Replanteamiento de la Conjetura de Goldbach.

Mario Peral Manzo
Universidad Pedagógica Nacional,
Unidad 152,Atizapán

Resumen

En este ensayo se propone el uso de una razón que permite determinar la secuencia de las series cuyas sumas son cuadrados perfectos; estas soluciones las usamos posteriormente para determinar algunos primos de la forma $4n + 1$, descubrimos una nueva razón que relaciona la constante pi y un número primo de diez cifras de la forma $4n + 1$. Más adelante describimos la relación de esta clase de números primos con los llamados primos gemelos, lo que nos permite replantear la Conjetura Binaria de Goldbach en términos de una igualdad que involucra exclusivamente las clases de números primos que nos ocupan.

Palabras clave: Conjetura, primos gemelos, secuencia, serie, primos de Fermat, algoritmo.

1. Introducción.

Importancia de la divulgación de este texto: como sabemos, los números primos (aquellos enteros positivos que solamente obtienen soluciones enteras cuando se les divide por sí mismo o por la unidad) son considerados "la caja fuerte de la información". Producirlos, reconocerlos y utilizarlos supone, además de un considerable gasto de dinero, una ardua tarea que requiere de amplios y profundos conocimientos matemáticos.

En un escenario internacional en el que la producción, intercambio y consumo de información para su transformación en conocimiento, el tema que proponemos resulta ser relevante para la seguridad nacional y para la generación de confianza en los sectores productivos. Es vital, pues, dominar el arte de la producción, gestión y negociación de la información y el conocimiento. En este mismo escenario cobra una mayor relevancia la formación de los jóvenes matemáticos en estos temas de la investigación pura.

Este escrito pretende despertar el interés de manera particular en el conjunto de los llamados primos gemelos que, por sus características propias, pueden ser decisivos, en vista de la posible demostración de su infinitud, en la generación de mejores algoritmos para la creación de sistemas de encriptación más seguros.

El objetivo de este escrito es el de presentar el bosquejo de un algoritmo para determinar la posición de parejas de números primos cuando se dan como resultado de la descomposición de números pares en combinaciones de dos sumandos; de tal suerte que nos permita ubicar de manera particular números primos gemelos (aquellos números primos que tienen como diferencia solo dos unidades). Esto nos facilitará el establecimiento de una relación directa entre los números primos gemelos y los llamados números primos de Fermat (que son resultado de sumar dos cuadrados perfectos), relación que nos remite a un replanteamiento de la Conjetura Binaria de Goldbach que, como sabemos, fue propuesta en 1742 por el "matemático aficionado" Christian Goldbach al genio Matemático Leonhard Euler [1]. Esta conjetura afirma que "todo número par mayor que 2 puede escribirse como suma de dos números primo" [2].

Nuestro replanteamiento de la Conjetura de Goldbach debe iniciar por un acercamiento a un sencillo problema relacionado con el tema de los llamados "cuadrados perfectos" (sería bueno tener papel y lápiz a la mano).

2. Los cuadrados perfectos

Un cuadrado perfecto es un número cuya raíz cuadrada es un número entero [3].

Determinar cuadrados perfectos en la sucesión normal del conjunto de los números naturales (1,2,3... N+1...) [4] dadas unas instrucciones determinadas, generan una serie de reflexiones que permiten aplicar conocimientos matemáticos (en nuestro escrito, relacionados con las secuencias y las series numéricas) a los sujetos que asumen el reto.

"Una secuencia es una lista o conjunto ordenado de números.(...) Es importante que especifiquemos que los números están en un orden determinado, ya que es este orden preciso lo que define la secuencia y le proporciona características significativas.(...) Por otra parte, una serie numérica es la suma de un conjunto de números [5].

En primer término, se trata de una actividad lúdica y, en segundo, de un reto.

Intentemos, primero, un planteamiento más o menos claro de este reto, nuestra pregunta sería:

¿Cuáles son las series asociadas a la progresión del conjunto de los números naturales que dan por resultados sumas que representan cuadrados perfectos?

De una manera intuitiva: supongamos que cubrimos una superficie con "cadenas" de unidades cuadradas; comenzamos desde una unidad cuadrada (nuestro primer cuadrado perfecto al centro), siguiendo con una "cadena de dos unidades", tres, cuatro... en fin, siempre agregando una cadena que progrese un cuadrado por vez y del siguiente modo (Figura 1, hay que fijarse en el sentido que indican las flechas):

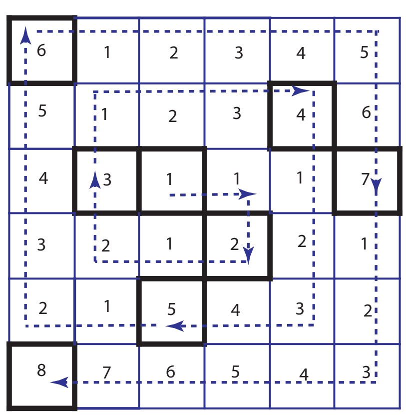

Figura 1: Superficie con cadenas de unidades cuadradas.

... así, en espiral, hasta formar el segundo cuadrado perfecto, en este caso el de seis por seis. Como vemos, este cuadrado perfecto se ha terminado de formar con la "cadena" que va del 1 al 8. Así, las "cadenas" que conforman a este cuadrado son:

(1); (1_2); (1_2_3); (1_2_3_4); (1_2_3_4_5_6); (1_2_3_4_5_6_7) y (1_2_3_4_5_6_7_8) (Aunque sueñe extraño, decimos que (1) es una "cadena" formada por un solo "eslabón").

La suma de los valores de la última "cadena" sería el número de unidades cuadradas que contiene el cuadrado perfecto en cuestión (el "área", por decirlo así).

De manera formal, se representaría mediante la serie:

$$\sum_{n=1}^{8} n = A = 1+2+3+4+5+6+7+8 = 36$$

En donde $\sqrt{A} = 6$ (este valor es la medida de cada uno de los lados del cuadrado que formamos).

Entonces, ¿cuál es la siguiente serie que formará el sucesivo cuadrado perfecto?

3. Antecedentes del reto

Originalmente este reto lo habíamos propuesto a Miguel Guzmán para su publicación en la revista electrónica española llamada *Gacetilla Matemática*. El problema se envió como un "concentrado" que tendría que completarse y con la petición de que los posibles resolutores sugirieran un enunciado adecuado para el mismo.

La presentación que dio Miguel Guzmán es la siguiente (Figura 2):

"Se considera el conjunto {1, 6, 35, 204, 1189, X} en el que, por ejemplo, el 6 se ha obtenido al sumar los 8 primeros números naturales y extraer la raíz cuadrada de dicho resultado, el 35 al sumar los primeros 49 números naturales y extraer su raíz cuadrada, etc., según el siguiente cuadro[6]

n	Suma (n)	$\sqrt{suma}$
1	1	1
8	36	6
49	1225	35
288	41616	204
1681	1413721	1189
¿___?	¿___?	¿ X ?

Figura 2: Cuadro de concentración de resultados.

A este llamado acudieron dos matemáticos: Ignacio Larrosa y Francisco de León-Sotelo. Ambos solucionaron el problema cuyo proceso puede consultarse en la *Gacetilla Matemática.* Resaltamos que los dos mamáticos coincidieron en el recurso de la ecuación de Pell (“Estamos hablando de la ecuación cuadrática indeterminada $Nx^2 + 1 = y^2$ que también puede escribirse como $y^2 - nx^2 = 1$, donde n es un entero dado y estamos buscando soluciones enteras (x, y) [7]

Nosotros, en cambio, habíamos pensado que el reto se hubiese asumido a través de la búsqueda de las diferencias relativas existentes entre los valores obtenidos para “X” en ese cuadro, con el fin de, primero, determinar las dimensiones del cuadrado perfecto (digamos su raíz cuadrada: $X = \sqrt{A}$)

Para determinar $\sqrt{A}$ pensamos en: $X_{n+1} \approx X_n(1 + \sqrt{2})^2$

Así, la raíz cuadrada del primer cuadrado perfecto sería 1. O bien: $\sqrt{1} = 1$, a partir de la raíz cuadrada del segundo cuadrado perfecto, vemos:

- $1(1 + \sqrt{2})^2 = 5{,}828427 \approx 6$ que, al elevar al cuadrado nos resulta <u>36</u>, el segundo cuadrado perfecto.

- $6(1 + \sqrt{2})^2 = 34{,}970562 \approx 35$ cuyo cuadrado es <u>1225</u>, el tercer cuadrado perfecto.

- $35(1 + \sqrt{2})^2 = 203{,}994949 \approx 204$ cuyo cuadrado es <u>41616</u>, cuarto cuadrado perfecto.

- $204(1 + \sqrt{2})^2 = 1188{,}999133 \approx 1189$ cuyo cuadrado es <u>1413721</u>, quinto cuadrado perfecto.

- $1189(1 + \sqrt{2})^2 = 6929{,}999851 \approx 6930$ cuyo cuadrado es <u>48024900</u>, el sexto cuadrado perfecto.

  (...)

En fin... la secuencia de las primeras seis series que dan solución a los requerimientos del problema son:

$$A = \left\{ \sum_{n=1}^{1} n, \sum_{n=1}^{8} n, \sum_{n=1}^{49} n, \sum_{n=1}^{288} n, \sum_{n=1}^{1681} n, \sum_{n=1}^{9800} n \right\}$$

O bien:

$A = \{1, 36, 1225, 41616, 1413721, 48024900...\}$ Podemos ver con qué rapidez crece esta secuencia.

Observamos que el recurso de la constante $(1 + \sqrt{2})^2$ nos aproxima de manera progresiva a la raíz cuadrada exacta conforme las variables van aumentando su valor; es decir, sus resultados son cada vez “más exactos” (por aproximación decimal) conforme aumenta el valor de la raíz cuadrada perfecta determinada.

4. Algunas curiosidades y el nacimiento de otra constante.

Las sumas de estos valores (aunque no en todas las combinaciones) arrojan como resultado números primos; veamos:

$1 + 36 = 37$, primo; $1225 + 41616 = 42841$, primo; $1 + 41616 = 41617$, primo; $1 + 48024900 = 48024901$, primo. Pero, como puede observarse, éstos son primos de la forma $4n+1$. Recordemos el teorema de Fermat acerca de los dos cuadrados (todo número primo de la forma $4n + 1$ se puede escribir de forma única como suma de dos cuadrados perfectos).

Curiosamente el valor de la constante $(1 + \sqrt{2})^2$ se relaciona con la constante π, de este modo:

$$\begin{aligned}
(1 + \sqrt{2})^2 &\approx (3(5^2(11(19(71(1667))))))\pi/10^9 \\
&\approx \quad 1855245975(\pi)/10^9 \\
&\approx 5{,}828427124746190097603377448419 4
\end{aligned}$$

Pero; ¿qué de particular tiene todo esto? Es decir (perdón por el estilo retórico) ¿en dónde radica su belleza, su originalidad o la novedad de este procedimiento? Aparte su evidente utilidad para determinar las series de la secuencia que nos ocupa, ¿en qué más es útil?

Establezcamos las siguientes comparaciones entre nuestra constante,

$(1 + \sqrt{2})^2$ que representaremos con la letra ξ ; la llamada proporción áurea [8]

$(\sqrt{5} - 1)/2$ es decir, su parte decimal, simbolizada por ϕ y la serie de Euler

$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \pi^2/6$ cuya expresión es $\zeta(2)$ o función $\zeta(2)$. [9]

Consideremos las igualdades, o si se prefiere, las aproximaciones:

$$\phi \approx 0{,}6180339887498948482045868343656$$

$$\zeta(2) \approx 1{,}6449340668482264364724151666 46$$

$$\xi \approx 5{,}8284271247461900976033774484194$$

Si multiplicamos entre sí los anteriores valores obtenemos:

$(\phi)(\xi)(\zeta(2)) \approx 5{,}925325674$; este producto no parece muy interesante, pero si lo manipulamos lo suficiente, descubriremos que:

$(\phi)(\xi)(\zeta(2)) \approx 5{,}925325674 \approx 1886089741\pi/10^9$, *igualdad en la que notamos, además de la constante* π, *la presencia de un número primo de diez cifras.*

Este número primo (1886089741) es de la forma $4n+1$, es decir, es resultado de la suma de dos cuadrados perfectos, a saber: 1741392900 y 144696841.

5. Cuadrados perfectos, primos gemelos y la conjetura binaria de Goldbach.

Nuestro nuevo reto: replantear la Conjetura Binaria de Goldbach (que, como ya lo habíamos enunciado dice: "todo número par mayor que 2 puede escribirse como suma de dos números primos") y, desde la perspectiva de los números naturales pares, enfocar el problema a partir de los llamados "primos gemelos" (números primos cuya diferencia es de apenas dos unidades).

Pregunta: *¿para un determinado número par mayor que 8, cuál es el primer par de primos diferentes entre sí que, al sumarlos, dan por resultado ese determinado número par?.* De este modo, el primer número par natural que se considera es el diez 10.

5.1. Acotaciones:

a) Obviamos el número ocho 8 porque el primer par de primos que lo definen está compuesto por el cinco y el tres, los primeros "primos gemelos" y por lo tanto, el par de partida o "punto cero". Nos abstraemos de ese primer par de "primos gemelos" dadas las características de las distancias que hay entre éstos en la secuencia de los números naturales.

b) Descartamos las soluciones de primos con "coeficiente dos"; es decir, la duplicación de números primos. Los pares de primos "aceptables" son aquéllos diferentes entre sí.

c) El enfoque le debe mucho al procedimiento de las llamadas "particiones", solo que, a diferencia de este mismo procedimiento, no se toma en cuenta el número de formas distintas de representar el valor de un número par cualquiera mediante sumas de números primos. En otras palabras, nuestro algoritmo es diferente al de las "particiones".

5.2. Descripción de nuestro algoritmo [10]

a.) Como dijimos, el primer número par natural que se considera es diez.

b.) La mitad de diez es cinco; es claro que cinco más cinco es igual a diez.

c.) Se toma cada vez, y en orden de aparición un número y solamente uno de la secuencia de los números naturales.

d.) Al primer miembro (a la izquierda) de la adición se le resta el número natural en turno y al de la derecha se le suma.

e.) Si quedan expresados dos números primos diferentes entre sí, entonces se ha logrado el objetivo; si no es así, entonces se toma el siguiente de la secuencia de los naturales y se repite el procedimiento; así, hasta lograr que queden expresados los dos primeros primos diferentes entre sí que expresen, al sumarlos, el número par que nos ocupa; en este caso, el diez.

f.) Se registra el número del lugar de la suma que cumple con la condición señalada, es decir: "que queden expresados los dos primeros primos diferentes entre sí y que a su vez expresen, al sumarlos, el número par que nos ocupa". En el caso del diez, la segunda suma cumple con esta condición (registramos el número 2 porque decimos que la suma número dos, después de la suma de las dos mitades, es la que cumple la condición pedida) y, por lo tanto, reiniciamos el proceso con el siguiente número par natural: el doce y así sucesivamente.

Este algoritmo puede ejemplificarse haciendo lo siguiente:

$$\begin{aligned} 10 &= 5+5 \\ &= 4+6 \\ &= 3+7 \quad (*) \end{aligned}$$

$(*)$ Representa la primera pareja de números primos diferentes entre sí que representan la suma de diez está en el segundo lugar.

Al sumando izquierdo se le resta uno cada vez y al derecho se le suma también uno cada vez; solamente hasta que quedan "pareados" dos números primos, diferentes entre sí, nos detendremos.. Expresado de otro modo: $(5-2)+(5+2)=3+7=10$. Se registra el número dos; hecho esto, continúa con el siguiente número par y se repite el procedimiento, así:

$$\begin{aligned} 12 &= 6+6 \\ &= 5+7 \quad (**) \end{aligned}$$

$(**)$ Representa la primera pareja de números primos diferentes entre sí que representan la suma de doce está en el primer lugar).

O bien: $(6-1)+(6+1)=\ 5+7=12$. La segunda pareja de gemelos, el 5 y el 7 ; se registra el número uno. Así se continúa con cada número par, dentro de su secuencia natural.

5.3. Organización y análisis de los resultados.

a.) Se hace una presentación, a manera de secuencia, de los números con los que operamos, es decir, que sumamos y restamos simultáneamente a ambas mitades del número par en turno para expresar su primera "expresión primaria", así: 2, 1, 4, 3, 2, 3, 6, 1, 6, 3, 2, 3, 6, 1, 12, 3, 2, 9, 6, 5, 6, 3, 4, 9, 12,1, 12, 9, 4, 3, 6, 5, 6, 9, 2, 3, 12, 1, 24, 3, 2, 15, 6, 5, 12, 3, 8, 9, 6, 7, 12, 3, 4, 15, 12, 1, 18, 9, 4, 3, 6, 5, 6, 15, 2, 3, 12, (...) (aquí se muestra solo hasta la "expresión primaria" número 68). Los "unos" representan los pares de "primos gemelos" y los otros números a las parejas de primos no gemelos [11]. Aunque no se pueda ver a primera vista, existe una cierta simetría subyacente en esta secuencia; simetría que se aprecia más en la figura 3.

b.) Los números primos gemelos, representados en esta secuencia por la unidad, son los elementos organizadores de los otros valores que representan a las parejas de primos no gemelos. Esto último lo podemos observar cuando a los mismos números de la secuencia anterior los ordenados en columnas (Figura 3) (aquí se muestra solo hasta la séptima línea):

	2																
1	4	3	2	3	6												
1	6	3	2	3	6												
1	12	3	2	9	6	5	6	3	4	9	12						
1	12	9	4	3	6	5	6	9	2	3	12						
1	24	3	2	15	6	5	12	3	8	9	6	7	12	3	4	15	12
1	18	9	4	3	6	5	6	15	2	3	12						
(...)																	

Figura 3: Organización en columnas de la secuencia de expresiones primarias.

c.) Los "representantes" de esas otras parejas de primos no gemelos "crecen" conforme la lista de "unos" va en aumento; aunque parece que ese crecimiento no es constante, a la larga prevalecerá sobre cualquier variación aislada.

d.) Contando el número de casos a partir de cada uno de los "representantes" (exceptuando la primera línea) de las parejas de primos gemelos resulta que, al menos para este ordenamiento, el total de "representantes" de primos no gemelos se expresa en una "cantidad prima". Esto, a nuestro juicio, sugiere que la Conjetura Binaria de Goldbach y la hipótesis de la infinitud de los primos gemelos están estrechamente ligadas.

e.) Se puede derivar un sub/enfoque: la conexión con los primos de la forma $4n + 1$ (los primos que son resultado de la suma de dos cuadrados perfectos y sobre los que Fermat demostró que hay infinitos).

f.) Existe una conexión entre los primos gemelos y los cuadrados perfectos y ésta es muy estrecha. Las distancias primas entre los "unos" de la secuencia de "representaciones primarias" puede expresarse de la siguiente manera: $1 + p = 6n$; "1" es el "representante" de los primos gemelos, "p" la distancia primaria y "6n" el lugar en el que aparece el siguiente "1" que es múltiplo de 6. Si manipulamos un poco esta ecuación, obtenemos: $p = 6n-1$. La relación con la forma $6n\pm1$ para los primos gemelos, es evidente.

g.) Para evidenciar la estrecha relación entre primos gemelos, cuadrados perfectos y los primos de la forma $4n+1$, veamos el siguiente cuadro (Figura 4):

A	B	C	D	E	F	G	H
7	11	13	17	19	23	29	31
37	41	43	47	49	53	59	61
67	71	73	77	79	83	89	91
97	101	103	107	109	113	119	121
127	131	133	137	139	143	149	151
157	161	163	167	169	173	179	181

Figura 4: Presentación Modular de la secuencia $S_7^{\infty}(4,2,4,2,4,6,2,6)$.

En este cuadro, afirmamos que $S_7^{\infty}(4,2,4,2,4,6,2,6)$ es la máxima aproximación a la secuencia de los números primos [12]. Primero observemos que los números primos aparecen subrayados. Los primos de la columna "A" son de la forma $6n+1$, los de la columna "F", de la forma $6n-1$ y ambas columnas en conjunto, satisfacen la forma $6n\pm1$ (la forma de los primos gemelos, exceptuando el tres y el cinco). Ahora bien, aquí viene lo interesante: las columnas "B" y "C" presentan primos gemelos (pareados), al igual que las columnas "D" y "E", y las "G" y "H", respectivamente.

Si sumamos los primos gemelos pareados en las columnas mencionadas, resulta que la suma resultante es múltiplo de cuatro, o sea "4n"; ahora bien, si ponemos en juego la unidad sucede esto: a las sumas correspondientes para las columnas "B" y "C" hay que restarle la unidad para tener la posibilidad de obtener un primo; para las columnas "D" y "E" sucede que a sus sumas hay que agregarle la unidad para que se tenga la misma posibilidad que para las anteriores columnas y, por último, para las columnas "G" y "H" es indiferente que se sume o reste la unidad para que suceda lo mismo que en las anteriores.

h.) Así las cosas, entonces, ¿cuál es la evidencia que aclara la relación entre las hipótesis del conjunto infinito de los primos gemelos y la Conjetura Binaria de Goldbach.

Para la Conjetura Binaria de Goldbach que dice que todo número par mayor que 2 puede escribirse como suma de dos números primos, proponemos el siguiente replanteamiento:

¿Existen infinitos números primos (P) de la forma $4n+1$ que son resultado de la suma de dos primos gemelos más la unidad?

Si ya quedó demostrado por Fermat que hay infinitos primos de la forma $4n+1$ y, como ya vimos, $6n\pm1$ implica $4n$ (múltiplos de 4) y al agregarle a esta última expresión la unidad tenemos la posibilidad de obtener números primos, entonces debe haber infinitos $6n\pm1$ (primos) asociados a los infinitos $4n + 1$ (primos) y, dado que $(6n \pm 1) + 1 = 4n + 1$ es equivalente a la Conjetura Binaria de Goldbach, en conclusión podemos afirmar que esta última es verdadera. Estamos conscientes que esto no es una demostración de conjetura alguna, pero se muestra evidencia de que las probabilidades de que sea cierta, son muy significativas. Aquí el asunto se deja reducido a formas de números primos;

$$(6n \pm 1)_{(primos)} + 1 = 4n + 1_{(primos)}$$

Pero resulta que los primos gemelos son menos densos que los primos de la forma $4n+1$ y se reducen a cuatro columnas de la tabla de arriba. Esto se puede representar para los primos de la forma $4n+1$, de los siguientes modos:

$\{(17+19)+1, (137+139)+1, (197+199)+1 \ldots P+(P+2)+1 \ldots\} \cap \{7, 37, 67 \ldots n+30 \ldots\}$
$= \{37, 277, 297 \ldots 4n+1 = P \ldots\}$

$\{(29+31)+1, (269+271)+1, (599+601)+1 \ldots P+(P+2)+1 \ldots\} \cap \{31, 61, 91 \ldots n+30 \ldots\}$
$= \{61, 541, 1201 \ldots 4n+1 = P \ldots\}$

Como se ve, los resultados que se traducen en los primos de la forma $4n+1$ se restringen a la primera y última columnas de la figura 4.

Resumiendo, la pregunta sería:

¿Existen infinitos $P = 4n+1$ *que cumplan la igualdad* $((6n-1)+(6n+1))+1 = 4n+1 = P$ *; en donde* $(6n-1) = P$ *,* $(6n+1) = P+2$ *y, por lo tanto,* $P = 4n+1 = P+(P+2)+1$

También está el hecho de que la densidad de los primos gemelos más la unidad que cumplen la restricción de dar por resultado los primos de la forma $4n+1$, es significativamente más baja que cualquiera de los dos conjuntos de primos de ambas clases; a pesar de esto, desde nuestra humilde opinión, consideramos que constituyen un conjunto infinito.

En conclusión, este es el resultado de nuestras reflexiones: la expresión de la Conjetura Binaria de Goldbach como equivalente a la expresión $(6n \pm 1)_{(primos)} + 1 = 4n + 1_{(primos)}$, permite por lo menos visualizar la dificultad que entraña la demostración de la mencionada conjetura, puesto que sugiere que es necesario, primero, demostrar que hay infinitos primos gemelos y después que al sumarlos y agregarles la unidad hay suficientes de ellos como para expresar infinitos números primos de la forma $4n+1$ [13].

Notas

[1]Para una referencia rápida y sencilla de este tópico, consultar Calvin C. Clawson, "Misterios Matemáticos (Magia y Belleza de los Números)" Ed. Diana. México, 1999. pp. 271-296

[2]Cfr. Richard Courant y Herbert Robbins, "¿Qué son las Matemáticas? (Conceptos y Métodos Fundamentales)". Ed. Fondo de Cultura Económica, México 2002. pp. 54-55 y 533-535

[3]http://es.wikipedia.org/wiki/Cuadrado_perfecto (visita del 09 de marzo de 2007 a las 17:16 horas)

[4]Número natural, el que sirve para designar la cantidad de elementos que tiene un cierto conjunto, y se llama cardinal de dicho conjunto. Los números naturales son infinitos. El conjunto de todos ellos se designa por $\mathbb{N}$: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, 10, 11, 12, \ldots\}$. El cero, a veces, se excluye del conjunto de los números naturales. Además de cardinales (para contar), los números naturales son ordinales, pues sirven para ordenar los elementos de un conjunto: 1^o (primero), 2^o (segundo),..., 16^o(decimosexto), ... cfr.http://es.encarta.msn.com/encyclopedia_961546375/Número_natural.html (Visita del 09 de marzo de 2007 a las 17:16 horas)

[5]Calvin C. Clawson. Op cit. p.63

[6]Cfr. Mario Peral Manzo. Problema 147, "Calculando X". (Internet: http://www.arrakis.es/~mcj/pres_0.htm). (Visita del día 15 de noviembre de 2004 a las 18:30 hrs.)

[7]http://ciencia.astroseti.org/matematicas/articulo.php?num=3594 (Visita del día 11 de marzo de 2007 a las 09:16 hrs.). Es curioso que esta ecuación esté formalizada de tal manera que se refiere a dos variables fundamentales (x, y), tal y como sucedería en el caso de la Conjetura Binaria de Goldbach que de la misma manera relaciona dos variables (que son números primos), mediante su adición que es una suma de la forma $2n$.

[8]"El *número mágico*, denominado razón áurea, fue bien conocido tanto por los arquitectos griegos como por sus emuladores romanos. Posteriormente, también lo conocieron los pintores del Renacimiento, especialmente Leonardo da Vinci. En muchos elementos arquitectónicos griegos y romanos se pueden distinguir diversos rectángulos cuyos lados guardan la razón áurea." En Carlos Prieto, "Aventuras de un Duende en el Mundo de las Matemáticas", Ed. Fondo de Cultura Económica, México 2005. pp.117-120 [En este libro de fácil y rápida consulta se puede ver la hermosa secuencia de Fibonacci y cómo de ella puede calcularse la razón áurea].

[9]"Euler es el más prolífico matemático de todos los tiempos. (...) En su juventud le reportó mucha fama la resolución del llamado 'problema de Basel' ($\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \pi^2/6$). En http://72.14.203.104/search?q=cache:v35s5hUMl8IJ:web.educastur.princast.es/ies/elpiles/ ARCHIVOS/paginas/depar /matematicas/euler.htm+problema+de+Basel&hl=es&ct=clnk&cd=1& client=opera (Visita del 10 de marzo de 2007 a las 23:56 horas)

[10]Para una mejor comprensión de concepto"algoritmo", es útil la consulta del capítulo II, 'Algoritmos y máquinas de Turing', En Roger Penrose, "La Mente Nueva del Emperador". Ed. Fondo de Cultura Económica. México, 2002. pp. 48-52.

[11]Hemos observado que para comprobar de manera rápida que los valores reportados en la secuencia sean los correctos tan solo debemos calcular la semidiferencia de las parejas de primos en cuestión, $(a-b)/2$, en donde a es mayor que b; por ejemplo consideremos la pareja compuesta por los primos gemelos 11 y 13, tenemos $(13-11)/2 = 2/2 = 1$

[12]Cfr. Mario Peral Manzo, "Aproximaciones a la Secuencia Primaria". http://www.conacyt.mx/comunicacion/Revista/ ArticulosCompletos/C SecuenciaPrimaria.html (Visita del 08 de marzo de 2007 a las 3:55 horas). Anteriormente este contenido estaba ubicado en el portal de la Sociedad Matemática Mexicana pero, por desgracia, la página en la que se encontraba ha sido desactivada sin mediar explicación alguna.

[13]Actualmente estamos depurando el esbozo de algoritmo para que solamente se consideren los valores impares de la secuencia, en este caso: 1, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 9, 5, 3, 9, 1, 9, 3, 5, 9, 3, 1, 3, 15, 5, 3, 9, 7, 3, 15, 1, 9, 3, 5, 15, 3... derivado de operar con las secuencias: $S_{12}^{\infty}(4,4) = \{12, 16, 20...N+4...\}$ que se lee: "la secuencia de cuatro en cuatro desde el número doce a infinito es igual al conjunto que contiene a doce, dieciséis, etc."

$S_1^{\infty}(2,2) = \{1, 3, 5...N+2...\}$ que se lee: "la secuencia de dos en dos desde el número uno a infinito es igual al conjunto que contiene a uno, tres, cinco, etc.".

Referencias

[1] Clawson, Calvin C. "Misterios Matemáticos (Magia y Belleza de los Números)" Ed. Diana. México, 1999.

[2] Courant, Richard y Herbert Robbins. "¿Qué son las Matemáticas? (Conceptos y Métodos Fundamentales). Ed. Fondo de Cultura Económica, México 2002.)

[3] Penrose, Roger "La Mente Nueva del Emperador". Ed. Fondo de Cultura Económica. México, 2002.

[4] Prieto, Carlos. "Aventuras de un Duende en el Mundo de las Matemáticas". Ed. Fondo de Cultura Económica, México 2005.