Acerca de la numerabilidad del cuerpo Q de los números racionales

El cuerpo Q de los números racionales está constituido por el cociente de dos enteros, con el denominador no nulo:

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} / a \in Z, b \in Z - \{0\} \right\}, \ Z: \text{anillo de los números enteros}$$

1. La numerabilidad del anillo de los enteros:

Teorema 01: El conjunto Z de los números enteros es numerable.
Demostración:
Basta definir una correspondencia f desde los números enteros Z en los naturales N de la forma:

$$\forall n \in Z, \begin{cases} f(n) = 2n+1, n = 0,1,2,... \\ f(-n) = 2n, n = 1,2,... \end{cases}$$

Tal correspondencia es:

a) Aplicación, pues obviamente, $\forall a \in Z, \exists f(a) \in N$.
b) Inyectiva, pues:

$$Si \begin{cases} f(a) = 2a+1 \\ f(b) = 2b+1 \end{cases}, f(a) = f(b) \rightarrow 2a+1 = 2b+1 \rightarrow a = b$$

$$Si \begin{cases} f(a) = 2a \\ f(b) = 2b \end{cases}, f(a) = f(b) \rightarrow 2a = 2b \rightarrow a = b$$

c) Sobreyectiva, pues: $\forall c \in N, c = 2a \vee c = 2a+1 \rightarrow \exists a \in Z / \forall c \in N, c = f(a)$

En definitiva, la correspondencia es una biyección entre los números enteros y los números naturales, lo que implica que siendo numerable el semianillo de los números naturales, también es numerable el anillo de los números enteros.

2. La numerabilidad del cuerpo de los racionales:

Teorema 02: El cuerpo Q de los números racionales es numerable.
Demostración:
Veamos que es posible construir una correspondencia biunívoca entre los números racionales y los números enteros, por lo que, en tal caso, la numerabilidad de los racionales se sigue de la antes indicada numerabilidad del anillo de los enteros.

Para ello podemos usar el método de Cantor, consistente en establecer una sucesión infinita con todos los números racionales, de modo que todo número racional sea uno y solo uno de los términos de la sucesión, evidenciando de esta manera una correspondencia biunívoca entre la clase de números racionales positivos y el conjunto N de los números naturales. Con un cambio de signo, tal correspondencia biunívoca existe también entre los números racionales negativos y los enteros negativos, por lo que, finalmente, si hacemos corresponder al cero el número racional nulo, se completa la biyección entre los números racionales y los números enteros, con lo que la numerabilidad de éstos implicará la numerabilidad del cuerpo Q.

Veamos la construcción de la sucesión infinita que contenga todos los números racionales y solo a estos números:

Consideremos la tabla infinita que se muestra en la imagen siguiente

1/1	2/1	3/1	4/1	....
↓ 1/2 →	↑ 2/2	↑ 3/2	↑ 4/2	....
↓ 1/3 →	2/3 →	↑ 3/3	↑ 4/3	....
↓ 1/4 →	2/4 →	3/4 →	↑ 4/4	....
....	....	....	....	....

Recorriendo ordenadamente el contorno de los cuadrados de fracciones, de menor a mayor, en sentido contrario a las agujas del reloj, se pueden construir todos los cocientes que forman una sucesión simple infinita:

$$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{2},\frac{2}{1},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{3}{3},\frac{3}{2},\frac{3}{1},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{4}{4},\frac{4}{3},\frac{4}{2},\frac{4}{1},\ldots$$

en la que:

- El primer término es el 1/1.
- El siguiente de b/1 es 1/(b+1), (si b>1).
- El siguiente del racional a/b es el racional (a+1)/b, (si a<b).
- El siguiente del racional a/b es el racional a/(b-1), (si a>=b)

Obviamente, todos los términos de tal sucesión son números racionales, y cualquier número racional se encuentra entre los términos de la sucesión.

3. La densidad del cuerpo de los números racionales.

Definimos como cuerpo denso a un cuerpo ordenado en el que entre cada par de elementos del mismo siempre existe otro elemento del cuerpo. Es decir,

$$K\ denso \leftrightarrow \forall a,b \in K \,/\, a < b, \exists c \in K \,/\, a < c < b$$

Teorema 03: El cuerpo Q de los números racionales es denso.
Demostración:

$$\forall a,b \in K / a < b \rightarrow a+a < a+b \wedge a+b < b+b \rightarrow 2a < a+b < 2b \rightarrow a < \frac{a+b}{2} < b$$

Es decir, entre dos números racionales cualesquiera, a,b , siempre podemos encontrar el también número racional construido como semisuma de ambos.

4. La expresión decimal de un número racional:

Sabemos que los números racionales tienen una expresión distinta de los pares de enteros indicada al principio de estas notas. Así, por ejemplo, es

$$\frac{32}{5} = 6'4, \quad \frac{9}{4} = 2'25, \quad \frac{7}{3} = 2'33333...$$

Sin embargo, hay otros números reales que tienen una expresión decimal y no son números racionales, como ocurre, por ejemplo, con $\sqrt{2},\ \pi,\ e,...$

En lo que sigue vamos a establecer qué expresiones decimales representan números racionales y qué expresiones decimales no representan a estos números.

Las expresiones decimales periódicas son aquellas en las que a partir de un cierto dígito de su expresión se repite periódicamente una secuencia de uno o más dígitos:
$2'33333...$, se repite periódicamente el 3.
$4'72345454545....$, se repite periódicamente el 45.
$8'25$ o equivalentemente $8'25000...$, se repite periódicamente el 0.
$3'024988888....$, se repite periódicamente el 8.
Las expresiones decimales periódicas pueden ser puras o mixtas:
Expresiones decimales puras son aquellas en las que la secuencia que se repite comienza inmediatamente después de la coma.
Expresiones decimales mixtas son aquellas en las que la secuencia de dígitos que se repite comienza después de una o más cifras que aparecen después de la coma y que no se repiten.
La secuencia de dígitos que se repite se denomina periodo y la secuencia de dígitos que no se repite, a partir de la coma, se denomina antiperiodo.

Ejemplos:
$2'33333...$, es una expresión decimal periódica pura de periodo 3 y parte entera 2.
$4'72345454545....$, es una expresión decimal periódica mixta de periodo 45, antiperiodo 723 y parte entera 4.
$8'25$, es una expresión decimal periódica mixta de periodo 0, antiperiodo 25 y parte entera 8.
$3'024988888....$, es una expresión decimal periódica mixta de periodo 8, antiperiodo 0249 y parte entera 3.
$0'4050505...$, es una expresión decimal periódica mixta de periodo 05, antiperiodo 4 y parte entera 0.

En definitiva:
Si es d un número decimal periódico, siempre es posible escribirlo de la forma $d = a + b\left(1 + r + r^2 + r^3 + ...\right)$, donde a representa a la parte entera seguida de la parte no periódica, b es un periodo y r es un número racional tal que $|r| < 1$.

Así, en los ejemplos anteriores:

$$2'33333...,=2+0'3.\left(1+1/10+(1/10)^2+(1/10)^3+...\right)=2+\frac{3}{10}\left(1+1/10+(1/10)^2+(1/10)^3+...\right)$$

$$4'72345454545....=4'723+0'00045\left(1+1/100+(1/100)^2+(1/100)^3+...\right)=$$

$$=\frac{4723}{1000}+\frac{45}{10000}\left(1+1/100+(1/100)^2+(1/100)^3+...\right)$$

$$3'024988888....=3'0249+0'00008\left(1+1/10+(1/10)^2+(1/10)^3+...\right)=$$

$$=\frac{30249}{10000}+\frac{8}{100000}\left(1+1/10+(1/10)^2+(1/10)^3+...\right)$$

$$0'4050505...=0'4+0'005\left(1+1/100+(1/100)^2+(1/100)^3+...\right)=$$

$$=\frac{4}{10}+\frac{5}{1000}\left(1+1/100+(1/100)^2+(1/100)^3+...\right)$$

Teorema 04: A todo número decimal periódico le corresponde un número racional
Demostración:

Puesto que todo número decimal periódico d puede expresarse por

$$d=a+b\left(1+r+r^2+r^3+...\right)$$

donde es $1+r+r^2+r^3+...$ una progresión geométrica de razón $|r|<1$, se tiene:

$$d=a+b.\frac{1}{1-r}=\frac{a(1-r)+b}{1-r}\in Q$$

Teorema 05: Todo número racional tiene una expresión decimal periódica.
Demostración:

La expresión decimal de a/b se obtiene realizando la división euclídea corriente del número a entre el número b, ambos enteros. De los restos parciales que se obtienen solamente pueden haber b restos distintos, por lo que llegará un momento en que alguno de ellos se repita, lo que implica que la expresión decimal será necesariamente periódica.

Teorema 06: Una expresión decimal no periódica no representa a un número racional.
Demostración:
Es consecuencia inmediata de los anteriores teoremas 04 y 05.

Históricamente, la ampliación del cuerpo de los números racionales con aquellos otros números que no tienen expresión decimal periódica, que se comenzarían a llamar irracionales, es una de las puertas que permitió pasar a la construcción del cuerpo ordenado y completo de los números reales.