# Funciones Proposicionales

**Carmen SÁNCHEZ DÍEZ**

En la exposición de definiciones, teoremas, conclusiones relativas a afirmaciones, negaciones o interpretaciones de muy diversos resultados, aparecen siempre en la matemática, y en todas sus ramas, expresiones de tipo lógico que están generalmente controladas por cuantificadores tanto universales como existenciales. Son funciones de símbolos cuya estructura lógica es la de una función proposicional.

**Función proposicional**
Sea $S$ un conjunto de símbolos y sea $(P,\wedge,\vee)$ el álgebra de Boole de las proposiciones lógicas. Denominamos *función proposicional en variable sobre S*, a una correspondencia tal que a cada símbolo de S le corresponda una proposición de $P$.

$$f: S \to P$$
$$\forall x \in S,\ f(x) = a_x \in P$$

Obviamente, la imagen, $a_x$, del elemento $x$ puede ser una proposición verdadera o bien una proposición falsa. Llamaremos $V_S f$ al conjunto de valores de $S$ para los cuales $f(x)$ es una proposición verdadera. O sea:

$$V_S f = \{x \in S / f(x)\}$$

Esto nos indica que la condición necesaria y suficiente para que un elemento $h \in S$ pertenezca al conjunto $V_S f$ es que $f(h)$ sea una proposición verdadera:

$$h \in V_S f \Leftrightarrow f(h)$$

Se definen la conjunción, disyunción o negación de funciones proposicionales del mismo modo que se definen para las proposiciones lógicas:

*Negación*: es el conector que cambia el valor de verdad de la proposición que conecta. Su tabla de verdad:

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

Conjunción: es el conector de dos funciones proposicionales, $f(x)$, $g(x)$, que da lugar a una proposición verdadera si ambas funciones son proposiciones verdaderas y a una proposición falsa en caso contrario

| *f(x)* | *g(x)* | $f(x)\wedge g(x)$ |
|---|---|---|
| *1* | *1* | *1* |
| *1* | *0* | *0* |
| *0* | *1* | *0* |
| *0* | *0* | *0* |

Disyunción: es el conector de dos funciones proposicionales, *f(x), g(x),* que da lugar a una proposición falsa si ambas funciones son proposiciones falsas y a una proposición verdadera en caso contrario

| *f(x)* | *g(x)* | $f(x)\vee g(x)$ |
|---|---|---|
| *1* | *1* | *1* |
| *1* | *0* | *1* |
| *0* | *1* | *1* |
| *0* | *0* | *0* |

Es útil el uso de los símbolos de cuantificación, los cuantificadores ordinarios, para representar la conjunción o disyunción de un número discreto de valores de una función proposicional:

Sea $S=[h_1,h_2,...,h_k,...]$. Podemos simbolizar:

. $[f(h_1)\wedge f(h_2)\wedge ...\wedge f(h_k)\wedge ...]$ por $(\forall x\in S)f(x)$, o bien, $(\forall x)f(x)$ si se sobreentiende la pertenencia de x al conjunto S.

. $[f(h_1)\vee f(h_2)\vee ...\vee f(h_k)\vee ...]$ por $(\exists x\in S)f(x)$, o bien, $(\exists x)f(x)$ si la pertenecia a S se sobreentiende.

Es decir, se verifican las equivalencias:

$$(\forall x)f(x)\Leftrightarrow [f(h_1)\wedge f(h_2)\wedge ...\wedge f(h_k)\wedge ...]$$
$$(\exists x)f(x)\Leftrightarrow [f(h_1)\vee f(h_2)\vee ...\vee f(h_k)\vee ...]$$

Siempre que $x\in [h_1,h_2,...,h_k,...]$

**Propiedades:**
Se verifican, para la conjunción, disyunción y negación de funciones proposicionales, las propiedades elementales siguientes:

1. $V_S(f(x)\wedge g(x))=V_S f(x)\bigcap V_S g(x)$
Demostración:
$$h\in V_S(f(x)\wedge g(x))\Leftrightarrow f(h)\wedge g(h)\Leftrightarrow h\in V_S f(x)\wedge h\in V_S g(x)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow h\in V_S f(x)\bigcap V_S g(x)$$

2. $V_S(f(x)\vee g(x))=V_S f(x)\bigcup V_S g(x)$
Demostración:

$h \in V_S(f(x) \vee g(x)) \Leftrightarrow f(h) \vee g(h) \Leftrightarrow h \in V_S f(x) \vee h \in V_S g(x) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow h \in V_S f(x) \bigcup V_S g(x)$

3. $V_S(f(x) \wedge g'(x)) = V_S f(x) - V_S g(x)$
Demostración:
$h \in V_S(f(x) \wedge g'(x)) \Leftrightarrow f(h) \wedge g'(h) \Leftrightarrow h \in V_S f(x) \wedge h \in V_S g'(x) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow h \in V_S f(x) \wedge h \notin V_S g(x) \Leftrightarrow h \in V_S f(x) - V_S g(x)$

4. $V_S f'(x) = \not\subset V_S f(x)$ (el símbolo $\not\subset$ significa "complementario de")
Demostración:
$h \in V_S f'(x) \Leftrightarrow f'(h) \Leftrightarrow h \notin V_S f(x) \Leftrightarrow h \in \not\subset V_S f(x)$

**Propiedades derivadas del uso de los cuantificadores:**
Es sencillo establecer relaciones muy simples entre expresiones que usan el cuantificador universal, $\forall$, con expresiones que utilizan el cuantificador existencial $\exists$. Se tiene:

1. $[(\exists x) f(x) \vee (\exists x) g(x)] \Leftrightarrow (\exists x)[f(x) \vee g(x)]$
2. $[(\exists x) f(x) \wedge (\exists x) g(x)] \Leftrightarrow (\exists x)[f(x) \wedge g(x)]$
3. $[(\forall x) f(x) \vee (\forall x) g(x)] \Leftrightarrow (\forall x)[f(x) \vee g(x)]$
4. $[(\forall x) f(x) \wedge (\forall x) g(x)] \Leftrightarrow (\forall x)[f(x) \wedge g(x)]$
5. $(\forall x) f(x) \Rightarrow f(x_0) \Rightarrow (\exists x) f(x)$
6. $[(\forall x) f(x)]' \Leftrightarrow (\exists x) f'(x)$
7. $[(\exists x) f(x)]' \Leftrightarrow (\forall x) f'(x)$

Las dos últimas fórmulas, en concreto, permiten escribir las leyes de De Morgan de manera sencilla:

$$(\exists x) f(x) \Leftrightarrow [(\forall x) f'(x)]'$$
$$(\forall x) f(x) \Leftrightarrow [(\exists x) f'(x)]'$$

**Las funciones proposicionales de dos o más variables:**
Sean $S_1, S_2$ dos conjuntos de símbolos y sea $(P, \wedge, \vee)$ el álgebra de Boole de las proposiciones lógicas. Denominamos *función proposicional en dos variables sobre $S_1$* y $S_2$, a una correspondencia tal que a cada símbolo del producto cartesiano $S_1 x S_2$ le corresponda una proposición de $P$.

$$f : S_1 x S_2 \rightarrow P$$

$$\forall (x,y)\in S_1 x S_2,\ f(x,y)=a_{xy}\in P$$

Asimismo, si consideramos $n$ conjuntos de símbolos, $S_1, S_2, \ldots, S_n$, y siendo $(P, \wedge, \vee)$ el álgebra de Boole de las proposiciones lógicas, denominamos *función proposicional en n variables sobre* $S_1$ *,…,* $S_n$, a una correspondencia tal que a cada símbolo del producto cartesiano $S_1 \times \ldots \times S_n = \prod_{i=1}^{n} S_i$ le corresponda una proposición de $P$.

$$f : \prod_{i=1}^{n} S_i \to P$$

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} S_i,\ f(x_1, \ldots, x_n) = a_{x_1 \ldots x_n} \in P$$

Podemos disminuir el número de variables de la función proposicional fijando algunas de ellas. Así, por ejemplo, las funciones proposicionales siguientes son funciones de una sola variable:

$(\forall x) f(x,y),\ (\exists x) f(x,y)$ son funciones proposicionales de la variable $y$.
$(\forall y) f(x,y),\ (\exists y) f(x,y)$ son funciones proposicionales de la variable $x$.

Y las propiedades para estas funciones proposicionales son las mismas que las propiedades vistas anteriormente para funciones proposicionales de una sola variable.

En general, con respecto al uso de los cuantificadores se verifican de forma obvia las propiedades:

1) $(\exists x)(\exists y) f(x,y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x) f(x,y)$
2) $(\forall x)(\forall y) f(x,y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x) f(x,y)$
3) $(\exists x)(\forall y) f(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x) f(x,y)$

y, si los espacios de símbolos coinciden ($S_1 = S_2$), se tiene:

1) $(\forall x, y) f(x,y) \Rightarrow (\forall x) f(x,x) \Rightarrow (\exists x) f(x,x) \Rightarrow (\exists x, y) f(x,y)$
2) $(\exists x)(f(x) \wedge g(x)) \Rightarrow (\exists x, y)(f(x) \wedge g(y)) \Rightarrow (\exists x) f(x) \wedge (\exists y) g(y) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow ((\exists x) f(x) \wedge (\exists x) g(x))$
3) $(\forall x)(f(x) \vee g(x)) \Rightarrow (\forall x, y)(f(x) \vee g(y)) \Rightarrow (\forall x)(f(x) \vee g(x))$

Ejemplos:

1) La expresión de la continuidad de una función $f$ en un punto $x_0 \in R$ es, en la formulación de Cauchy:

$$(\forall \varepsilon)(\exists \delta)(\forall h)(|h| < \delta \Rightarrow |f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon),\ \text{con}\ \varepsilon > 0, \delta > 0$$

2) La continuidad de una función $f$ en un intervalo abierto $a < x < b$ se expresa por:

$$(\forall \varepsilon)(\forall x)(\exists \delta)(\forall h)(|h| < \delta \Rightarrow |f(x+h) - f(x)| < \varepsilon)$$

3) Si intercambiamos en la expresión anterior $(\exists\delta)$ por $(\forall x)$ tenemos la condición de la continuidad uniforme:

$$(\forall\varepsilon)(\exists\delta)(\forall x)(\forall h)(|h| < \delta \Rightarrow |f(x+h) - f(x)| < \varepsilon)$$

**Bibliografía:**


Hilbert, D._Ackermann, W.; "Elementos de Lógica Teórica", Editorial Tecnos, 1962, Madrid.

Suppes, P._Hill, S.; "Introducción a la Lógica Matemática", Ed. Reverté, 1986, Barcelona.

Russel y Whitehead, "Principia Matemathica", Ed. Cambridge University Press, 1927-1994, Cambridge.