Construcción del producto tensorial de espacios vectoriales

La definición y desarrollo del concepto de producto tensorial de espacios vectoriales ha sido de gran importancia en el devenir de la física del siglo XX. Veremos en las páginas siguientes el intento de definir esta importante operación, mostrando algunos ejemplos elementales y tratando de establecer la unicidad del producto tensorial, y su existencia real desde un conjunto cualquiera de espacios vectoriales.

Es decir, intentaremos contestar a las preguntas ¿Qué es realmente el producto tensorial de varios espacios vectoriales?, ¿Hay en la matemática ejemplos concretos de productos tensoriales?, ¿Caso de que exista, es único?, ¿Podemos construir desde un conjunto de n espacios vectoriales, su producto tensorial?. ¿Existe el producto tensorial de un número n de cualesquiera espacios vectoriales?.

Producto tensorial

Sean V_1 y V_2 dos espacios vectoriales sobre el cuerpo conmutativo K, y sea f una aplicación bilineal de V_1xV_2 en otro K-espacio vectorial T.

Diremos que el par (f, T) es el producto tensorial de los K-espacios V_1 y V_2 sii para toda aplicación bilineal f' de V_1xV_2 en otro K-espacio vectorial cualquiera, T', siempre existe un único homomorfismo de espacios vectoriales $g : T \to T'$, tal que $g \circ f = f'$.

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dd, "g"] \\ V_1 \times V_2 \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & \\ & T' \end{tikzcd}$$

Diagrama 1

Denotaremos al espacio T por $V_1 \otimes V_2$ y la imagen $f(x, y)$ del par (x, y) por $x \otimes y$. Es decir:

$$\forall (x, y) \in V_1 x V_2,\ f(x, y) \equiv x \otimes y \in T \equiv V_1 \otimes V_2$$

cumpliéndose las condiciones de bilinealidad para la aplicación f:

$$(x_1 + x_2) \otimes y = (x_1 \otimes y) + (x_2 \otimes y)$$
$$x \otimes (y_1 + y_2) = (x \otimes y_1) + (x \otimes y_2)$$
$$(\lambda x) \otimes y = x \otimes (\lambda y) = \lambda (x \otimes y)$$

Teorema 1:

a) Si en el anterior diagrama 1 el par *(f,T)* es el producto tensorial de los espacios vectoriales V_1 y V_2, es decir, si para cualquier otro par *(f',T')* con *f'* bilineal y *T'* espacio vectorial, se verifica que existe un homomorfismo $g : T \rightarrow T'$ único que hace conmutativo al diagrama, entonces el conjunto imagen $f(V_1 x V_2)$ del espacio producto cartesiano de ambos espacios vectoriales genera al espacio T:

$$g : T \rightarrow T' \text{único} \Rightarrow L(f(V_1 x V_2)) = T$$

b) Y recíprocamente, si en el anterior diagrama 1 se verifica que el espacio generado por $f(V_1 x V_2)$ coincide con T, entonces el homomorfismo g es necesariamente único y el par *(f,T)* es, efectivamente, el producto tensorial de ambos espacios vectoriales:

$$L(f(V_1 x V_2)) = T \Rightarrow g : T \rightarrow T' \text{único}$$

Demostración:

a) Sea $L(f(V_1 x V_2)) \subseteq T$ el espacio engendrado por $f(V_1 x V_2)$ y sea $j : L(V_1 x V_2) \rightarrow T$ la inmersión canónica (j es la identidad sobre $L(f(V_1 x V_2))$).

Al ser la identidad es $j \in Hom(L(V_1 x V_2), T)$, teniéndose el siguiente diagrama:

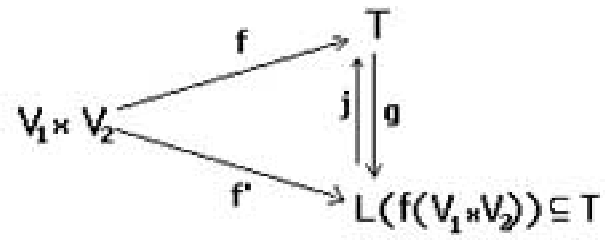


Diagrama 2

se tiene:

$$j \circ f' = f \qquad g \circ f = f'$$

premultiplicando la segunda de estas expresiones por j:

$$j \circ (g \circ f) = j \circ f' = f \rightarrow (j \circ g) \circ f = f \rightarrow j \circ g = i_d$$

Al ser $j \circ g$ la identidad i_d nos encontramos que la inmersión j es realmente un isomorfismo, por lo que $L(f(V_1 x V_2)) = T$

b) Sea $L(f(V_1 x V_2)) = T \wedge g : T \rightarrow T'$ homomorfismo

Supongamos que existe otro homomorfismo $g^* : T \rightarrow T'$

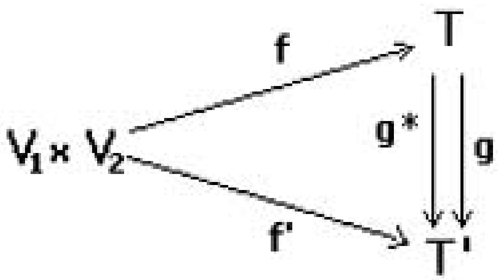


Diagrama 3

Se tendría entonces que

$$f' = g \circ f \quad \wedge \quad f' = g^* \circ f$$

es decir:

$$g \circ f = g^* \circ f \rightarrow (g - g^*) \circ f = 0$$

$\forall x \in T \rightarrow x \in L(f(V_1 x V_2)) \rightarrow x = \sum \lambda_i f(x_i, y_i)$, con $(x_i, y_i) \in V_1 x V_2$

por lo cual $\forall x \in T, (g - g^*)(x) = (g - g^*)\left(\sum \lambda_i f(x_i, y_i)\right) = \sum \lambda_i (g - g^*) f(x_i, y_i) =$

$= \sum \lambda_i (g \circ f)(x_i, y_i) - \sum \lambda_i (g^* \circ f)(x_i, y_i) = \sum \lambda_i f'(x_i, y_i) - \sum \lambda_i f'(x_i, y_i) = 0 \rightarrow$

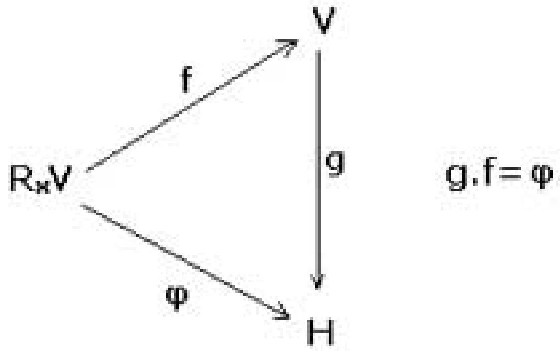
$\rightarrow g - g^* = 0 \rightarrow g = g^*$

Por tanto, g es homomorfismo único.

En definitiva, para probar la unicidad del homomorfismo $g : T \rightarrow T'$ bastará probar, equivalentemente, que el espacio engendrado por $f(V_1 x V_2)$ coincide con el espacio T de la definición.

Ejemplos:

Ejemplo 1: Consideremos el cuerpo R de los números reales. Sea el R-espacio vectorial $(V;R)$, y consideremos también el mismo cuerpo R como espacio vectorial sobre sí mismo.



Si definimos la aplicación $f : RxV \rightarrow V$ por la condición de que

$$\forall (\alpha, x) \in RxV, f(\alpha, x) = \alpha x \in V$$

el par (f, V) será producto tensorial de los espacios vectoriales R y V.

Para comprobarlo veamos que se verifica la definición, esto es, que f es aplicación bilineal de RxV en V, y que, si existe otra aplicación bilineal φ de RxV en otro espacio vectorial H, entonces existirá un único homomorfismo $g : V \rightarrow H$ tal que $g \circ f = \varphi$.

1.a) f es aplicación bilineal:

$\forall \alpha, \beta \in R, \forall x, y \in V$

$f(\alpha + \beta, x) = (\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x = f(\alpha, x) + f(\beta, x)$

$f(\alpha, x + y) = \alpha.(x + y) = \alpha x + \alpha y = f(\alpha, x) + f(\alpha, y)$

$f(\lambda \alpha, x) = \lambda \alpha x = \lambda f(\alpha, x) = f(a, \lambda x), \ \forall \lambda \in R$

1.b) Definamos $g : V \rightarrow H$ por la condición de que

$\forall x \in V, g(x) = \varphi(1, x) \in H$ y veamos su linealidad:

$g(x + y) = \varphi(1, x + y) = \varphi(1, x) + \varphi(1, y) = g(x) + g(y)$

$g(\lambda x) = \varphi(1, \lambda x) = \lambda \varphi(1, x) = \lambda g(x)$

1.c) Veamos que $g \circ f = \varphi$:

$\forall(\alpha,x)\in RxV,\ (g\circ f)(\alpha,x)=g[f(\alpha,x)]=g(\alpha x)=\alpha g(x)=\alpha\varphi(1,x)=\varphi(\alpha,x)$

por tanto $g\circ f=\varphi$

1.d) La unicidad de g:

De la definición de *f*:

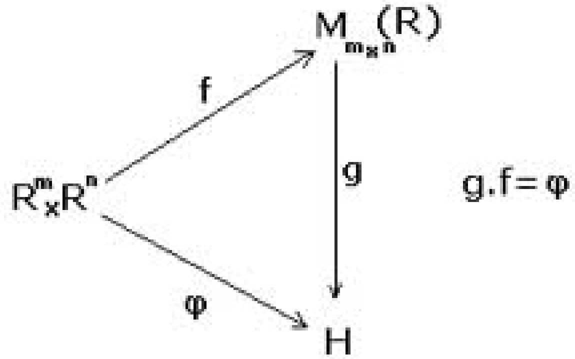
$$\forall(\alpha,x)\in RxV,\ f(\alpha,x)=\alpha x\in V$$

se tiene que $f(RxV)=RxV=V$, por lo que es obvio que $L(f(RxV))=V$, y aplicando el teorema 1, g es único.

En definitiva, el par (f,V) es producto tensorial de R y V.

Ejemplo 2: Consideremos de nuevo el cuerpo R de los números reales. El espacio $M_{mxn}(R)$ de las matrices rectangulares reales, de m filas y n columnas, junto con la aplicación $f:R^m xR^n\to M_{mxn}(R)$, es el producto tensorial de los espacios R^m y R^n, si dicha aplicación *f* se define en la forma:

$$\forall(a_1,...,a_m),(b_1,...,b_n)\in R^m xR^n,\ f((a_1,...,a_m),(b_1,...,b_n))=\begin{pmatrix} a_1b_1 & ... & a_1b_n \\ ... & ... & ... \\ ... & ... & ... \\ a_mb_1 & ... & a_mb_n \end{pmatrix}$$



Comprobamos, pues, a continuación, que se verifican las condiciones de la definición, esto es, que f es bilineal y que para cualquier otra aplicación bilineal definida hacia otro espacio H, $\varphi:R^m xR^n\to H$, cualquiera que sea, siempre existe una única aplicación lineal $g:M_{mxn}(R)\to H$ tal que $g\circ f=\varphi$

2.a) *f* es aplicación bilineal:

Llamaremos, para simplificar:

$(a_i)_m=(a_1,...,a_m),\ (b_j)_n=(b_1,...,b_n)$, y

$$(a_ib_j)_{mxn}=\begin{pmatrix} a_1b_1 & ... & a_1b_n \\ ... & ... & ... \\ ... & ... & ... \\ a_mb_1 & ... & a_mb_n \end{pmatrix}$$

Se tiene, por tanto:

$\forall(a_i)_m,(b_j)_n\in R^m xR^n,\ f((a_i)_m,(b_j)_n)=(a_ib_j)_{mxn}\in M_{mxn}(R)$

- $f[(a_{1i})_m+(a_{2i})_m,(b_j)_n]=((a_{1i}+a_{2i})b_j)_{mxn}=(a_{1i}b_j+a_{2i}b_j)_{mxn}=$
$=(a_{1i}b_j)_{mxn}+(a_{2i}b_j)_{mxn}=f[(a_{1i})_m,(b_j)_n]+f[(a_{2i})_m,(b_j)_n]$
- $f[(a_i)_m,(b_{1j})_n+(b_{2j})_n]=(a_i.(b_{1j}+b_{2j}))_{mxn}=(a_ib_{1j}+a_ib_{2j})_{mxn}=$

$= \left(a_i b_{2j}\right)_{mxn} + \left(a_i b_{2j}\right)_{mxn} = f\left[(a_i)_m, (b_{2j})_n\right] + f\left[(a_i)_m, (b_{2j})_n\right]$

- $\forall \lambda \in R,\ f\left[\lambda (a_i)_m, (b_j)_n\right] = f\left[(\lambda a_i)_m, (b_j)_n\right] = \left(\lambda a_i b_j\right)_{mxn} = \lambda\left(a_i b_j\right)_{mxn} =$

$= \lambda f\left[(a_i)_m, (b_j)_n\right] = f\left[(a_i)_m, (\lambda b_j)_n\right]$

2.b) Definamos $g : M_{mxn}(R) \to H$ por la condición siguiente

$\forall (c_{ij})_{mxn} \in M_{mxn}(R),\ g\left[(c_{ij})_{mxn}\right] = \varphi\left[(1,0,...,0), (c_{11}, c_{12}, ..., c_{1n})\right] +$

$+ \varphi\left[(0,1,...,0), (c_{21}, c_{22}, ..., c_{2n})\right] + ... + \varphi\left[(0,0,...,1), (c_{m1}, c_{m2}, ..., c_{mn})\right]$

Veamos que g así definido es lineal:

- $g\left[(c_{ij})_{mxn} + (d_{ij})_{mxn}\right] = \varphi\left[(1,0,...,0), (c_{11}, c_{12}, ..., c_{1n}) + (d_{11}, d_{12}, ..., d_{1n})\right] + ...$

$... + \varphi\left[(0,0,...,1), (c_{m1}, c_{m2}, ..., c_{mn}) + (d_{m1}, d_{m2}, ..., d_{mn})\right] =$

$= \varphi\left[(1,0,...,0), (c_{11}, c_{12}, ..., c_{1n})\right] + \varphi\left[(1,0,...,0), (d_{11}, d_{12}, ..., d_{1n})\right] + ...$

$... + \varphi\left[(0,0,...,1), (c_{m1}, c_{m2}, ..., c_{mn})\right] + \varphi\left[(0,0,...,1), (d_{m1}, d_{m2}, ..., d_{mn})\right] =$

$= \left\{\varphi\left[(1,0,...,0), (c_{11}, c_{12}, ..., c_{1n})\right] + ... + \varphi\left[(0,0,...,1), (c_{m1}, c_{m2}, ..., c_{mn})\right]\right\} +$

$+ \left\{\varphi\left[(1,0,...,0), (d_{11}, d_{12}, ..., d_{1n})\right] + ... + \varphi\left[(0,0,...,1), (d_{m1}, d_{m2}, ..., d_{mn})\right]\right\} =$

$= g\left[(c_{ij})_{mxn}\right] + g\left[(d_{ij})_{mxn}\right]$

- $\forall \lambda \in R,\ g\left[\lambda (c_{ij})_{mxn}\right] = g\left[(\lambda c_{ij})_{mxn}\right] = \varphi\left[(1,0,...,0), (\lambda c_{11}, \lambda c_{12}, ..., \lambda c_{1n})\right] +$

$+ \varphi\left[(0,1,...,0), (\lambda c_{21}, \lambda c_{22}, ..., \lambda c_{2n})\right] + ... + \varphi\left[(0,0,...,1), (\lambda c_{m1}, \lambda c_{m2}, ..., \lambda c_{mn})\right] =$

$= \lambda \varphi\left[(1,0,...,0), (c_{11}, c_{12}, ..., c_{1n})\right] + ... + \lambda \varphi\left[(0,0,...,1), (c_{m1}, c_{m2}, ..., c_{mn})\right] =$

$= \lambda \left\{\varphi\left[(1,0,...,0), (c_{11}, c_{12}, ..., c_{1n})\right] + ... + \varphi\left[(0,0,...,1), (c_{m1}, c_{m2}, ..., c_{mn})\right]\right\} =$

$= \lambda . g\left[(c_{ij})_{mxn}\right]$

2.c) Veamos que $g \circ f = \varphi$:

$\forall \left((a_i)_m, (b_j)_n\right) \in R^m x R^n,\ (g \circ f)\left[(a_i)_m, (b_j)_n\right] = g\left[f\left((a_i)_m, (b_j)_n\right)\right] = g\left[\left(a_i b_j\right)_{mxn}\right] =$

$= \varphi\left[(1,0,...,0), (a_1 b_1, ..., a_1 b_n)\right] + \varphi\left[(0,1,...,0), (a_2 b_1, ..., a_2 b_n)\right] + ...$

$+ \varphi\left[(0,0,...,1), (a_m b_1, ..., a_m b_n)\right] = \varphi\left[(1,0,...,0), a_1 (b_1, ..., b_n)\right] + ...$

$+ \varphi\left[(0,1,...,0), a_2 (b_1, ..., b_n)\right] + ... + \varphi\left[(0,0,...,1), a_m (b_1, ..., b_n)\right] =$

$= a_1 \varphi\left[(1,0,...,0), (b_1, ..., b_n)\right] + a_2 \varphi\left[(0,1,...,0), (b_1, ..., b_n)\right] + ...$

$+ a_m \varphi\left[(0,0,...,1), (b_1, ..., b_n)\right] = \varphi\left[(a_1, 0, ..., 0), (b_1, ..., b_n)\right] +$

$+ \varphi\left[(0, a_2, ..., 0), (b_1, ..., b_n)\right] + ... + \varphi\left[(0,0,..., a_m), (b_1, ..., b_n)\right] =$

$= \varphi\left[(a_1, ..., a_m), (b_1, ..., b_n)\right] = \varphi\left[(a_i)_m, (b_j)_n\right]$

Por tanto, $(g \circ f)\left[(a_i)_m, (b_j)_n\right] = \varphi\left[(a_i)_m, (b_j)_n\right] \to g \circ f = \varphi$

2.d) La unicidad de g:

Demostraremos a continuación que el espacio generado por $f(R^m x R^n)$, esto es, $L\left[f(R^m x R^n)\right]$, coincide con $M_{mxn}(R)$, lo cual, por el teorema 1, implicaría que el homomorfismo g es único.

Como es $L\left[f(R^m x R^n)\right] \subseteq M_{mxn}(R)$, probaremos que también tiene lugar la inclusión inversa, $M_{mxn}(R) \subseteq L\left[f(R^m x R^n)\right]$.

$$\forall A \in M_{mxn}(R),\ A = (a_{ij})_{mxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} + ... + \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{mn} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} + ... + a_{mn}\begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} = a_{11} f\left[(1,0,...,0),(1,0,...0)\right] +$$

$$+ a_{12} f\left[(1,0,...,0),(0,1,...0)\right] + ... + a_{mn} f\left[(0,0,...,1),(0,0,...1)\right] =$$

$$= \sum a_{ij} f\left[(u_i)_m,(u_j)_n\right] \in L\left[f(R^m, R^n)\right]$$

Por consiguiente, $M_{mxn}(R) \subseteq L\left[f(R^m x R^n)\right]$,

$\left. \begin{array}{l} L\left[f(R^m x R^n)\right] \subseteq M_{mxn}(R) \\ M_{mxn}(R) \subseteq L\left[f(R^m x R^n)\right] \end{array} \right\} \to L\left[f(R^m x R^n)\right] = M_{mxn}(R)$, de lo cual, por el teorema 1, concluimos que el homomorfismo g es único.

Generalización:

La idea de producto tensorial es de inmediato generalizable a un número cualquiera de espacios vectoriales sobre un cuerpo conmutativo, considerando ahora aplicaciones multilineales definidas desde $\prod_{j=1}^{n} V_j$ hacia un k-espacio vectorial.

Cuando se trata de n espacios vectoriales, $V_1,...,V_n$, sobre un cuerpo conmutativo K, el producto tensorial se define como el par *(f, T)* donde T es un K-espacio vectorial y $f : \prod_{j=1}^{n} V_j \to T$ es una aplicación multilineal tal que para cualquier otra aplicación multilineal $f' : \prod_{j=1}^{n} V_j \to T'$, cualquiera que sea el K-espacio T', existe un único homomorfismo $g : T \to T'$ tal que $g \circ f = f'$.

En forma general podemos, asimismo, definir la idea de producto tensorial de n espacios vectoriales dentro de la teoría de categorías:

Dados n espacios vectoriales $V_1,...,V_n$, consideremos la categoría Φ cuyos objetos son los pares $(f,T),(f',T'),(f'',T''),...$ donde los *T, T', T'',...* son K-espacios vectoriales, y las *f, f', f'',...* son respectivas aplicaciones n-lineales, $f^r : \prod_{j=1}^{n} V_j \to T^r$, de forma que los morfismos del par $\left((f^r,T^r),(f^s,T^s)\right)_\Phi$ son los homomorfismos $g : T^r \to T^s$ tales que $g \circ f^r = f^s$. Se define entonces el producto tensorial de los n espacios vectoriales dados, $V_1,...,V_n$, como un objeto inicial de la categoría Φ.

Es obviamente válido para $n \geq 2$ el teorema 1, expuesto antes para $n=2$, es decir: Si *(f, T)* es un producto tensorial de los espacios $V_1,...,V_n$, entonces $f(V_1x...xV_n)$ genera al espacio T, y, recíprocamente, si $f(V_1x...xV_n)$ genera a T, siendo la aplicación $f(V_1x...xV_n)$ multilineal, entonces se verifica que, cualquiera que sea el par *(f', T')* con $f':\prod_{j=1}^{n} V_j \to T'$ multilineal, existe un homomorfismo $g: T \to T'$, único, tal que $g \circ f = f'$.

Esto permite la expresión de un tensor, t, elemento del espacio tensorial, del tipo siguiente:

$$\forall t \in T,\ t = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f(x_{i1},...,x_{in}) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_{i1} \otimes ... \otimes x_{in}$$

En particular, si consideramos bases de los espacios vectoriales $V_1,...,V_n$ **:**

$$B_1 = \{u_{1i_1}\}, i_1 \in I_1,\ B_2 = \{u_{1i_2}\}, i_2 \in I_2,....,B_n = \{u_{1i_n}\}, i_n \in I_n$$

un sistema de generadores sería:

$$B = \{u_{1i_1} \otimes ... \otimes u_{ni_n}\}, i_j \in I_j$$

Por otra parte, es inmediato que nunca podrá identificarse el producto vectorial $\prod_{j=1}^{n} V_j$ con una parte del espacio producto tensorial $T = \bigotimes_{j=1}^{n} V_j$ pues la aplicación

$$f: \prod_{j=1}^{n} V_j \to T = \bigotimes_{j=1}^{n} V_j$$

no es inyectiva, ya que

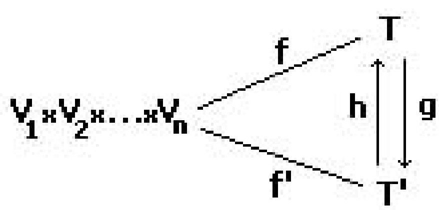
$$f(\alpha x_1, x_2,...,x_n) = f(x_1, \alpha x_2,...,x_n) = ... = f(x_1, x_2,...,\alpha x_n),$$

siendo, como es obvio,

$$(\alpha x_1, x_2,...,x_n) \neq (x_1, \alpha x_2,...,x_n) \neq .... \neq (x_1, x_2,...,\alpha x_n).$$

Unicidad y existencia del producto tensorial de n espacios vectoriales:
El teorema de unicidad:

Supongamos que (f,T) y (f',T') son, ambos, productos tensoriales de los k-espacios vectoriales $V_1,...,V_n$. Veamos que son isomorfos.



por definición, existen homomorfismos únicos

$$g \circ f = f' \qquad [1] \qquad\qquad h \circ f' = f \qquad [2]$$

entonces:

- premultiplicando [1] por h:

$$h \circ (g \circ f) = h \circ f' = f \rightarrow (h \circ g) \circ f = f \rightarrow h \circ g = i_d$$

o sea: $\exists i_d : T \rightarrow T \ (ident) / i_d \circ f = f \wedge h \circ g = i_d$

- premultiplicando [2] por g:

$$g \circ (h \circ f') = h \circ f = f' \rightarrow (g \circ h) \circ f' = f' \rightarrow g \circ h = i_{d'}$$

análogamente: $\exists i_{d'} : T' \rightarrow T' \ (ident) / i_{d'} \circ f' = f' \wedge g \circ h = i_{d'}$

en definitiva:

$$\left.\begin{array}{r} h \circ g = i_d \ (ident\ en\ T) \\ g \circ h = i_{d'} \ (ident\ en\ T') \end{array}\right\} \rightarrow h = g^{-1} \ isomorfismo$$

El teorema de existencia:

Consideremos un cuerpo conmutativo K y un conjunto de $n+1$ K-espacios vectoriales, $V_1, \ldots, V_n, W$.

Sea h una aplicación del producto cartesiano $V_1 x V_2 x \ldots x V_n$ en W :

$$h : V_1 x V_2 x \ldots x V_n \rightarrow W \ ,$$

o sea:

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in V_1 x V_2 x \ldots x V_n, \ h(x_1, \ldots, x_n) \in W$$

Sea también un subpespacio $S \subseteq W$ y una relación R en W definida por la condición:

$$uRv \leftrightarrow u - v \in S \ , \ u, v \in W$$

que es de equivalencia por ser, trivialmente, reflexiva, simétrica y transitiva.

Llamemos W / S al conjunto cociente de W por tal relación de equivalencia, esto es:

$$W / S = \{[x] / \forall y \in [x], x - y \in S\}$$

y sea, finalmente, el homomorfismo de inmersión canónica $j : W \rightarrow W / S$, es decir:

$$\forall x \in W, \ j(x) = [x] \in W / S$$

(es claro que si $x \in S \subseteq W$, entonces $j(x) = [0]$, pues $x - 0 \in S$) [1]

Entonces, veremos que el par $(j \circ h, W / S)$, donde es $j \circ h : V_1 x V_2 x \ldots x V_n \rightarrow W / S$, será el producto tensorial de los n k-espacios vectoriales $V_1 x V_2 x \ldots x V_n$, siempre que el subespacio S sea el espacio generado por los elementos de la forma

$$h(x_1, \ldots, \lambda x_i + \mu x_i^0, \ldots, x_n) - \lambda h(x_1, \ldots, x_i \ldots, x_n) - \mu h(x_1, \ldots, x_i^0, \ldots, x_n)$$

Es decir, veremos que, con esta condición, el producto tensorial será el par (f, T) construido en la forma que se indica en el diagrama, que será conmutativo para cualquier otro espacio T' y cualquier otra aplicación n-lineal f':

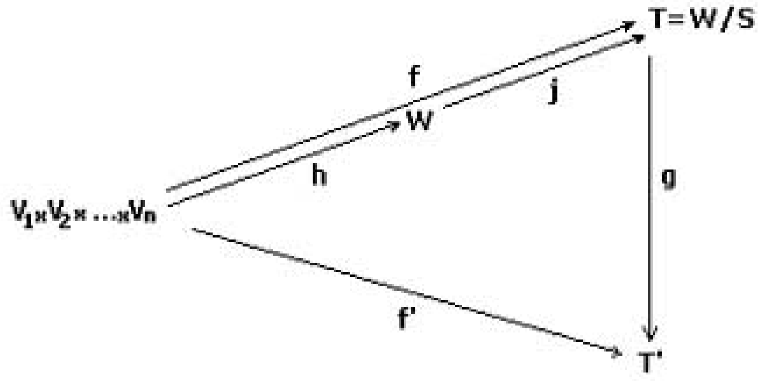


Diagrama 5

La prueba de que el par así construido es producto tensorial de los n k-espacios indicados, requiere dar tres pasos:

- Primero, probar que la aplicación f es multilineal (n-lineal).
- Segundo, que existe un homomorfismo g tal que el diagrama 5 es conmutativo, esto es, tal que $f' = g \circ f$.
- Tercero, que el homomorfismo g es único.

1) La aplicación f es n-lineal:

$$f(x_1,...,\lambda x_i + \mu x_i^0,...,x_n) - \lambda f(x_1,...,x_i,...,x_n) - \mu f(x_1,...,x_i^0,...,x_n) =$$
$$= j \circ h(x_1,...,\lambda x_i + \mu x_i^0,...,x_n) - \lambda j \circ h(x_1,...,x_i,...,x_n) - \mu j \circ h(x_1,...,x_i^0,...,x_n) =$$
$$= j\left[h(x_1,..., \lambda x_i + \mu x_i^0,..., x_n) - \lambda h(x_1,..., x_i,..., x_n) - \mu h(x_1,..., x_i^0,..., x_n)\right] = 0$$

puesto que, por construcción, es

$$h(x_1,...,\lambda x_i + \mu x_i^0,...,x_n) - \lambda h(x_1,...,x_i,...,x_n) - \mu h(x_1,...,x_i^0,...,x_n) \in S$$

y hemos visto en [1] que $j(x) = [0]$, si $x \in S \subseteq W$.

2) Existe el homomorfismo g:

Veamos que si f' es bilineal, cualquiera que sea el k-espacio H, existirá un homomorfismo $g: T \to H$ tal que $f' = g \circ f$

Sea un homomorfismo cualquiera $r: W \to H$. Se tiene

$$r\left[h(x_1,...,\lambda x_i + \mu x_i^0,...,x_n) - \lambda h(x_1,...,x_i,...,x_n) - \mu h(x_1,...,x_i^0,...,x_n)\right] =$$
$$= r\left[h(x_1,...,\lambda x_i + \mu x_i^0,...,x_n)\right] - \lambda r\left[h(x_1,...,x_i,...,x_n)\right] - r\mu\left[(x_1,...,x_i^0,...,x_n)\right] =$$
$$= (r \circ h)(x_1,...,\lambda x_i + \mu x_i^0,...,x_n) - \lambda(r \circ h)(x_1,...,x_i,...,x_n) - (\mu \circ h)(x_1,...,x_i^0,...,x_n) =$$
$$= f'(0x_1,...,\lambda x_i + \mu x_i^0,...,x_n) - \lambda f'(x_1,...,x_i,...,x_n) - f'(x_1,...,x_i^0,...,x_n) = 0$$

ya que f' es, por hipótesis, lineal.

Por tanto, $S \subseteq \ker(r)$ por lo que se induce un homomorfismo $g: T \to H$ tal que $g \circ j = r$, de lo cual: $g \circ f = g \circ (j \circ h) = (g \circ j) \circ h = r \circ h = f'$

3) El homomorfismo g es único:

Pues si hubiera otro $g^*: T \to H$ tal que $g^* f = f'$, repitiendo el razonamiento del teorema 1, diríamos que, puesto que $f(V_1 x ... x V_n)$ genera a $T = W / S$, se tendrá:

$$\forall t \in T = W / S, t = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_{i1},...,x_{in}) \to g^*(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (g^* \circ f)(x_{i1},...,x_{in}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f'(x_{i1},...,x_{in}) = g(t) \to g^* = g$$

Bibliografía:

Bobillo Ares, Nilo C., Dehesa Martinez, C.; Introducción al cálculo tensorial, Universidad de Oviedo, 2005.
Mc Lane, S., Birkhoff, J. H.; Algèbre, Gauthiers-Villars, 1973.
Ryand, Raymond A.; Introduction to Tensor Products of Banach Spaces, Springer, 2002.