Relaciones en un conjunto

1. Introducción.

Sabemos que las correspondencias entre dos conjuntos dados quedan definidas, en cada caso, por una parte de su producto cartesiano, que se denomina grafo de la correspondencia. Esto es, una correspondencia f es simplemente una terna constituida por un grafo, G, y los dos conjuntos, A y B, inicial y final, respectivamente, que se corresponden:

$$f=(G;A,B)$$

Una *relación R* es una correspondencia en la que coinciden el conjunto inicial *A* y el conjunto final *B: A=B*. Esto es:

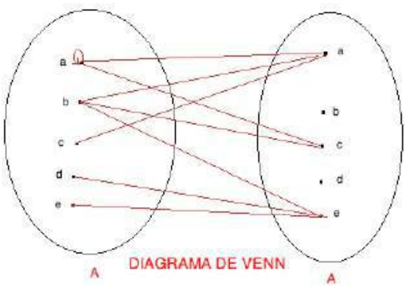
$$R=(G;A,A)$$

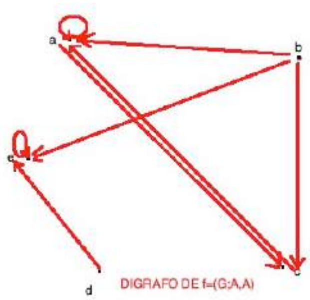
y se denomina *relación binaria en el conjunto A*.

Gráficamente acostumbra a representarse la relación binaria en un conjunto mediante un diagrama de Venn sagital, o mediante un diagrama de nodos (digrafo), o bien, mediante una matriz cuadrada que se obtiene desde una tabla de doble entrada.

Ejemplo: Sea el conjunto *A={a,b,c,d,e}* y la relación binaria *R=(G;A,A)* cuyo grafo es *G={(a,a),(a,c),(b,a),(b,c), (b,e),(c,a), (d,e), (e,e)}.*

Podemos representarla gráficamente mediante un diagrama de Venn, o mediante un diagrama de nodos (digrafo), o mediante una matriz cuadrada elemental en la que colocamos un uno en el lugar que ocupa un par relacionado, o un cero cuando los pares correspondientes no se relacionan:





$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & a & b & c & d & e \\
\hline
a & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
b & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
c & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
d & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
e & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

REPRESENTACIÓN MATRICIAL

En lo que sigue representaremos por *R* el grafo de la relación, utilizando cualquier otra letra para representar a la relación:

$$f = \left(R; A, A\right)$$

Una relación *h=(R;A,A)* se dice que es *reflexiva* si todo elemento está relacionado consigo mismo:

$$h=(R;A,A) \text{ reflexiva } \leftrightarrow (\forall x)(x \in A, (x,x) \in R$$

Una relación *h=(R;A,A)* se dice que es *simétrica* si se cumple que para todo elemento x que esté relacionado con y, también y está relacionado con x:

$$h=(R;A,A) \text{ simétrica } \leftrightarrow \left(\forall x\right)\left(\forall y\right)\left((x,y) \in R \Leftrightarrow (y,x) \in R\right)$$

Una relación *h=(R;A,A)* se dice que es *transitiva* si se cumple que si un elemento está relacionado y, estando a su vez y relacionado con z, entonces x está relacionado con z:

$$h=(R;A,A) \text{ transitiva } \leftrightarrow \left(\forall x\right)\left(\forall y\right)\left(\forall z\right)\left((x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R\right)$$

Vemos, por tanto, que la reflexividad, simetría y transitividad de una relación binaria se puede definir sencillamente por la pertenencia o no de ciertos elementos al grafo R que define la relación.

Podemos, asimismo, definir la propiedad de *antisimetría* del siguiente modo:

Una relación *h=(R;A,A)* se dice que es *antisimétrica* si se cumple que si un elemento x está relacionado con y, también y está relacionado con x, entonces necesariamente ambos elementos son el mismo:

$$h=(R;A,A) \text{ antisimétrica } \leftrightarrow \left((x,y) \in R \wedge (y,x) \in R\right) \rightarrow x = y$$

De todo esto deducimos que si la relación binaria f de grafo R es reflexiva, también es reflexiva la relación recíproca, f^{-1}, de grafo R^{-1}:

$$f = \left(R; A, A\right) \textit{ reflexiva} \leftrightarrow f^{-1} = \left(R^{-1}; A, A\right) \textit{ reflexiva}$$

pues: $f = \left(R; A, A\right) \textit{ reflexiva} \leftrightarrow \forall (x,y) \in R, (x,x) \in R \rightarrow$

$\rightarrow (y,x) \in R^{-1}, (x,x) \in R^{-1} \leftrightarrow f^{-1} = \left(R^{-1}; A, A\right) \textit{ reflexiva}$

Asimismo, si la relación binaria es simétrica o transitiva, también lo son las respectivas relaciones binarias recíprocas:

$$f = \left(R;A,A\right) \textit{ simétrica} \leftrightarrow f^{-1} = \left(R^{-1};A,A\right) \textit{ simétrica}$$

pues: $f = \left(R;A,A\right) \textit{ simétrica} \leftrightarrow ((x,y)\in R \to (y,x)\in R) \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((y,x)\in R^{-1} \to (x,y)\in R^{-1})) \leftrightarrow f^{-1} = \left(R^{-1};A,A\right) \textit{ simétrica}$

$$f = \left(R;A,A\right) \textit{ transitiva} \leftrightarrow f^{-1} = \left(R^{-1};A,A\right) \textit{ transitiva}$$

pues: $f = \left(R;A,A\right) \textit{ transitiva} \leftrightarrow (\forall (x,y),(y,z)\in R \to (x,z)\in R) \leftrightarrow$

$\leftrightarrow (\forall (y,x),(z,y)\in R^{-1} \to (z,x)\in R^{-1}) \leftrightarrow f^{-1} = \left(R^{-1};A,A\right) \textit{ transitiva}$

En cuanto a la propiedad de antisimetría, deducimos que si la relación *f=(R;A,A)* es antisimétrica en A, habrá necesariamente pares de elementos (x,y) de A tales que al cambiar el orden, (y,x), al menos uno de los dos pares no pertenece al grafo, salvo que *x=y*.

Teorema: la unión de una relación con su recíproca es una relación simétrica:

$$f \cup f^{-1} = (R \cup R^{-1};A,A) \text{ es simétrica}$$

En efecto:
$\forall (x,y)\in R\cup R^{-1} \to (x,y)\in R \vee (x,y)\in R^{-1} \to (y,x)\in R^{-1} \vee (y,x)\in R \to$
$\to (y,x)\in R\cup R^{-1}$

2. Relaciones de equivalencia.

Una relación $f = (R;A,A)$ se dice que es de *equivalencia*, si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Se llama *clase de equivalencia* de representante $x \in A$, al conjunto [x] de elementos de A que están relacionados con x por la relación de equivalencia $f = (R;A,A)$:

$$\left[x\right] = \left\{ y \in A \,/\, (x,y) \in R \right\}$$

Si el par *(x,y)* pertenece al grafo de la relación, esto es, si *x* está relacionado con y, expresaremos esto en adelante así: *xRy*

Teorema 2.1: La familia $\left\{\left[x\right]_{x\in A}\right\}$ de las clases de equivalencia definidas en el conjunto A por la relación de equivalencia $f = (R;A,A)$ es una partición del conjunto A. O sea:

$$\forall x \in A, \ \bigcup_{x\in A}\left[x\right] = A, \quad \forall x, y \in A, \left[x\right] \cap \left[y\right] = \phi \vee \left[x\right] = \left[y\right]$$

Demostración:
a. Veamos que la unión de todas las clases es el conjunto A:
$\forall x \in A, \ \left[x\right] \subseteq A \rightarrow \bigcup_{x\in A}\left[x\right] \subseteq A,$ por definición de clase de equivalencia.

Por otra parte se cumple que $\forall x \in A, xRx \ (por\ ser\ reflexiva) \rightarrow x \in \left[x\right] \rightarrow$

$\rightarrow x \in \bigcup_{x\in A}\left[x\right] \rightarrow A \subseteq \bigcup_{x\in A}\left[x\right]$

de ambas inclusiones se deduce la igualdad $\bigcup_{x\in A}\left[x\right] = A$

b. Veamos ahora que la intersección de dos clases es vacía, salvo que sean la misma clase:
Si $\left[x\right] \cap \left[y\right] \neq \phi$, entonces, $\exists u \in A \,/\, u \in \left[x\right] \wedge u \in \left[y\right] \rightarrow xRu \wedge yRu \rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{matrix} xRu \\ uRy \end{matrix}\right\} \rightarrow xRy \rightarrow x \in \left[y\right]$, o bien, $y \in \left[x\right]$

$\forall z \in \left[x\right] \rightarrow zRx \wedge xRy \rightarrow zRy \rightarrow z \in \left[y\right] \rightarrow \left[x\right] \subseteq \left[y\right]$

$\forall z \in \left[y\right] \rightarrow zRy \wedge yRx \rightarrow zRx \rightarrow z \in \left[x\right] \rightarrow \left[y\right] \subseteq \left[x\right]$

y de ambas inclusiones se deduce la igualdad: $\left[x\right] = \left[y\right]$

En definitiva, si la intersección es no vacía, ambas clases son la misma.

Teorema 2.2: Toda partición $\left\{p_j\right\}$ del conjunto A induce una relación de equivalencia en A, cuya familia de clases, $\left\{\left[x\right]\right\}_{x\in A}$, coincide con la partición dada.

Demostración:
Bastará definir en A una relación f, de forma que sea de equivalencia y tal que la familia de sus clases coincida con la partición dada.
Definamos la relación

$$f = \left(R; A, A\right)$$

por la condición:

$$R = \left\{(x, y) \,/\, (\exists p_i \in \left\{p_j\right\})(x, y \in p_i)\right\}$$

(todo elemento del grafo pertenece a alguna de las partes de la partición)

a. Veamos que es de equivalencia:
Reflexiva:

$$\forall x \in A, \exists p_i \in \left\{p_j\right\} / \ x \in p_i \rightarrow x, x \in p_i \rightarrow xRx$$

Simétrica:

$$xRy \rightarrow \exists p_i \in \left\{p_j\right\} / \ x, y \in p_i \rightarrow y, x \in p_i \rightarrow yRx$$

Transitiva:

$$\left.\begin{array}{l} xRy \\ yRz \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} \exists p_i \in \{p_j\} / x,y \in p_i \\ \exists p_k \in \{p_j\} / y,z \in p_k \end{array}\right\} \to y \in p_i \cap p_k \to$$

$\to p_i = p_k$, pues son partes de la partición dada $\to x,z \in p_i \to xRz$

b. Veamos que la familia de las clases de equivalencia coincide con la partición dada:

$$\forall z \in [x], zRx \to \exists p_i \in \{p_j\} / z,x \in p_i \to z \in p_i \to [x] \subseteq p_i$$

$$\forall z \in p_i \to x,z \in p_i \to xRz \to z \in [x] \to p_i \subseteq [x]$$

Y de ambas inclusiones se deduce la igualdad:

$$\left.\begin{array}{l} [x] \subseteq p_i \\ p_i \subseteq [x] \end{array}\right\} \to p_i = [x]$$

por tanto:

$$\{p_j\} = \{[x]\}_{x \in A}$$

El conjunto de las clases de equivalencia definidas por la relación de equivalencia *f=(R;A,A)* en el conjunto *A*, se denomina *conjunto cociente* de *A* por la relación de equivalencia f, y se representa generalmente por *A/f*. De los dos teoremas anteriores se infiere que *A/f,* con f de equivalencia, es una partición del conjunto *A*, y que, a su vez, toda partición $\{p_j\}$ del conjunto A *induce* una relación de equivalencia en *A* cuyo conjunto cociente es la partición $\{p_j\}$ dada.

3. Relaciones de orden.

Una relación $f = (R;A,A)$ se dice que es de *orden*, si es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Estas relaciones, al tener la propiedad de antisimetría, no permiten que un par *(x,y)* y su opuesto, *(y,x),* pertenezcan ambos al grafo *R*, salvo que ambos elementos, x e y, coincidan *(x=y).*

Sí puede ocurrir que para dos elementos cualesquiera, x e y, del conjunto A, el par *(x,y),* o bien, el par *(y,x),* pertenezca al grafo R. En tal caso diremos que la relación de orden es *total* en A:

$$f = (R;A,A) \text{ de orden total} \leftrightarrow \forall (x,y) \in A, (x,y) \in R \vee (y,x) \in R$$

El orden definido por la relación será sólo *parcial* si existen pares de elementos de A, que no pertenecen al grafo *R* ni tampoco pertenecen al grafo *R* sus pares opuestos:

$$f = (R;A,A) \text{ de orden parcial} \leftrightarrow \exists (x,y) \in A, (x,y) \notin R \wedge (y,x) \notin R$$

Conjunto ordenado:
Un conjunto dotado de una relación de orden, total o parcial, se dice *conjunto ordenado*, que será, respectivamente, *totalmente ordenado* o *parcialmente ordenado*.

Primer elemento:
Si en un conjunto ordenado por una relación de orden f hay un elemento, x, que está relacionado por f con todos los elementos del conjunto, se dirá que x es *primer elemento* del conjunto por el orden f.

Buen orden o buena ordenación
Una relación de orden f en un conjunto A se dirá que es un *buen orden* en A, o que A tiene *una buena ordenación*, o que A está *bien ordenado*, si todo subconjunto de A tiene un primer elemento.

Teorema 3.1: Todo conjunto bien ordenado está totalmente ordenado.
Demostración:
Si un conjunto está bien ordenado, entonces, por definición, todo subconjunto o parte del mismo tiene un primer elemento, por lo cual, si elegimos un subconjunto cualquiera de solamente dos elementos, un par, uno de estos dos elementos será el primer elemento de dicho par, por lo que ambos elementos están relacionados. Es decir, todo par de elementos del conjunto dado está relacionado por el orden del conjunto. El orden es, por tanto, total.

Teorema 3.2: Todo subconjunto de un conjunto bien ordenado es también un conjunto bien ordenado.
Demostración:
Si un conjunto A está bien ordenado, todo subconjunto A' del mismo tiene, por definición, un primer elemento, por lo que todo subconjunto A" de A' tiene también un primer elemento ya que A" , al ser subconjunto de A', es también subconjunto del conjunto bien ordenado A.

4. Bibliografía

Halmos, Paul R.- Teoría intuitiva de conjuntos.
CECSA, México, 1976

Zarisky, O.; Samuel P.- Conmutative Álgebra.
Springer, New York, 1991

Godement, R.-Álgebra.
Tecnos, Madrid, 1978