, la norma mínima es equivalente a que sea mínima la suma de los cuadrados de las componente del vector, o sea, de los cuadrados de los errores cometidos en el ajuste, por lo que en este caso se acostumbra a denominar *método de los mínimos cuadrados*

$$e = (e_0, e_1, e_2, \dots, e_n) \rightarrow |e| = \sqrt{\sum_{k=0}^n e_k^2} \rightarrow |e|^2 = \sum_{k=0}^n e_k^2$$

donde es, para $k = 0, 1, \dots, n$:

$$e_k = y_k - p(x_k) = y_k - \sum_{j=0}^m c_j g_j(x_k)$$

por tanto

$$|e|^2 = \sum_{k=0}^n e_k^2 = \sum_{k=0}^n \left(y_k - \sum_{j=0}^m c_j g_j(x_k) \right)^2$$

Se trata, en definitiva, de encontrar los valores de los coeficientes, $c_0, c_1, \dots, c_m$, a partir de la condición de mínimo para la función de la norma al cuadrado anterior. Esto es, de forma que sea nula la primera derivada.

$$\frac{\partial |e|^2}{\partial c_i} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m$$

En definitiva, para realizar el ajuste lineal de una nube de puntos del plano o soporte, $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, se necesita obviamente la base con la que se desea realizar el ajuste, $B = \{g_0(x), g_1(x), \dots, g_m(x)\}$, y los coeficientes del polinomio generalizado, que han de cumplir la condición de minimización antedicha:

$$\frac{\partial |e|^2}{\partial c_i} = \sum_{k=0}^n \frac{\partial e_k^2}{\partial c_i} = \sum_{k=0}^n 2e_k \frac{\partial e_k}{\partial c_i} = \sum_{k=0}^n 2(y_k - \sum_{j=0}^m c_j g_j(x_k)) \frac{\partial}{\partial c_i} (y_k - \sum_{j=0}^m c_j g_j(x_k)) =$$

$$= \sum_{k=0}^n 2(y_k - \sum_{j=0}^m c_j g_j(x_k))(-g_i(x_k)) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m$$

o sea:

$$\sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^m c_j g_j(x_k) - y_k \right) g_i(x_k) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^m c_j g_j(x_k) g_i(x_k) - y_k g_i(x_k) \right) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{k=0}^n (c_0 g_0(x_k) g_i(x_k) + c_1 g_1(x_k) g_i(x_k) + \dots + c_m g_m(x_k) g_i(x_k) - y_k g_i(x_k)) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{k=0}^n c_0 g_0(x_k) g_i(x_k) + \sum_{k=0}^n c_1 g_1(x_k) g_i(x_k) + \dots + \sum_{k=0}^n c_m g_m(x_k) g_i(x_k) - \sum_{k=0}^n y_k g_i(x_k) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m$$

1.

Es decir:

$$\sum_{k=0}^n c_0 g_0(x_k) g_i(x_k) + \sum_{k=0}^n c_1 g_1(x_k) g_i(x_k) + \dots + \sum_{k=0}^n c_m g_m(x_k) g_i(x_k) = \sum_{k=0}^n y_k g_i(x_k), \quad i = 0, 1, 2, \dots, m$$

2.

Esto es:

$$\sum_{k=0}^n c_0 g_0(x_k) g_0(x_k) + \sum_{k=0}^n c_1 g_1(x_k) g_0(x_k) + \dots + \sum_{k=0}^n c_m g_m(x_k) g_0(x_k) = \sum_{k=0}^n y_k g_0(x_k)$$

$$\sum_{k=0}^n c_0 g_0(x_k) g_1(x_k) + \sum_{k=0}^n c_1 g_1(x_k) g_1(x_k) + \dots + \sum_{k=0}^n c_m g_m(x_k) g_1(x_k) = \sum_{k=0}^n y_k g_1(x_k)$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\sum_{k=0}^n c_0 g_0(x_k) g_m(x_k) + \sum_{k=0}^n c_1 g_1(x_k) g_m(x_k) + \dots + \sum_{k=0}^n c_m g_m(x_k) g_m(x_k) = \sum_{k=0}^n y_k g_m(x_k)$$

que, en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=0}^n g_0(x_k) g_0(x_k) & \dots & \sum_{k=0}^n g_m(x_k) g_0(x_k) \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=0}^n g_0(x_k) g_m(x_k) & \dots & \sum_{k=0}^n g_m(x_k) g_m(x_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ \dots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^n y_k g_0(x_k) \\ \dots \\ \sum_{k=0}^n y_k g_m(x_k) \end{bmatrix}$$

De donde, finalmente, obtenemos los coeficientes del desarrollo lineal de la función de ajuste:

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ \dots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^n g_0(x_k)g_0(x_k) & \dots & \sum_{k=0}^n g_m(x_k)g_0(x_k) \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=0}^n g_0(x_k)g_m(x_k) & \dots & \sum_{k=0}^n g_m(x_k)g_m(x_k) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^n y_k g_0(x_k) \\ \dots \\ \sum_{k=0}^n y_k g_m(x_k) \end{bmatrix} \quad [1.2_1]$$

$$p(x) = \sum_{j=0}^m c_j g_j(x)$$

1.3. Usando como base del ajuste potencias de la variable independiente:

Supongamos que se tiene para el conjunto del soporte $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ y para el conjunto base del ajuste las potencias $\{1, x, x^2, \dots, x^m\}$. O sea:

Soporte: $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$

Base: $\{1, x, x^2, \dots, x^m\}$

Se tiene entonces la función de ajuste $p(x) = \sum_{j=0}^m c_j x^j$, y la ecuación matricial

[1.2_1] quedaría así:

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \dots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^n x_k^{0+0} & \sum_{k=0}^n x_k^{1+0} & \dots & \sum_{k=0}^n x_k^{m+0} \\ \sum_{k=0}^n x_k^{0+1} & \sum_{k=0}^n x_k^{1+1} & \dots & \sum_{k=0}^n x_k^{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=0}^n x_k^{0+m} & \sum_{k=0}^n x_k^{1+m} & \dots & \sum_{k=0}^n x_k^{m+m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^n y_k x_k^0 \\ \sum_{k=0}^n y_k x_k^1 \\ \dots \\ \sum_{k=0}^n y_k x_k^m \end{bmatrix}$$

que podemos escribir en la forma: $C = S^{-1}U$, donde es S una matriz simétrica de orden m+1, que corresponde al producto de las dos matrices traspuestas:

$$1. \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0^m & x_1^m & \dots & x_n^m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^m \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^m \end{bmatrix}$$

la primera es de orden $(m+1) \times (n+1)$ y la segunda es de orden $(n+1) \times (m+1)$. Puesto que el número de columnas de la primera es igual al número de filas de la segunda, ambas son efectivamente multiplicables. Resultando, pues, la matriz cuadrada indicada antes, de orden $m+1$.

Si llamamos

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^m \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^m \end{bmatrix}$$

será $S = M^t \cdot M$

Con lo cual, la ecuación matricial que permite obtener los coeficientes de la función de ajuste queda así:

$$C = (M^t \cdot M)^{-1} U$$

Veamos a continuación como actuaríamos en un caso numérico elemental, en el que para un mismo soporte de 4 puntos empleamos una base de ajuste de solo dos potencias de x , x^0 y x^1 (ajuste lineal) en un primer ejemplo, y una base de ajuste de tres potencias de x , x^0 , x^1 y x^2 (ajuste cuadrático) en otro ejemplo.

1.4. Ejemplos numéricos:

Ejemplo 1:

Soporte: $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\} = \{(-1, -1), (1, 1), (3, 2), (4, 1)\}$

Base del ajuste: $\{g_0(x), g_1(x)\} = \{1, x\}$

Matriz columna U:

$$u_0 = \sum_{k=0}^3 x_k^0 y_k = x_0^0 y_0 + x_1^0 y_1 + x_2^0 y_2 + x_3^0 y_3 = (-1) + 1 + 2 + 1 = 3$$

$$u_1 = \sum_{k=0}^3 x_k^1 y_k = x_0^1 y_0 + x_1^1 y_1 + x_2^1 y_2 + x_3^1 y_3 = 1 + 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 12$$

Matriz de M paso:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad M^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \text{ por tanto el producto:}$$

$$M^t.M = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 27 \end{bmatrix}$$

Cálculo de la matriz inversa del producto:

- Determinante: $|M^t.M| = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 27 \end{vmatrix} = 59$
- Matriz adjunta de la traspuesta: $[(M^t.M)^t]^t = \begin{bmatrix} 27 & -7 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$
- Matriz inversa:

$$(M^t.M)^{-1} = \frac{1}{|M^t.M|} [(M^t.M)^t]^t = \frac{1}{59} \begin{bmatrix} 27 & -7 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$$

Calculo de los coeficientes de la función de ajuste:

$$C = (M^t.M)^{-1}.U \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27/59 & -7/59 \\ -7/59 & 4/59 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/59 \\ 27/59 \end{bmatrix}$$

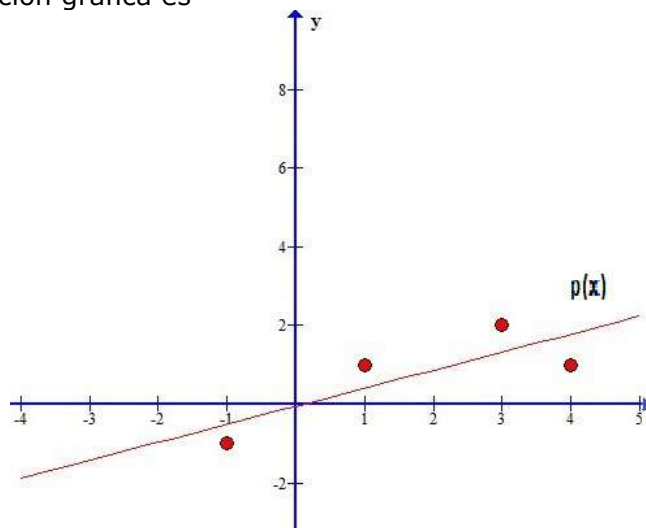
Función de ajuste:

$$p(x) = \sum_{j=0}^1 c_j x^j = c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot x = -3/59 + 27/59 \cdot x$$

Aproximando:

$$p(x) \approx -0.0508 + 0.4576 \cdot x$$

cuya representación gráfica es



Ejemplo 2:

Soporte: $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\} = \{(-1, -1), (1, 1), (3, 2), (4, 1)\}$

Base del ajuste: $\{g_0(x), g_1(x), g_2(x)\} = \{1, x, x^2\}$

Matriz columna U:

$$u_0 = \sum_{k=0}^3 x_k^0 y_k = x_0^0 y_0 + x_1^0 y_1 + x_2^0 y_2 + x_3^0 y_3 = (-1) + 1 + 2 + 1 = 3$$

$$u_1 = \sum_{k=0}^3 x_k^1 y_k = x_0^1 y_0 + x_1^1 y_1 + x_2^1 y_2 + x_3^1 y_3 = 1 + 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 12$$

$$u_2 = \sum_{k=0}^3 x_k^2 y_k = x_0^2 y_0 + x_1^2 y_1 + x_2^2 y_2 + x_3^2 y_3 = -1 + 1 + 18 + 16 = 34$$

Matriz de M paso:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix}, \quad M^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 9 & 16 \end{bmatrix}, \text{ por tanto el producto:}$$

$$M^t \cdot M = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 27 \\ 7 & 27 & 91 \\ 27 & 91 & 339 \end{bmatrix}$$

Cálculo de la matriz inversa del producto:

$$\text{- Determinante: } |M^t M| = \begin{vmatrix} 4 & 7 & 27 \\ 7 & 27 & 91 \\ 27 & 91 & 339 \end{vmatrix} = 1592$$

$$\text{- Matriz adjunta de la traspuesta: } [(M^t \cdot M)^t]^+ = \begin{bmatrix} 872 & 84 & -92 \\ 84 & 627 & -175 \\ -92 & -175 & 59 \end{bmatrix}$$

- Matriz inversa:

$$(M^t \cdot M)^{-1} = \frac{1}{|M^t M|} [(M^t \cdot M)^t]^+ = \begin{bmatrix} 872/1592 & 84/1592 & -92/1592 \\ 84/1592 & 627/1592 & -175/1592 \\ -92/1592 & -175/1592 & 59/1592 \end{bmatrix}$$

Calculo de los coeficientes de la función de ajuste:

$$C = (M^t \cdot M)^{-1} \cdot U \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 872/1592 & 84/1592 & -92/1592 \\ 84/1592 & 627/1592 & -175/1592 \\ -92/1592 & -175/1592 & 59/1592 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 34 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 496/1592 \\ 1826/1592 \\ -370/1592 \end{bmatrix}$$

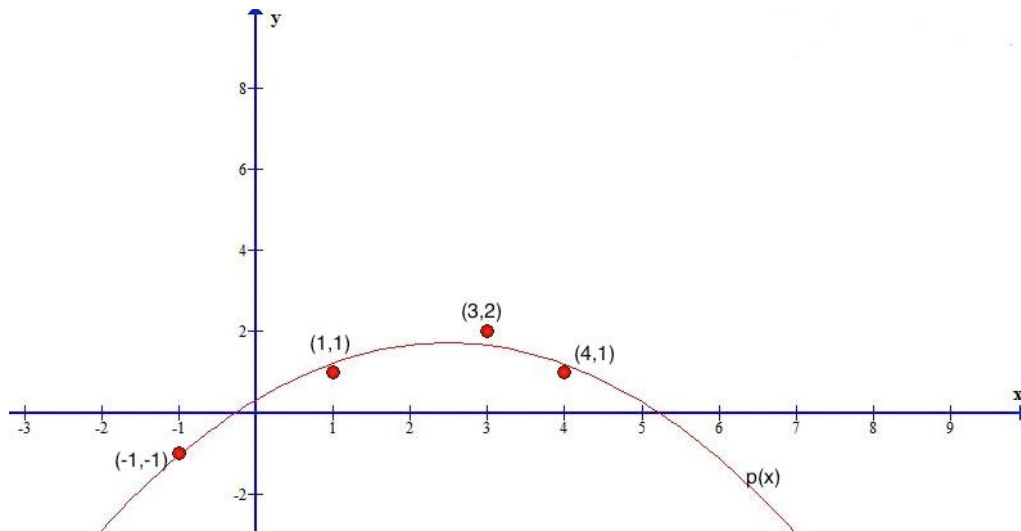
Función de ajuste:

$$p(x) = \sum_{j=0}^2 c_j x^j = c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 = 496/1592 + 1826/1592 \cdot x - 370/1592 \cdot x^2$$

Aproximando:

$$p(x) \approx 0.31 + 1.14 \cdot x - 0.23 \cdot x^2$$

cuya representación gráfica es



2. Ajuste con Polinomios Ortogonales

En lo que sigue vamos a obtener como base del ajuste un conjunto de polinomios que sean ortogonales en los puntos del soporte, y determinaremos los coeficientes del polinomio generalizado del ajuste minimizando la norma euclidiana del vector de errores, esto es, del vector definido por las diferencias entre los valores dados en los puntos del soporte y los valores que en tales puntos toma el polinomio generalizado.

2.1. Determinación de un conjunto de polinomios ortogonales sobre un soporte dado:

Dos polinomios, $p_j(x)$ y $p_k(x)$, de grados respectivos j y k , se dicen ortogonales en el soporte $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ sii se verifica que

$$\sum_{i=0}^n p_j(x_i) \cdot p_k(x_i) = \delta_{jk} \equiv \begin{cases} 0, & \text{si } j \neq k \\ 1, & \text{si } j = k \end{cases}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Consideremos los $m+1$ polinomios, ortogonales en los puntos del soporte dado

$$\{p_j(x)\}_0^m \equiv \{p_0(x), p_1(x), \dots, p_m(x)\}$$

de expresiones:

$$p_j(x) = \sum_{k=0}^j \beta_{jk} x^k, \quad j=0,1,\dots,m$$

esto es:

$$p_0(x) = \beta_{00} x^0$$

$$p_1(x) = \beta_{10} x^0 + \beta_{11} x^1$$

$$p_2(x) = \beta_{20} x^0 + \beta_{21} x^1 + \beta_{22} x^2$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$p_m(x) = \beta_{m0} x^0 + \beta_{m1} x^1 + \beta_{m2} x^2 + \dots + \beta_{mm} x^m$$

- Si despejamos las $x^0, x^1, \dots, x^{m-1}, x^m$ en función de estos polinomios obtendremos expresiones de la forma

$$x^j = \sum_{k=0}^j \alpha_{jk} p_k(x), \quad j = 0,1,\dots,m$$

o sea:

$$x^0 = \alpha_{00} p_0(x)$$

$$x^1 = \alpha_{10} p_0(x) + \alpha_{11} p_1(x)$$

$$x^2 = \alpha_{20} p_0(x) + \alpha_{21} p_1(x) + \alpha_{22} p_2(x)$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$x^{m-1} = \alpha_{m-10} p_0(x) + \alpha_{m-11} p_1(x) + \dots + \alpha_{m-1,m-1} p_{m-1}(x)$$

$$x^m = \alpha_{m0} p_0(x) + \alpha_{m1} p_1(x) + \dots + \alpha_{mm} p_m(x)$$

que podemos escribir en forma compacta así:

$$x^j = \alpha_{jj} p_j(x) + \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_{jk} p_k(x), \quad j = 0,1,\dots,m \quad [2.1_1]$$

y en cada punto x_i , $i = 0,1,\dots,n$, del soporte se verifica que

$$x_i^j = \alpha_{jj} p_j(x_i) + \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_{jk} p_k(x_i), \quad j = 0,1,\dots,m \quad [2.1_2]$$

- Si elevamos al cuadrado y sumamos respecto a i :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n x_i^{2j} &= \sum_{i=0}^n \left(\alpha_{jj} p_j(x_i) + \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_{jk} p_k(x_i) \right)^2 = \sum_{i=0}^n \left(\alpha_{jj} p_j(x_i) \right)^2 + \sum_{i=0}^n \left(\sum_{k=0}^{j-1} \alpha_{jk} p_k(x_i) \right)^2 + \\ &+ 2\alpha_{jj} \sum_{i=0}^n \left(p_j(x_i) \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_{jk} p_k(x_i) \right) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que se trata de polinomios ortogonales en los puntos del soporte, será:

$$\sum_{i=0}^n p_j^2(x_i) = 1, \quad j = 0,1,\dots,m$$

$$\sum_{i=0}^n \left(\sum_{k=0}^{j-1} \alpha_{jk} p_k(x_i) \right)^2 = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_{jk}^2 p_k^2(x_i) = \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_{jk}^2$$

$$2\alpha_{jj} \sum_{i=0}^n \left(p_j(x_i) \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_{jk} p_k(x_i) \right) = 0$$

con lo que resulta:

$$\sum_{i=0}^n x_i^{2j} = \alpha_{jj}^2 + \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_{jk}^2$$

o bien

$$\alpha_{jj}^2 = \sum_{i=0}^n x_i^{2j} - \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_{jk}^2 \quad j = 0, 1, \dots, m \quad [2.1_3]$$

- Si multiplicamos [2.1_2] por el polinomio ortogonal $p_h(x_i)$ y sumamos respecto a i :

$$\sum_{i=0}^n x_i^j p_h(x_i) = \sum_{i=0}^n \alpha_{jj} p_j(x_i) p_h(x_i) + \sum_{i=0}^n \left(\sum_{k=0}^{j-1} \alpha_{jk} p_k(x_i) p_h(x_i) \right), \quad j = 0, 1, \dots, m$$

por lo que

$$\sum_{i=0}^n x_i^j p_h(x_i) = 0 + \alpha_{jh}, \quad j = 0, 1, \dots, m; h = 0, 1, \dots, m$$

Entonces

$$\alpha_{jh} = \sum_{i=0}^n x_i^j p_h(x_i), \quad j = 0, 1, \dots, m; h = 0, 1, \dots, m \quad [2.1_4]$$

- Si en [2.1_1] despejamos $p_j(x)$ se tiene

$$p_j(x) = \frac{1}{\alpha_{jj}} \left(x^j - \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_{jk} p_k(x) \right), \quad j = 0, 1, \dots, m \quad [2.1_5]$$

La expresión recurrente [2.1_5] establece la dependencia de un polinomio cualquiera, $p_j(x)$, de todos los polinomios de grado inferior, $p_0(x), p_1(x), \dots, p_{j-1}(x)$, que podemos determinar calculando las constantes α_{jj} y α_{jk} que figuran en la misma, usando respectivamente las expresiones [2.1_3] y [2.1_4]. Veamos a continuación como ir determinando todos los polinomios ortogonales desde estas expresiones.

$$p_0(x) = \frac{1}{\alpha_{00}} \left[x^0 - \sum_{k=0}^{0-1} \alpha_{0k} p_k(x) \right]$$

$$p_1(x) = \frac{1}{\alpha_{11}} \left[x^1 - \sum_{k=0}^{1-1} \alpha_{1k} p_k(x) \right]$$

$$p_2(x) = \frac{1}{\alpha_{22}} \left[x^2 - \sum_{k=0}^{2-1} \alpha_{2k} p_k(x) \right]$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$p_m(x) = \frac{1}{\alpha_{mm}} \left[x^m - \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_{mk} p_k(x) \right]$$

Calculamos las constantes de forma sistemática, usando [2.1_3] y [2.1_4].

- Polinomio $p_0(x)$:

$$p_0(x) = \frac{1}{\alpha_{00}} \left[x^0 - \sum_{k=0}^{0-1} \alpha_{0k} p_k(x) \right]$$

Puesto que el sumatorio es nulo, calculamos, usando [2.1_3]:

$$\alpha_{00}^2 = \sum_{i=0}^n x_i^{2,0} - \sum_{k=0}^{0-1} \alpha_{0k}^2 = \sum_{i=0}^n 1 - 0 = n + 1 - 0 = n + 1 \rightarrow \alpha_{00} = \sqrt{n+1}$$

$$p_0(x) = \frac{1}{\alpha_{00}} \left[x^0 - \sum_{k=0}^{0-1} \alpha_{0k} p_k(x) \right] = \frac{1}{\sqrt{n+1}} [1 - 0] = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Por tanto queda:

$$p_0(x) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad [2.1_6]$$

- Polinomio $p_1(x)$:

$$p_1(x) = \frac{1}{\alpha_{11}} \left[x^1 - \sum_{k=0}^{1-1} \alpha_{1k} p_k(x) \right] = \frac{1}{\alpha_{11}} [x - \alpha_{10} p_0(x)]$$

usando [2.1_4]:

$$\alpha_{10} = \sum_{i=0}^n x_i^1 p_0(x_i) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{i=0}^n x_i$$

usando [2.1_3]:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}^2 &= \sum_{i=0}^n x_i^{2,1} - \sum_{k=0}^{1-1} \alpha_{1k}^2 = \sum_{i=0}^n x_i^2 - \sum_{k=0}^0 \alpha_{1k}^2 = \sum_{i=0}^n x_i^2 - \alpha_{10}^2 = \sum_{i=0}^n x_i^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{i=0}^n x_i \right)^2 = \\ &= \sum_{i=0}^n x_i^2 - \frac{1}{n+1} \left(\sum_{i=0}^n x_i \right)^2 \rightarrow \alpha_{11} = \sqrt{\sum_{i=0}^n x_i^2 - \frac{1}{n+1} \left(\sum_{i=0}^n x_i \right)^2} \\ p_1(x) &= \frac{1}{\alpha_{11}} [x - \alpha_{10} p_0(x)] = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=0}^n x_i^2 - \frac{1}{n+1} \left(\sum_{i=0}^n x_i \right)^2}} \left[x - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{i=0}^n x_i \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right] \end{aligned}$$

Resulta por tanto:

$$p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=0}^n x_i^2 - \frac{1}{n+1} \left(\sum_{i=0}^n x_i \right)^2}} \left[x - \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n x_i \right] \quad [2.1_7]$$

- Polinomio $p_2(x)$:

$$p_2(x) = \frac{1}{\alpha_{22}} \left[x^2 - \sum_{k=0}^{2-1} \alpha_{2k} p_k(x) \right] = \frac{1}{\alpha_{22}} [x^2 - \alpha_{20} p_0(x) - \alpha_{21} p_1(x)]$$

usando [2.1_4]:

$$\alpha_{20} = \sum_{i=0}^n x_i^2 p_0(x_i) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{i=0}^n x_i^2$$

$$\alpha_{21} = \sum_{i=0}^n x_i^2 p_1(x_i) = \sum_{i=0}^n \frac{x_i^2}{\sqrt{\sum_{i=0}^n x_i^2 - \frac{1}{n+1} \left(\sum_{i=0}^n x_i \right)^2}} \left[x - \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n x_i \right]$$

usando [2.1_3]:

$$\alpha_{22}^2 = \sum_{i=0}^n x_i^{2,2} - \sum_{k=0}^{2-1} \alpha_{2k}^2 = \sum_{i=0}^n x_i^4 - \alpha_{20}^2 - \alpha_{21}^2 \rightarrow \alpha_{22} = \sqrt{\sum_{i=0}^n x_i^4 - \alpha_{20}^2 - \alpha_{21}^2}$$

En definitiva, se obtiene, en función de α_{20} y α_{21} :

$$p_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=0}^n x_i^4 - \alpha_{20}^2 - \alpha_{21}^2}} \left[x^2 - \alpha_{20} p_0(x) - \alpha_{21} p_1(x) \right] \quad [2.1_8]$$

Siguiendo con el proceso, el último de los polinomios del conjunto, $p_m(x)$, tendría una expresión análoga:

$$p_m(x) = \frac{1}{\alpha_{mm}} \left[x^m - \alpha_{m0} p_0(x) - \alpha_{m1} p_1(x) - \dots - \alpha_{mm-1} p_{m-1}(x) \right]$$

2.2. Un ejemplo numérico de obtención de polinomios ortogonales en un soporte dado:

Consideremos el soporte constituido por los 4 puntos del plano:

$$\{(-1,-1), (1,1), (3,2), (4,1)\}$$

Y obtengamos un conjunto de tres polinomios, $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$, que sean ortogonales en tales puntos:

- Polinomio $p_0(x)$:

De [2.1_6]:

$$p_0(x) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{3+1}} = \frac{1}{2} \quad [2.2_1]$$

- Polinomio $p_1(x)$:

De [2.1_7]:

$$p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=0}^n x_i^2 - \frac{1}{n+1} \left(\sum_{i=0}^n x_i \right)^2}} \left[x - \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n x_i \right]$$

y siendo en este ejemplo:

$$\sum_{i=0}^3 x_i = -1 + 1 + 3 + 4 = 7, \quad \sum_{i=0}^3 x_i^2 = 1 + 1 + 9 + 16 = 27, \quad \sum_{i=0}^3 x_i^4 = 1 + 1 + 81 + 256 = 339$$

será:

$$p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{59}/2} \left[x - \frac{7}{4} \right] = \frac{2}{\sqrt{59}} x - \frac{7}{2\sqrt{59}} \quad [2.2_2]$$

- Polinomio $p_2(x)$:

De [2.1_8]:

$$p_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=0}^n x_i^4 - \alpha_{20}^2 - \alpha_{21}^2}} \left[x^2 - \alpha_{20} p_0(x) - \alpha_{21} p_1(x) \right]$$

y siendo:

$$\alpha_{20} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{i=0}^3 x_i^2 = \frac{27}{2}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{21} &= \sum_{i=0}^3 x_i^2 p_1(x_i) = 1 \cdot p_1(-1) + 1 \cdot p_1(1) + 3^2 \cdot p_1(3) + 4^2 \cdot p_1(4) = \\ &= -\frac{11}{2\sqrt{59}} - \frac{3}{2\sqrt{59}} + \frac{45}{2\sqrt{59}} + \frac{144}{2\sqrt{59}} = \frac{175}{2\sqrt{59}} \end{aligned}$$

$$\alpha_{22}^2 = \sum_{i=0}^3 x_i^4 - \alpha_{20}^2 - \alpha_{21}^2 = 339 - \frac{729}{4} - \frac{30625}{236} = \frac{6368}{236} \rightarrow \alpha_{22} = \sqrt{\frac{6368}{236}}$$

$$\alpha_{20} p_0(x) = \frac{27}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{27}{4}, \quad \alpha_{21} p_1(x) = \frac{175}{2\sqrt{59}} \left[\frac{2}{\sqrt{59}} x - \frac{7}{2\sqrt{59}} \right] = \frac{175}{59} x - \frac{1225}{236}$$

por lo que

$$-\alpha_{20} p_0(x) - \alpha_{21} p_1(x) = -\frac{27}{4} - \frac{175}{59} x + \frac{1225}{236} = -\frac{700}{236} x - \frac{368}{236}$$

se tiene, al sustituir:

$$p_2(x) = \sqrt{\frac{236}{6368}} \left[x^2 - \frac{700}{236} x - \frac{368}{236} \right] = \sqrt{\frac{236}{6368}} x^2 - \frac{700}{236} \sqrt{\frac{236}{6368}} x - \frac{368}{236} \sqrt{\frac{236}{6368}} \quad [2.2_3]$$

2.3. Ajuste con polinomios ortogonales:

Sea la función de ajuste o polinomio generalizado dado por la combinación lineal de los polinomios ortogonales en el soporte dado:

$$Q(x) = \sum_{k=0}^m c_k p_k(x)$$

y consideremos el valor de estos polinomio en cada punto, x_i , $i=0,1,\dots,n$, del soporte:

$$p_k(x_i), \quad k=0,1,\dots,m; \quad i=0,1,\dots,n$$

cumpléndose, obviamente, la condición de ortogonalidad:

$$\sum_{i=0}^n p_j(x_i) \cdot p_k(x_i) = \delta_{jk} \equiv \begin{cases} 0 & (\text{si } j \neq k) \\ 1 & (\text{si } j = k) \end{cases}$$

Sea e_i el error cometido al ajustar mediante la indicada función $Q(x)$ en $x = x_i$:

$$e_i = y_i - Q(x_i)$$

y consideremos el vector de los errores $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, cuya norma euclidiana verifica $|e|^2 = e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_n^2$.

Como pretendemos que tal norma sea mínima para la función de ajuste $Q(x)$ imponemos la condición de derivada nula respecto los coeficientes c_k introducidos en su construcción:

$$\begin{aligned} \frac{\partial |e|^2}{\partial c_j} &= \frac{\partial}{\partial c_j} \left(\sum_{i=0}^n e_i^2 \right) = \frac{\partial}{\partial c_j} \sum_{i=0}^n (y_i - Q(x_i))^2 = \sum_{i=0}^n \frac{\partial}{\partial c_j} (y_i - Q(x_i))^2 = \sum_{i=0}^n 2(y_i - Q(x_i)) \frac{\partial}{\partial c_j} (y_i - Q(x_i)) = \\ &= \sum_{i=0}^n 2 \left(y_i - \sum_{k=0}^m c_k p_k(x_i) \right) \frac{\partial}{\partial c_j} \left(y_i - \sum_{k=0}^m c_k p_k(x_i) \right) = - \sum_{i=0}^n 2 \left(y_i - \sum_{k=0}^m c_k p_k(x_i) \right) p_j(x_i) = \\ &= -2 \sum_{i=0}^n y_i p_j(x_i) + 2 \sum_{i=0}^n p_j(x_i) \sum_{k=0}^m c_k p_k(x_i) = 2c_j - 2 \sum_{i=0}^n y_i p_j(x_i) = 0 \end{aligned}$$

de lo cual

$$c_j = \sum_{i=0}^n y_i p_j(x_i) \quad j = 0, 1, \dots, m$$

Y la función de ajuste es

$$Q(x) = \sum_{j=0}^m c_j p_j(x_i) = \sum_{j=0}^m \left(\sum_{i=0}^n y_i p_j(x_i) \right) p_j(x_i) \quad j = 0, 1, \dots, m$$

Ejemplo numérico de ajuste con polinomios ortogonales para el soporte de los anteriores ejemplos

Soporte:

$$\{(-1, -1), (1, 1), (3, 2), (4, 1)\}$$

Base: Sean los polinomios ortogonales encontrados en el ejemplo del apartado 2.2., esto es, las expresiones [2.2_1], [2.2_2] y [2.2_3]:

$$\{p_0(x), p_1(x), p_2(x)\} \equiv \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{\sqrt{59}}x - \frac{7}{2\sqrt{59}}, \sqrt{\frac{236}{6368}}x^2 - \frac{700}{236}\sqrt{\frac{236}{6368}}x - \frac{368}{236}\sqrt{\frac{236}{6368}} \right\}$$

Aproximando estos polinomios hasta la cuarta cifra decimal:

$$p_0(x) = \frac{1}{2} = 0'5000$$

$$p_1(x) = \frac{2}{\sqrt{59}}x - \frac{7}{2\sqrt{59}} \approx 0'2603.x - 0'4556$$

$$p_2(x) = \sqrt{\frac{236}{6368}}x^2 - \frac{700}{236}\sqrt{\frac{236}{6368}}x - \frac{368}{236}\sqrt{\frac{236}{6368}} \approx 0'1925x^2 - 0'5710x - 0'3001$$

La función de ajuste:

$$Q(x) = \sum_{k=0}^2 c_k p_k(x) = c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + c_2 p_2(x)$$

Coeficientes de la función de ajuste:

$$c_0 = \sum_{i=0}^3 y_i p_0(x_i) = y_0 p_0(x_0) + y_1 p_0(x_1) + y_2 p_0(x_2) + y_3 p_0(x_3) = -1.1/2 + 1.1/2 + 2.1/2 + 1.1/2 = 3/2 = 1'5000$$

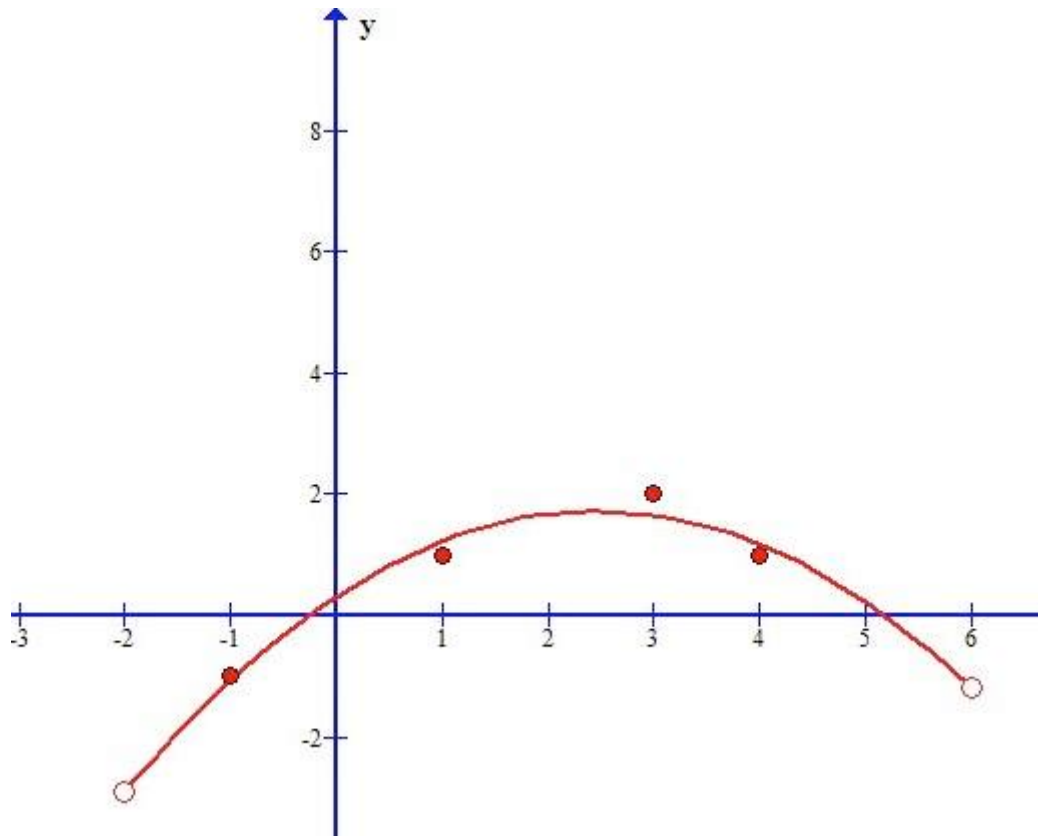
$$c_1 = \sum_{i=0}^3 y_i p_1(x_i) = y_0 p_1(x_0) + y_1 p_1(x_1) + y_2 p_1(x_2) + y_3 p_1(x_3) = -1.(0'2603.(-1) - 0'4556) + 1.(0'2603.1 - 0'4556) + 2.(0'2603.3 - 0'4556) + 1.(0'2603.4 - 0'4556) = 1'7538$$

$$c_2 = \sum_{i=0}^3 y_i p_2(x_i) = y_0 p_2(x_0) + y_1 p_2(x_1) + y_2 p_2(x_2) + y_3 p_2(x_3) = -1.(0'1925(-1)^2 - 0'5710(-1) - 0'3001) + 1.(0'1925.1^2 - 0'5710.1 - 0'3001) + 2.(0'1925.3^2 - 0'5710.3 - 0'3001) + 1.(0'1925.4^2 - 0'5710.4 - 0'3001) = -1'2073$$

Resultando para la función de ajuste:

$$\begin{aligned} Q(x) &= \sum_{k=0}^2 c_k p_k(x) = c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + c_2 p_2(x) = 1'5000.p_0(x) + \\ &+ 1'7538.p_1(x) - 1'2073.p_2(x) = 1'5000.1/2 + 1'7538.(0'2603.x - 0'4556) - \\ &- 1'2073.(0'1925x^2 - 0'5710x - 0'3001) = \\ &= [0'7500 + 1'7538.(-0'4556) + (-1'2073).(-0'3001)] + \\ &+ [1'7538.0'2603 + (-1'2073)(-0'5710)].x + [(-1'2073)(0'1925)].x^2 = \\ &= 0'3132 + 1,1458x - 0'2324x^2 \end{aligned}$$

Imagen gráfica:



$$Q(x) = 0'3132 + 1,1458x - 0'2324x^2$$

2.4. La medida de la aproximación en el ajuste con polinomios ortogonales:

El ajuste es tanto más aproximado a la función que definen los puntos del soporte cuanto menor es la norma euclidiana del vector de errores. La determinación, pues, de dicha norma nos permite saber el grado de aproximación del ajuste realizado:

$$\begin{aligned} |e|^2 &= \sum_{i=0}^n e_i^2 = \sum_{i=0}^n (y_i - \sum_{j=0}^m c_j p_j(x_i))^2 = \sum_{i=0}^n y_i^2 - 2 \sum_{i=0}^n y_i \sum_{j=0}^m c_j p_j(x_i) + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m c_j c_k p_j(x_i) p_k(x_i) = \\ &= \sum_{i=0}^n y_i^2 - 2 \sum_{j=0}^m c_j \sum_{i=0}^n y_i p_j(x_i) + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m c_j^2 = \sum_{i=0}^n y_i^2 - 2 \sum_{i=0}^m c_i^2 + \sum_{i=0}^m c_i^2 = \sum_{i=0}^n y_i^2 - \sum_{i=0}^m c_i^2 \end{aligned}$$

En definitiva:

$$|e|^2 = \sum_{i=0}^n y_i^2 - \sum_{i=0}^m c_i^2$$

3. Ajuste con Funciones Ortogonales en un intervalo

Consideramos aquí el ajuste de una función en un intervalo cerrado como soporte, utilizando como base del ajuste un conjunto de funciones que sean ortonormales en dicho intervalo y determinaremos los coeficientes del polinomio generalizado del ajuste minimizando, como en el caso anterior, la norma euclidiana del vector de errores.

3.1. Las funciones ortogonales en un intervalo:

El proceso de ajuste con polinomios ortogonales puede extenderse de forma natural a un conjunto de funciones que sean ortogonales u ortonormales en un intervalo cerrado.

Sea el conjunto de funciones reales de una variable real

$$\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)\}$$

tales que en el intervalo $[a, b]$ se verifica que

$$\int_a^b \varphi_j(x) \varphi_k(x) \cdot dx = \delta_{jk} \cdot h \equiv \begin{cases} 0, & \text{si } j \neq k \\ h, & \text{si } j = k \end{cases}$$

diremos que se trata de un conjunto de funciones ortogonales en el intervalo cerrado $[a, b]$. Si $h=1$ tales funciones se dicen ortonormales en dicho intervalo.

3.2. Ajuste:

Si aproximamos en el intervalo $[a, b]$ la función $y = f(x)$ por una combinación

lineal $\sum_{j=0}^m c_j \cdot \varphi_j(x)$ de funciones ortonormales, se tiene que si es $e(x) = y - \sum_{j=0}^m c_j \cdot \varphi_j(x)$

el error cometido en cada punto x del intervalo $[a, b]$ del ajuste, la norma euclidiana del vector de errores vendrá dada por

$$|e|^2 = \int_a^b e(x)^2 \cdot dx = \int_a^b \left(y - \sum_{j=0}^m c_j \cdot \varphi_j(x) \right)^2 \cdot dx$$

e imponiendo la condición de mínimo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial c_k} |e|^2 &= \frac{\partial}{\partial c_k} \int_a^b \left(y - \sum_{j=0}^m c_j \cdot \varphi_j(x) \right)^2 \cdot dx = \int_a^b 2 \left(y - \sum_{j=0}^m c_j \cdot \varphi_j(x) \right) \cdot \frac{\partial}{\partial c_k} \left(y - \sum_{j=0}^m c_j \cdot \varphi_j(x) \right) \cdot dx = \\ &= \int_a^b -2 \left(y - \sum_{j=0}^m c_j \cdot \varphi_j(x) \right) \cdot \varphi_k(x) \cdot dx = 2 \int_a^b \sum_{j=0}^m c_j \cdot \varphi_j(x) \cdot \varphi_k(x) \cdot dx - 2 \int_a^b y \cdot \varphi_k(x) \cdot dx = 0 \end{aligned}$$

por tanto

$$\sum_{j=0}^m c_j \int_a^b \varphi_j(x) \varphi_k(x) \cdot dx - \int_a^b y \cdot \varphi_k(x) \cdot dx = 0 \rightarrow c_k - \int_a^b y \cdot \varphi_k(x) \cdot dx = 0 \rightarrow c_k = \int_a^b y \cdot \varphi_k(x) \cdot dx$$

[3.2_1]

resultando, para la función de ajuste:

$$p(x) = \sum_{k=0}^m c_k \varphi_k(x) = \sum_{k=0}^m \left(\int_a^b y \cdot \varphi_k(x) \cdot dx \right) \varphi_k(x)$$

3.3. Medida de la aproximación:

Para establecer la medida de la aproximación en el ajuste, determinamos la norma euclidiana del vector de errores. Cuanto menor sea tal norma, menor será el error cometido en el proceso de ajuste:

$$\begin{aligned}
|e|^2 &= \int_a^b \left(y - \sum_{j=0}^m c_j \cdot \varphi_j(x) \right)^2 dx = \int_a^b \left(y^2 - 2y \sum_{j=0}^m c_j \cdot \varphi_j(x) + \sum_{j=0}^m c_j \cdot c_k \varphi_j(x) \varphi_k(x) \right) dx = \\
&= \int_a^b y^2 dx - 2 \int_a^b y \sum_{j=0}^m c_j \cdot \varphi_j(x) dx + \sum_{j=0}^m c_j \cdot c_k \int_a^b \varphi_j(x) \varphi_k(x) dx = \\
&= \int_a^b y^2 dx - 2 \sum_{j=0}^m c_j \cdot \int_a^b y \varphi_j(x) dx + \sum_{j=0}^m c_j \cdot c_k \int_a^b \varphi_j(x) \varphi_k(x) dx = \int_a^b y^2 dx - 2 \sum_{j=0}^m c_j^2 + \sum_{j=0}^m c_j^2 = \int_a^b y^2 dx - \sum_{j=0}^m c_j^2
\end{aligned}$$

por tanto:

$$|e|^2 = \int_a^b y^2 dx - \sum_{j=0}^m c_j^2$$

3.4. El ejemplo de las funciones trigonométricas:

3.4.1. La ortogonalidad de las funciones trigonométricas en $[0, 2\pi]$:

Sea el conjunto de funciones trigonométricas:

$$\{\cos kx, \sin kx\}_{k=0}^{k=m} = \{\cos 0, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos mx, \sin 0, \sin x, \sin 2x, \dots, \sin mx\}$$

y veamos que son ortogonales en el intervalo $[0, 2\pi]$:

- el producto de cosenos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos jx \cdot \cos kx dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos(j-k)x + \cos(j+k)x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(j-k)x dx + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(j+k)x dx = \\
&= \frac{1}{2(j-k)} \sin(j-k)x \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2(j+k)} \sin(j+k)x \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2(j-k)} (0-0) + \frac{1}{2(j+k)} (0-0) = 0 \\
\int_0^{2\pi} \cos^2 jx dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2jx) dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} dx + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2jx dx = \frac{1}{2} (2\pi - 0) + \frac{1}{4j} (\cos(2j \cdot 2\pi) - \cos 0) = \\
&= \pi + 0 = \pi
\end{aligned}$$

por tanto es

$$\int_0^{2\pi} \cos jx \cdot \cos kx dx = \pi \delta_{jk} = \begin{cases} 0, & \text{si } j \neq k \\ \pi, & \text{si } j = k \end{cases}$$

- el producto de senos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin jx \cdot \sin kx dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos(j-k)x - \cos(j+k)x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(j-k)x dx - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(j+k)x dx = \\
&= \frac{1}{2(j-k)} \sin(j-k)x \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2(j+k)} \sin(j+k)x \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2(j-k)} (0-0) + \frac{1}{2(j+k)} (0-0) = 0 \\
\int_0^{2\pi} \sin^2 jx dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2jx) dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} dx - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2jx dx = \frac{1}{2} (2\pi - 0) - \frac{1}{4j} (\cos(2j \cdot 2\pi) - \cos 0) = \\
&= \pi - \frac{1}{4j} (1-1) = \pi
\end{aligned}$$

por tanto, se cumple también que

$$\int_0^{2\pi} \text{sen} jx \cdot \text{sen} kx \cdot dx = \pi \delta_{jk} = \begin{cases} 0, & \text{si } j \neq k \\ \pi, & \text{si } j = k \end{cases}$$

- producto de seno por coseno:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \text{sen} jx \cdot \cos kx \cdot dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\text{sen}(j+k)x + \text{sen}(j-k)x) \cdot dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \text{sen}(j+k)x \cdot dx + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \text{sen}(j-k)x \cdot dx = \\ &= \frac{-1}{2(j+k)} \cos(j+k)x \Big|_0^{2\pi} + \frac{-1}{2(j-k)} \cos(j-k)x \Big|_0^{2\pi} = \frac{-1}{2(j+k)} (1-1) + \frac{-1}{2(j-k)} (1-1) = 0 \end{aligned}$$

en definitiva es

$$\int_0^{2\pi} \text{sen} jx \cdot \cos kx \cdot dx = 0$$

así, pues, veamos como realizar el ajuste con un conjunto de estas funciones en el intervalo de ortogonalidad.

3.4.2. Ajuste:

Aproximemos en el intervalo $[0, 2\pi]$ la función $y = f(x)$ por una combinación lineal, $\sum_{k=0}^m (a_k \cos kx + b_k \text{sen} kx)$, de estas funciones ortogonales. Se tiene, repitiendo el proceso descrito en el apartado 3.2:

$$|e|^2 = \int_0^{2\pi} \left(y - \sum_{j=0}^m (a_j \cos jx + b_j \text{sen} jx) \right)^2 \cdot dx$$

Derivamos primero respecto a los coeficientes a_k :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_k} |e|^2 &= \frac{\partial}{\partial a_k} \int_0^{2\pi} \left(y - \sum_{j=0}^m (a_j \cos jx + b_j \text{sen} jx) \right)^2 \cdot dx = \\ &= \int_0^{2\pi} 2 \left(y - \sum_{j=0}^m (a_j \cos jx + b_j \text{sen} jx) \right) \cdot \frac{\partial}{\partial a_k} \left(y - \sum_{j=0}^m (a_j \cos jx + b_j \text{sen} jx) \right) \cdot dx = \\ &= \int_0^{2\pi} -2 \left(y - \sum_{j=0}^m (a_j \cos jx + b_j \text{sen} jx) \right) \cdot \cos kx \cdot dx = \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \sum_{j=0}^m (a_j \cos jx + b_j \text{sen} jx) \cdot \cos kx \cdot dx - 2 \int_0^{2\pi} y \cdot \cos kx \cdot dx = 0 \end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m a_j \int_0^{2\pi} \cos jx \cdot \cos kx \cdot dx + \sum_{j=0}^m b_j \int_0^{2\pi} \text{sen} jx \cdot \cos kx \cdot dx - 2 \int_0^{2\pi} y \cdot \cos kx \cdot dx &= 0 \rightarrow \\ \rightarrow \pi a_k - \int_0^{2\pi} y \cdot \cos kx \cdot dx &= 0 \rightarrow a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \cdot \cos kx \cdot dx \end{aligned}$$

derivamos ahora con respecto a los coeficientes b_k :

$$\frac{\partial}{\partial b_k} |e|^2 = \frac{\partial}{\partial b_k} \int_0^{2\pi} \left(y - \sum_{j=0}^m (a_j \cos jx + b_j \text{sen} jx) \right)^2 \cdot dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} 2 \left(y - \sum_{j=0}^m (a_j \cos jx + b_j \sin jx) \right) \cdot \frac{\partial}{\partial b_k} \left(y - \sum_{j=0}^m (a_j \cos jx + b_j \sin jx) \right) dx = \\
&= \int_0^{2\pi} -2 \left(y - \sum_{j=0}^m (a_j \cos jx + b_j \sin jx) \right) \sin kx dx = \\
&= 2 \int_0^{2\pi} \sum_{j=0}^m (a_j \cos jx + b_j \sin jx) \sin kx dx - 2 \int_0^{2\pi} y \sin kx dx = 0 \\
&\sum_{j=0}^m a_j \int_0^{2\pi} \cos jx \sin kx dx + \sum_{j=0}^m b_j \int_0^{2\pi} \sin jx \sin kx dx - 2 \int_0^{2\pi} y \sin kx dx = 0 \rightarrow \\
&\rightarrow \pi b_k - \int_0^{2\pi} y \sin kx dx = 0 \rightarrow b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \sin kx dx
\end{aligned}$$

En definitiva, los coeficientes de la función de ajuste son

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k = 0, 1, \dots, m$$

Con lo que la podemos expresar la función de ajuste en la forma:

$$Q(x) = \sum_{k=0}^m \left(\left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx \right) \cos kx + \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx \right) \sin kx \right)$$

3.4.3. Medida de la aproximación:

Como en los apartados anteriores, determinaremos también aquí la norma euclidiana del vector de errores.

$$\begin{aligned}
|e|^2 &= \int_0^{2\pi} \left(y - \sum_{k=0}^m (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right)^2 dx = \\
&= \int_0^{2\pi} \left(y^2 - 2y \sum_{k=0}^m (a_k \cos kx + b_k \sin kx) + \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^m (a_k \cos kx + b_k \sin kx)(a_j \cos jx + b_j \sin jx) \right) dx = \\
&= \int_0^{2\pi} y^2 dx - 2 \sum_{k=0}^m \int_0^{2\pi} y (a_k \cos kx + b_k \sin kx) dx + \sum_{k=0}^m a_k a_j \int_0^{2\pi} \cos kx \cos jx dx + \\
&+ \sum_{k=0}^m b_k b_j \int_0^{2\pi} \sin kx \sin jx dx + \sum_{k=0}^m a_k b_j \int_0^{2\pi} \cos kx \sin jx dx + \sum_{k=0}^m b_k a_j \int_0^{2\pi} \sin kx \cos jx dx = \\
&= \int_0^{2\pi} y^2 dx - 2 \sum_{k=0}^m a_k \int_0^{2\pi} y \cos kx dx - 2 \sum_{k=0}^m b_k \int_0^{2\pi} y \sin kx dx + \sum_{k=0}^m a_k a_j \pi \delta_{kj} + \sum_{k=0}^m b_k b_j \pi \delta_{kj} + \\
&+ \sum_{k=0}^m a_k b_j \cdot 0 + \sum_{k=0}^m b_k a_j \cdot 0 = \int_0^{2\pi} y^2 dx - 2\pi \sum_{k=0}^m a_k^2 - 2\pi \sum_{k=0}^m b_k^2 + \pi \sum_{k=0}^m a_k^2 + \pi \sum_{k=0}^m b_k^2 = \\
&= \int_0^{2\pi} y^2 dx - \pi \sum_{k=0}^m a_k^2 - \pi \sum_{k=0}^m b_k^2 = \int_0^{2\pi} y^2 dx - \pi \left(\sum_{k=0}^m a_k^2 + \sum_{k=0}^m b_k^2 \right)
\end{aligned}$$

En definitiva:

$$|e|^2 = \int_0^{2\pi} f(x)^2 \cdot dx - \pi \left(\sum_{k=0}^m a_k^2 + \sum_{k=0}^m b_k^2 \right)$$

4. Ajuste con Polinomios de Tchebycheff

Utilizando como base de ajuste el conjunto de n polinomios de Tchebycheff, desde el orden 0 al orden $n-1$, estudiamos el ajuste de una función $f(x)$ definida en el intervalo cerrado $[-1,1]$ por una parte, y por otra también en el conjunto discreto de los puntos de dicho intervalo que son raíces del polinomio de Tchebycheff de orden n .

4.1. Los polinomios de Tchebycheff:

Se trata de los polinomios descubiertos por el matemático ruso Pafnuti Lvóvich Chebycheff (1821-1894), que pueden definirse por

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

y podemos comprobar que son soluciones de la ecuación diferencial de segundo orden

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$$

ya que haciendo $\theta = \arccos x \rightarrow x = \cos \theta$ será $T_n(x) = \cos n\theta$, $dT_n(x) = -n \operatorname{senn} \theta \cdot d\theta$,

con $dx = -\operatorname{sen} \theta \cdot d\theta \rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{-1}{\operatorname{sen} \theta}$ y si llamamos $y = T_n(x)$ será

$$y' = \frac{d}{dx} T_n(x) = -n \operatorname{senn} \theta \frac{d\theta}{dx} = \frac{n \operatorname{senn} \theta}{\operatorname{sen} \theta}$$

resultando para la derivada segunda:

$$y'' = \frac{n^2 \cos n\theta \cdot \operatorname{sen} \theta - \cos \theta \operatorname{senn} \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} \frac{d\theta}{dx} = \frac{-n^2 \cos n\theta + n \operatorname{senn} \theta \cot \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta}$$

con lo que al deshacer cambios quedará:

$$y'' = \frac{-n^2 y}{1-x^2} + \frac{xy'}{1-x^2}, \text{ o sea, } (1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$$

Determinación de todos los polinomios:

Los polinomios de Tchebycheff se pueden determinar fácilmente desde expresiones simples de recurrencia. Así, llamando $\theta = \arccos x$, se tiene:

$$T_{-n}(x) = \cos(-n\theta) = \cos(n\theta) = T_n(x)$$

$$\left. \begin{aligned} T_{m+n}(x) &= \cos(m+n)\theta \\ T_{m-n}(x) &= \cos(m-n)\theta \end{aligned} \right\} \rightarrow T_{m+n}(x) + T_{m-n}(x) = \cos(m+n)\theta + \cos(m-n)\theta =$$

$$= 2\cos m\theta \cos n\theta = 2T_m(x).T_n(x) \rightarrow T_{m+n}(x) + T_{m-n}(x) = 2T_m(x).T_n(x)$$

Y para $n=1$: $T_{m+1}(x) + T_{m-1}(x) = 2T_m(x).T_1(x)$, de donde

$$T_{m+1}(x) = 2T_m(x).T_1(x) - T_{m-1}(x)$$

Expresión recurrente que permite determinar ya todos los polinomios:

$$T_0(x) = \cos(0.\arccos x) = \cos 0 = 1$$

$$T_1(x) = \cos(1.\arccos x) = \cos(\arccos x) = x$$

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 2x(4x^3 - 3x) - 2x^2 + 1 = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

... ..

... ..

Raíces:

Las n raíces del polinomio $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ son los n puntos pertenecientes al

intervalo $[-1,1]$ dados por $x_j = \cos\left(\frac{2j+1}{2n}\pi\right)$, $j = 0,1,2,\dots,n-1$

En efecto:

$$T_n(x_j) = \cos(n \arccos x_j) = \cos\left(n \cdot \arccos\left(\cos\left(\frac{2j+1}{2n}\pi\right)\right)\right) = \cos\left(n\left(\frac{2j+1}{2n}\pi\right)\right) = \cos\left((2j+1)\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

(ya que $(2j+1)\frac{\pi}{2}$ es un número impar de veces el primer cuadrante, es decir, es un número impar de veces 90° , y tiene, por tanto, coseno nulo).

4.2.Ortogonalidad en un intervalo cerrado:

Resultan ser ortogonales en el intervalo $[-1,1]$ con función de peso $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ya que se verifica que

$$\int_{-1}^1 T_j(x).T_k(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ \pi/2 & \text{si } j = k \neq 0 \\ \pi & \text{si } j = k = 0 \end{cases}$$

en efecto:

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 T_j(x) \cdot T_k(x) \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-\pi}^0 \cos j\theta \cdot \cos k\theta \cdot (-d\theta) = \int_0^{\pi} \cos j\theta \cos k\theta \cdot d\theta = \\
& = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\cos(j+k)\theta + \cos(j-k)\theta] \cdot d\theta = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(j+k)\theta}{j+k} + \frac{\sin(j-k)\theta}{j-k} \right]_0^{\pi} \\
& \text{si } j \neq k: \int_{-1}^1 T_j(x) \cdot T_k(x) \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} (0+0) = 0 \\
& \text{si } j = k \neq 0: \int_{-1}^1 T_j^2(x) \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi} \cos^2 j\theta \cdot d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos 2j\theta) \cdot d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} d\theta + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos 2j\theta \cdot d\theta = \frac{1}{2} \theta \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2} \frac{\sin 2j\theta}{2j} \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} 0 = \frac{\pi}{2} \\
& \text{si } j = k = 0: \int_{-1}^1 T_0^2(x) \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi} d\theta = \theta \Big|_0^{\pi} = \pi
\end{aligned}$$

4.3. Ortogonalidad en un conjunto discreto de puntos del intervalo [-1,1]:

Veamos en este apartado que los polinomios de Tchebycheff hasta el orden $n-1$, $T_0(x), T_1(x), \dots, T_{n-1}(x)$, son ortogonales en el soporte discreto constituido por las raíces del polinomio de orden n , $T_n(x)$:

$$\begin{aligned}
x_j &= \cos\left(\frac{2j+1}{2n}\pi\right), \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-1 \\
\arccos x_j &= \frac{2j+1}{2n}\pi, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-1
\end{aligned}$$

Para probarlo nos apoyaremos en un teorema previo.

Teorema:

Sean z y n números naturales y sea $j=0, 1, \dots, n-1$. Si es $\phi = z\pi/2n$ y llamamos

$$\varphi(z) = \cos\left(z \frac{2j+1}{2n}\pi\right) = \cos(2j+1)\phi, \quad j = 0, 1, \dots, n-1$$

se verifica que

$$\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \cos(2j+1)\phi = \begin{cases} 0 & \text{si } z \neq 2kn \\ n \cdot (-1)^k & \text{si } z = 2kn \end{cases}$$

Demostración:

Como es

$$\cos\left(z \frac{2j+1}{2n}\pi\right) = \cos(2j+1)\phi = \text{real}\{e^{(2j+1)\phi i}\}$$

se tiene:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \cos\left(z \frac{2j+1}{2n}\pi\right) = \text{real} \sum_{j=0}^{n-1} e^{(2j+1)\phi i} = \text{real} \frac{e^{(2(n-1)+1)\phi i} \cdot e^{2\phi i} - e^{\phi i}}{e^{2\phi i} - 1} = \text{real} \left[e^{\phi i} \frac{e^{2n\phi i} - 1}{e^{2\phi i} - 1} \right]$$

Analicemos el denominador de la fracción:

- Si $e^{2\phi i} = 1$ entonces ha de ser $2\phi i = 2k\pi i$, o sea, $\phi = k\pi \rightarrow z\pi/2n = k\pi \rightarrow z = 2nk$, con lo que:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n-1} \cos\left(z \frac{2j+1}{2n} \pi\right) &= \text{real} \sum_{j=0}^{n-1} e^{(2j+1)\phi i} = \text{real} \sum_{j=0}^{n-1} (e^{2j\phi i} \cdot e^{\phi i}) = \text{real} \sum_{j=0}^{n-1} (e^{2jk\pi i} \cdot e^{k\pi i}) = \\ &= \text{real} \sum_{j=0}^{n-1} (1 \cdot (-1)^k) = n \cdot (-1)^k\end{aligned}$$

- Si $e^{2\phi i} \neq 1$ entonces $2\phi i \neq 2k\pi i$, o sea, $\phi \neq k\pi \rightarrow z\pi/2n \neq k\pi \rightarrow z \neq 2nk$, con lo cual tenemos dos alternativas:

a) que z sea impar: en este caso $2n\phi i = 2n \frac{z\pi}{2n} i = z\pi i \rightarrow e^{2n\phi i} = e^{z\pi i} = -1$, quedando:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n-1} \cos\left(z \frac{2j+1}{2n} \pi\right) &= \text{real} \left[e^{\phi i} \frac{1 - (-1)^z}{e^{2\phi i} - 1} \right] = -2 \cdot \text{real} \frac{e^{\phi i}}{e^{2\phi i} - 1} = -2 \cdot \text{real} \frac{e^{\phi i} (e^{-2\phi i} - 1)}{(e^{2\phi i} - 1)(e^{-2\phi i} - 1)} = \\ &= -2 \text{real} \frac{e^{-\phi i} - e^{\phi i}}{1 - e^{2\phi i} - e^{-2\phi i} + 1} = -2 \text{real} \frac{(\cos \phi - i \sin \phi) - (\cos \phi + i \sin \phi)}{2 - 2 \cos 2\phi} = -2 \text{real} \frac{-2i \sin \phi}{2 - 2 \cos 2\phi} = 0\end{aligned}$$

b) que z sea par: en este caso $2n\phi i = 2n \frac{z\pi}{2n} i = z\pi i \rightarrow e^{2n\phi i} = e^{z\pi i} = 1$, con lo cual:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \cos\left(z \frac{2j+1}{2n} \pi\right) = \text{real} \left[e^{\phi i} \frac{1 - 1}{e^{2\phi i} - 1} \right] = 0$$

Es decir, en los dos casos de la alternativa, el resultado es cero. Luego:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \cos(2j+1)\phi = \begin{cases} 0 & \text{si } z \neq 2kn \\ n \cdot (-1)^k & \text{si } z = 2kn \end{cases} \quad [4.3.1]$$

con lo que termina la demostración.

Veamos ahora la ortogonalidad, comprobando que en los puntos del soporte indicado es

$$\sum_{j=0}^{n-1} T_p(x_j) \cdot T_q(x_j) = \begin{cases} 0 & p \neq q \\ n/2 & p = q \neq 0 \\ n & p = q = 0 \end{cases}$$

en efecto:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n-1} T_p(x_j) \cdot T_q(x_j) &= \sum_{j=0}^{n-1} \cos(p \arccos x_j) \cdot \cos(q \arccos x_j) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} [\cos((p+q) \arccos x_j) + \cos((p-q) \arccos x_j)] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \left[\cos\left((p+q) \frac{2j+1}{2n} \pi\right) + \cos\left((p-q) \frac{2j+1}{2n} \pi\right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} [\cos(2j+1)\phi_{p+q} + \cos(2j+1)\phi_{p-q}] \quad [4.3.2]\end{aligned}$$

siendo $\phi_{p+q} = \frac{p+q}{2n} \pi$, $\phi_{p-q} = \frac{p-q}{2n} \pi$

Utilizamos el resultado [4.3.1]:

- Si $p \neq q$:

$$\left. \begin{array}{l} p+q \neq 2kn \\ p-q \neq 2kn \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \sum_{j=0}^{n-1} \cos(2j+1)\phi_{p+q} = 0 \\ \sum_{j=0}^{n-1} \cos(2j+1)\phi_{p-q} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \sum_0^{n-1} [\cos(2j+1)\phi_{p+q} + \cos(2j+1)\phi_{p-q}] = 0$$

por lo que en este caso es

$$\sum_{j=0}^{n-1} T_p(x_j) \cdot T_q(x_j) = 0$$

- Si $p = q \neq 0$:

$$\left. \begin{array}{l} p+q = 2p \neq 2kn \\ p-q = 0 = 2kn \text{ (con } k=0) \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \sum_{j=0}^{n-1} \cos(2j+1)\phi_{p+q} = 0 \\ \sum_{j=0}^{n-1} \cos(2j+1)\phi_{p-q} = (-1)^k \cdot n = (-1)^0 \cdot n = n \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \sum_0^{n-1} [\cos(2j+1)\phi_{p+q} + \cos(2j+1)\phi_{p-q}] = n/2$$

por lo que en este caso es

$$\sum_{j=0}^{n-1} T_p(x_j) \cdot T_q(x_j) = n/2$$

- Si $p = q = 0$:

$$\left. \begin{array}{l} p+q = 0 = 2kn \text{ (con } k=0) \\ p-q = 0 = 2kn \text{ (con } k=0) \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \sum_{j=0}^{n-1} \cos(2j+1)\phi_{p+q} = (-1)^k \cdot n = (-1)^0 \cdot n = n \\ \sum_{j=0}^{n-1} \cos(2j+1)\phi_{p-q} = (-1)^k \cdot n = (-1)^0 \cdot n = n \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \sum_0^{n-1} [\cos(2j+1)\phi_{p+q} + \cos(2j+1)\phi_{p-q}] = n$$

por lo que en este caso es

$$\sum_{j=0}^{n-1} T_p(x_j) \cdot T_q(x_j) = n$$

en definitiva:

$$\sum_{j=0}^{n-1} T_p(x_j) \cdot T_q(x_j) = \begin{cases} 0 & p \neq q \\ n/2 & p = q \neq 0 \\ n & p = q = 0 \end{cases}$$

4.4. Ajuste:

a) Ajustando en el intervalo $[-1,1]$ con función de peso $1/\sqrt{1-x^2}$:

Si se pretende ajustar la función $y = f(x)$, $\forall x \in [-1,1]$ mediante una combinación lineal de polinomios de Tchebycheff, se tiene para la función de ajuste:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k T_k(x)$$

donde hemos de elegir los coeficientes c_k de modo que sea mínimo el error que se cometa en el ajuste.

Consideremos el error cometido en cada punto del intervalo:

$$e(x) = y - p(x) = y - \sum_{j=0}^{n-1} c_j T_j(x)$$

y su cuadrado $e(x)^2 = \left(y - \sum_{j=0}^{n-1} c_j T_j(x) \right)^2$

La norma euclidiana del vector de errores, al cuadrado, es la suma de los cuadrados de los errores en todos los puntos del intervalo:

$$|e|^2 = \int_{-1}^1 e(x)^2 \cdot dx = \int_{-1}^1 \left(y - \sum_{j=0}^{n-1} c_j T_j(x) \right)^2 \cdot dx$$

Puesto que la norma euclidiana del vector de errores ha de ser mínima para los coeficientes de la función de ajuste construida, se tendrá:

$$\frac{\partial}{\partial c_k} |e|^2 = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial c_k} |e|^2 &= \frac{\partial}{\partial c_k} \int_{-1}^1 \left(y - \sum_{j=0}^{n-1} c_j T_j(x) \right)^2 \cdot dx = 2 \int_{-1}^1 \left(y - \sum_{j=0}^{n-1} c_j T_j(x) \right) \frac{\partial}{\partial c_k} \left(y - \sum_{j=0}^{n-1} c_j T_j(x) \right) \cdot dx = \\ &= 2 \int_{-1}^1 \left(y - \sum_{j=0}^{n-1} c_j T_j(x) \right) (-T_k(x)) \cdot dx = 2 \sum_{j=0}^{n-1} c_j \int_{-1}^1 T_j(x) T_k(x) \cdot dx - 2 \int_{-1}^1 y \cdot T_k(x) \cdot dx = 0 \end{aligned}$$

o bien:

$$\sum_{j=0}^{n-1} c_j \int_{-1}^1 T_j(x) T_k(x) \cdot dx = \int_{-1}^1 y \cdot T_k(x) \cdot dx$$

por lo que, salvo una constante aditiva, es

$$\sum_{j=0}^{n-1} c_j T_j(x) T_k(x) = y \cdot T_k(x)$$

pudiendo expresar, dividiendo por $\sqrt{1-x^2}$ ambos miembros:

$$\frac{\sum_{j=0}^{n-1} c_j T_j(x) T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{y_k T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

de lo cual, se tiene

$$\sum_{j=0}^{n-1} c_j \int_{-1}^1 \frac{T_j(x) T_k(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int_{-1}^1 \frac{y_k T_k(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

que, por la ortogonalidad de los polinomios de Tchebycheff, es:

$$c_k \frac{\pi}{2} - \int_{-1}^1 \frac{y_k T_k(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

por tanto:

$$c_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x) T_k(x) dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

en definitiva, la función de ajuste resulta ser:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x) T_k(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} \right) T_k(x)$$

b) Ajustando sobre las raíces del polinomio $T_n(x)$:

Si se pretende ajustar la función $f(x)$ mediante una combinación lineal de n polinomios de Tchebycheff, $T_0(x), \dots, T_{n-1}(x)$, sobre el soporte dado por las raíces del polinomio $T_n(x)$, se tiene para la función de ajuste:

$$p(x) = \sum_{h=0}^{n-1} c_h T_h(x)$$

obteniéndose los coeficientes minimizando la norma euclidiana, como en el caso anterior. El error en cada punto (x_k, y_k) del soporte es

$$e_k = y_k - p(x_k) = y_k - \sum_{j=0}^{n-1} c_j T_j(x_k) \rightarrow e_k^2 = \left(y_k - \sum_{j=0}^{n-1} c_j T_j(x_k) \right)^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial c_h} |e|^2 &= \frac{\partial}{\partial c_h} \sum_{k=0}^{n-1} e_k^2 = \frac{\partial}{\partial c_h} \sum_{k=0}^{n-1} \left(y_k - \sum_{j=0}^{n-1} c_j T_j(x_k) \right)^2 = 2 \sum_{k=0}^{n-1} \left(y_k - \sum_{j=0}^{n-1} c_j T_j(x_k) \right) \frac{\partial}{\partial c_h} \left(y_k - \sum_{j=0}^{n-1} c_j T_j(x_k) \right) = \\ &= 2 \sum_{k=0}^{n-1} \left(y_k - \sum_{j=0}^{n-1} c_j T_j(x_k) \right) (-T_h(x_k)) = 2 \sum_{j=0}^{n-1} c_j \sum_{k=0}^{n-1} T_j(x_k) T_h(x_k) - 2 \sum_{k=0}^{n-1} y_k T_h(x_k) = 2 \cdot \frac{n}{2} c_h = 2 \sum_{k=0}^{n-1} y_k T_h(x_k) \rightarrow \end{aligned}$$

$$\rightarrow c_h = \frac{1}{n/2} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) T_h(x_k)$$

De ser

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n} \pi\right) \rightarrow T_h(x_k) = \cos\left(h \arccos(x_k)\right) = \cos\left(h \arccos\left(\cos\left(\frac{2k+1}{2n} \pi\right)\right)\right) =$$

$$= \cos\left(h \frac{2k+1}{2n} \pi\right)$$

o sea:

$$c_h = \frac{1}{n/2} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \cdot T_h(x_k) = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \cdot \cos \frac{2k+1}{2n} h\pi, \quad h = 0, 1, \dots, n-1$$

Función de ajuste:

$$p(x) = \sum_{h=0}^{n-1} \left(\frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \cdot \cos \frac{2k+1}{2n} h\pi \right) T_h(x)$$

Se observa que cada coeficiente $c_h, h = 0, 1, \dots, n-1$, depende de n . No se puede sumar otro término al desarrollo que constituye la función de ajuste para ser mejorado. Todos los coeficientes cambian si alteramos el grado n .

5. Bibliografía

- Aparicio del Prado, C.; Payá Albert, R.** "Análisis Matemático I", Universidad de Granada, 1991.
- Apóstol, T.M.** "Calculus", Editorial Reverté, Barcelona, 1970.
- Arnaiz Vellando, G.** "Introducción a la Estadística Teórica", Lex Nova. 1986.
- Cheney, E. W.** "Introduction to Approximation Theory", Mc Graw Hill, 1982.
- Conte, S.D.; Boor, C.** "Análisis Numérico", McGraw Hill, 1974.
- Fernández de Troconiz, A.; Belda Villena, E.** "Análisis Algebraico", Editorial Vizcaina de Bilbao, Bilbao, 1961.
- Fernández Viñas, J.A.** "Lecciones de Análisis Matemático", Editorial Tecnos, 1976.
- Fröberg, C.E.** "Introduction to Numerical Analysis", Addison Wesley, 1970.
- Gerber, H.U.** "Life insurance mathematics", Springer, Swiss Association of Actuaries, Zurich, 1997.
- Greene, W.H.** "Análisis econométrico", McMillan P.C, 1998.
- Henrici, P.** "Elements of Numerical Analysis", John Wiley, N. York, 1964
- Isaacson, E.; Séller, H.** "Análisis of Numerical Methods", John Wiley, 1966.
- Peña Sánchez de Rivera, D.** "Estadística Modelos y métodos: 2. Modelos lineales y series temporales", Alianza Universidad Textos, Alianza Editorial, 1987.
- Rey Pator, Y., Calleja, P., Trejo, C.** "Análisis Matemático", Editorial Kapeluz, Buenos Aires, 1957.
- Scheid, F.** "Análisis numérico", Mc Graw-Hill, Madrid, 1972
- Spivak, M.** "Calculus (Calculo infinitesimal)", Editorial Reverté, 1994.

Los gráficos que se muestran en los ejemplos de los apartados 1.4 y 2.3 han sido contruidos con el programa gratuito **Graph (Plotting Mathematical Functions)**, versión 4.4.2, Compilación 543, para Windows. Puede descargarse en www.padowan.dk, distribuido bajo Licencia Pública General de GNU.