PROBLEMAS QUE CONDUCEN A ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN

Por Pedro Castañeda Porras.
Master en Matemática Avanzada para la Ingeniería.

Universidad de Pinar del Río, Martí Final, # 270. Pinar del Río. Cuba.
e-mail: pcasta@mat.upr.edu.cu

Resumen:

Este trabajo trata sobre la deducción de las Ecuaciones Diferenciales a partir de situaciones físicas que se presentan en determinados problemas de carácter físico y/o técnico. Los ejemplos ilustraran los pasos del modelado, es decir, hacia un planteamiento matemático y su solución, y la interpretación física del resultado. Se dedicará en este espacio a la modelación de problemas que conduce a Ecuaciones Diferenciales de segundo orden, que son particularmente convenientes para el uso de un Asistente Matemático(DERIVE), el cual nos brinda determinados ficheros para obtener soluciones tanto general como particular, y algo importante es el tratamiento gráfico de la familia de curvas (solución general) y la solución particular, para poder hacer un análisis e interpretación geométrica de la situación problemática, pues de otra forma no es posible en un tiempo razonable.

Introducción:

Las Ecuaciones Diferenciales tienen una importancia fundamental en la Matemáticas para la ingeniería debido a que muchos problemas se representan a través de leyes y relaciones físicas matemáticamente por este tipo de ecuaciones.
Es interés de este trabajo la deducción de las Ecuaciones Diferenciales a partir de situaciones físicas que se presentan en determinados problemas de carácter físico y/o técnico. A esta transición del problema, al Modelo Matemático correspondiente se llama ***Modelado***. Este método tiene una gran importancia práctica para el ingeniero y se ilustra por medio de ejemplos típicos.
En estos ejemplos se ilustraran los pasos del modelado, es decir, hacia un planteamiento matemático y su solución, y la interpretación física del resultado. Se dedicará en este espacio la modelación de problemas que conduce a Ecuaciones Diferenciales de segundo orden y esto lo justifica desde el punto de vista teórico y práctico pues se verán más fáciles si uno se concentra primeros en tales ecuaciones, pues de esta manera los estudiantes familiarizado con los conceptos de segundo orden, resultaría más fácil los conceptos, métodos y resultados hacia las de orden superior.

Las Ecuaciones Diferenciales de segundo orden son particularmente convenientes para el uso de un Asistente Matemático(DERIVE), el cual nos brinda determinados ficheros para obtener soluciones tanto general como particular, y algo importante es el tratamiento gráfico de la familia de curvas (solución general) y la solución particular, para poder hacer un análisis e interpretación geométrica de la situación problemática, pues de otra forma no es posible en un tiempo razonable.

Ideas básicas.

Se infiere que el estudiante verá que la aplicación de las matemáticas a un problema de ingeniería consiste básicamente de tres fases.

- **Modelo:** translación de la información física dada a una forma matemática(modelo). De esta manera se obtiene un modelo matemático de la situación física. Este modelo puede ser una ecuación diferencial, un sistema de ecuaciones lineales o alguna otra expresión matemática.
- **Resolución.** Tratamiento del modelo por medio de métodos matemáticos. Esto lleva a la solución del problema dado en forma matemática.
- **Interpretación.** Interpretación del resultado matemático en términos físicos.

Observación: Es posible que una Ecuación Diferencial tenga más de una variable dependiente, x e y, y una variable independiente, las ecuaciones de ese tipo no se estudiaran aquí.

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN.

Las Ecuaciones Diferenciales Lineales de segundo orden tienen la forma:

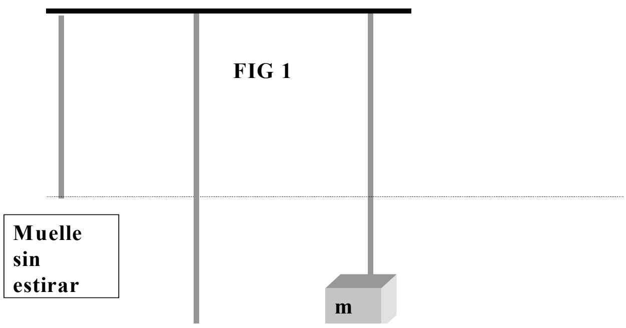
$y'' + f(x)y' + g(x)y = r(x)$ (1). donde los resultados que se obtengan se generalizan con facilidad a ecuaciones lineales de cualquier orden, que nosotros no trataremos en este trabajo.

Es posible obtener en forma sencilla una solución general y(x) de (1), si se conoce una solución general $y_h(x)$ de la ecuación homogénea correspondiente.

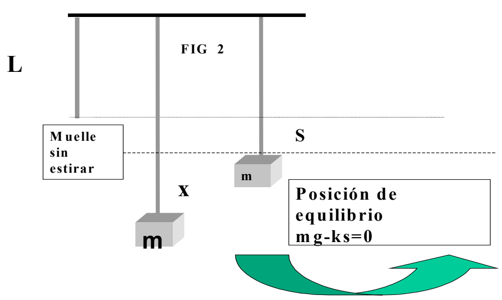
Se tiene entonces que, y(x) se obtiene al sumar cualquier solución $\tilde{y}(x)$ de (1), que no contenga constantes arbitrarias, a $y_h(x)$, es decir,

$Y(x) = y_h(x) + \tilde{y}(x)$.

PROBLEMAS QUE CONDUCEN A EDO DE ORDEN 2.



MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE



Ley de Hooke

La fuerza F de restitución, opuesta a la dirección del alargamiento s a la cual se encuentra sometido un resorte está dada por F=ks donde k es una constante de proporcionalidad que depende de cada resorte y s es la elongación.

La fuerza neta F está dada por la segunda ley de Newton F = ma, dode

$a = x''(t)$ luego $mx''(t) = -(s+x)k + mg = -kx + mg - ks = -ks$

el signo negativo significa que la fuerza de restitución actúa en dirección opuesta al

1

$$x'' + (k/m)x = 0$$

ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

$$x'' + \omega^2 x = 0$$

Problema:

Un peso de 24 lb, sujeto al extremo de un resorte, lo estira 4 pulgadas. Escribir la ecuación del movimiento si el peso en reposo, se suelta desde el punto que está 3 pulgadas por encima de la posición de equilibrio.

Respuesta.

Determinación de k

Según la ley de Hooke 24 =k.(1/3) luego

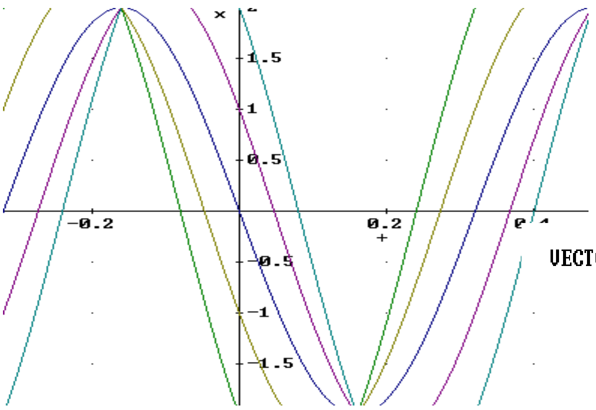
K =72 lb/pie **Planteamiento del modelo matemático(E.D.)**

Como m =24/32 = 3/4 se tiene w^2= 72/(3/4)=96 luego la ecuación es

$$x'' + 96x = 0$$

Solución general vía DERIVE.

$$x = A\cos\sqrt{96}\,t + B\sin\sqrt{96}\,t$$



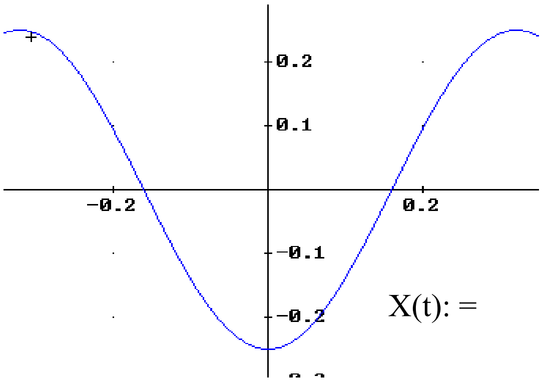
Familia de curvas

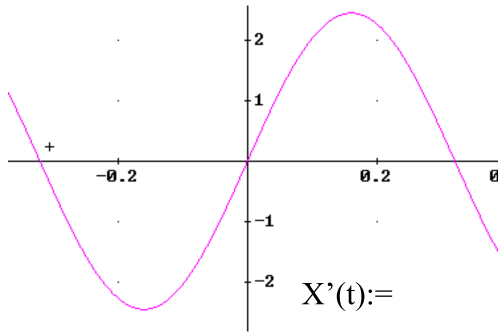
VECTOR(VECTOR(x := b·COS(√96·t) + c·SIN(√96·t), b, -2, 2), c, -2, 2)

$$\begin{cases} x(0) = -0.25 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

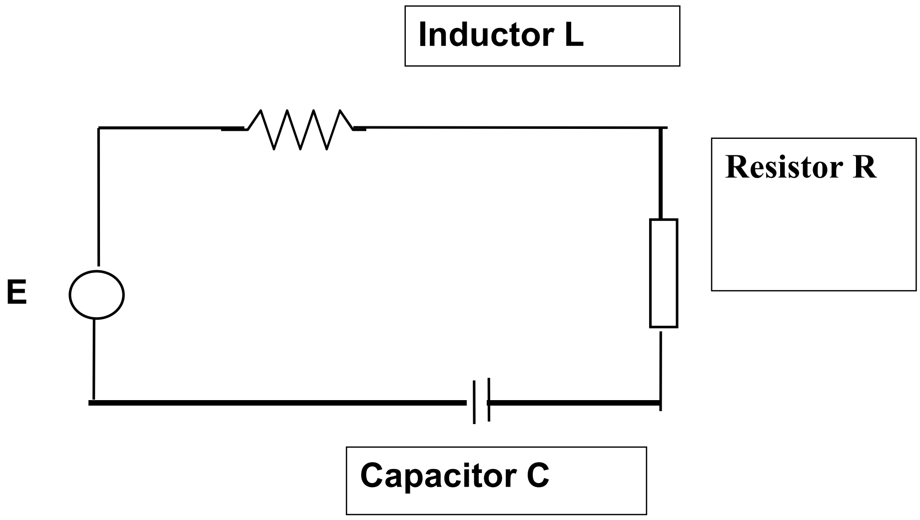
Ajustes de condiciones iniciales

$$x = -0.25\cos\sqrt{96}t$$





CIRCUITOS R L C CONECTADOS EN SERIE



Entonces la caída de voltaje a través de la resistencia, la inductancia y la capacitancia están dada por:

Inductor Inductancia L: henrys (h) **Caída de voltaje: L(di/dt)**	**Resistor Resistencia R: ohms (W)** **Caída de voltaje: iR**	**Capacitor Capacitancia C: farads (*f*)** **Caída de voltaje:(1/C)q**

Aplicando la segunda Ley de Kirchhoff, la suma de las caída de voltaje es igual al voltaje E(t) suministrado al circuito, esto es

$$L(di/dt)+ iR+(1/C)q=E(t)$$

RECORDANDO QUE $I = dq/dt$

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=E(t)$$

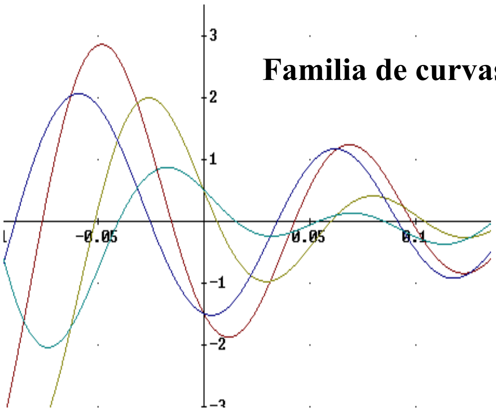
Problema:

Un circuito tiene en serie una fem E = 100sin(60t) v, un resistor de 2 Ω, un inductor de 0.1 h y un capacitor de 1/260 f. Si la corriente inicial y la carga inicial en el capacitor son ambas cero, calcular la carga en el capacitor en cualquier instante de tiempo t.

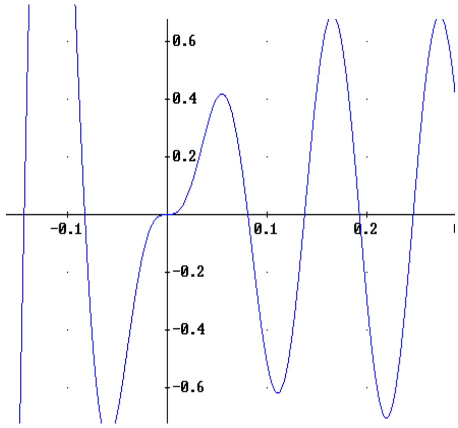
Solución Vía DERIVE:
Solución General.

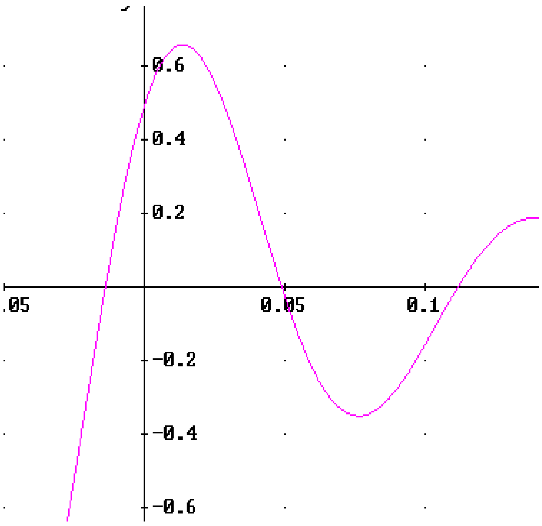
$$q = e^{-10t}(A\sin(50t) + B\cos(50t)) - \frac{25}{61}\sin(60t) - \frac{30}{61}\cos(60t)$$

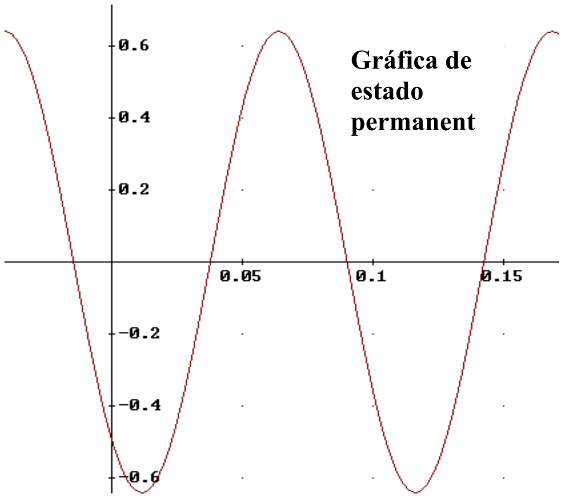
Solución Particular



Familia de curvas







Gráfica de estado permanent

APLICACIONES GEOMETRICAS

•Trayectorias isogonales.

$$F(x, y, \frac{y^1 - k}{1 + ky^1}) = 0$$

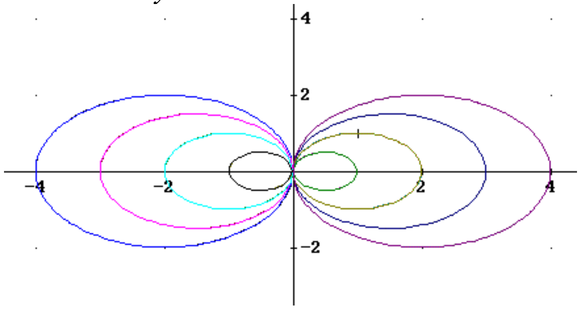
•Trayectorias Ortogonales

$$F(x, y, -\frac{1}{y^1}) = 0$$

PROBLEMA:

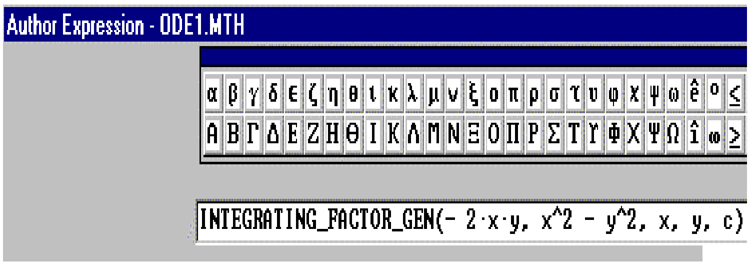
Hallar la ecuación de la familia de las curvas que son ortogonales a la familia.

$$x^2 + y^2 = 2ax \;.$$



Ecuación Diferencial de las Trayectorias Ortogonales

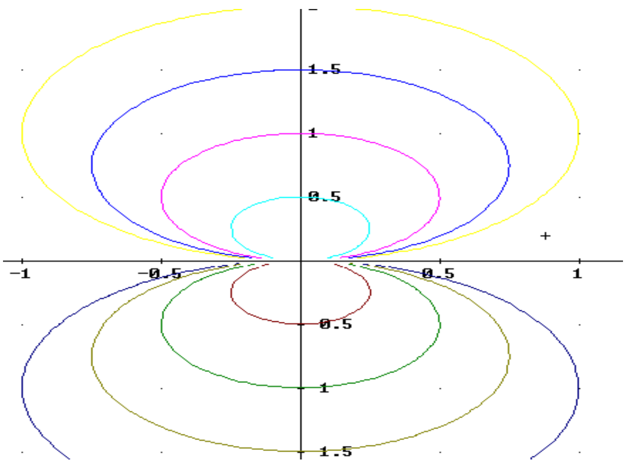
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

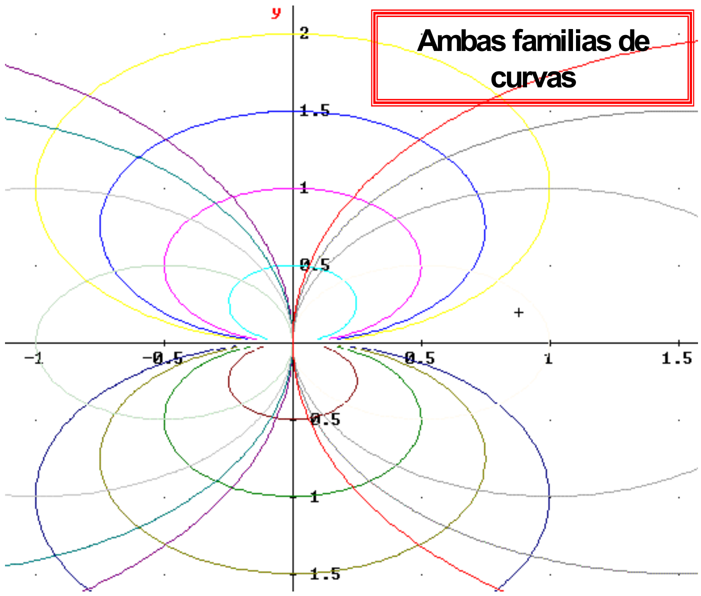


$$-\frac{x^2}{y} - y = c$$

$$\mathrm{VECTOR}\left(-\frac{x^2}{y} - y = c,\ c,\ -2,\ 2,\ 0.5\right)$$

Familia de curva ortogonales





Comentarios:

- Se puede observar en la resolución de problemas que los Asistentes Matemáticos le permiten a los estudiantes: interpretar situaciones, a través de la visualización gráfica de las soluciones, desarrollar habilidades en el manejo de la computación, realizar cálculos en las asignaturas afines a la carrera para enfrentar cualquier situación técnica, diseñar, evaluar y modelar, de ahí la gran utilidad que estos presentan en la enseñanza de la Matemática.
- La solución de problemas esta sustentado en el aprendizaje significativo, es decir, tomando en cuenta el nivel de partida de los estudiantes y una motivación que orienta al alumno hacia el problema, la cual lleva implícito una contradicción dialéctica. El profesor a través de un sistema de pregunta logra que los estudiantes resuelvan los diferentes problemas.
- Los alumnos presentan ciertas dificultades a la hora de formular las relaciones a utilizar en el modelo, a partir de los datos del problema, por no tener claro los conceptos físicos utilizados en el mismo, de ahí la importancia de dichos conocimientos.
- Por último una vez obtenido el modelo, se evalúa el mismo a través de su comprobación, mostrando la compatibilidad del mismo con cada uno de los ejemplos resueltos.

CONCLUSIONES

- La aceptación del ordenador por buena parte del profesorado, tiene su raíz en el convencimiento de su utilidad y en la satisfacción de verse identificados con ciertos valores, como la modernidad, de la cual el ordenador es un símbolo popular.
- La utilidad de los ordenadores en la mejora de la docencia de las matemáticas no es cuestión de todo o nada, sino de un uso juicioso de la herramienta.
- Los beneficios pedagógicos que proporciona la incorporación del Asistente son:
  1. Los estudiantes conocen más profundamente los algoritmos que en cursos anteriores y los programas siendo capaces de hacer modificaciones en los mismos para lograr otros propósitos.
  2. Los estudiantes medios reciben estímulos importantes al percibir que no deben ser capaces de ser brillantes manipuladores algebraicos para llegar a dominar el pensamiento abstracto.
  3. Muchos conceptos nuevos son encontrados por el alumno a través de su experiencia con el software
  4. A lo largo del curso los estudiantes se sienten más motivados hacia la asignatura que en cursos anteriores debido a:

4.1) Una mayor vinculación a su especialidad, debido a la posibilidad de resolver problemas más reales y de interés.

4.2) Un peso menor de los cálculos manuales.

4.3) Visualización gráfica de los resultados.

5. Los docentes se vinculan más a la especialidad.

BIBLIOGRAFIA

1) **Kreyszig, E.** (1991). Matemática Avanzadas para Ingeniería. Volumen I. Editores Noriega.
2) **Leyva, P.** (1985). Ecuaciones Diferenciales y sus Aplicaciones. 2da ed. Ciudad de La Habana: Pueblo y Educación.
3) **Pontriaguin, L.S**. (1978). Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.1ra ed. C. de la Habana: ed Pueblo y Educación.
4) **Pérez, P.** (1998). Cálculo Infinitesimal Asistido por Ordenadores. Dpto. Matemática Aplicada. Universidad Politécnica de Valencia: Servicios de Publicaciones; SPUPV98 - 1498.
5) **Sánchez, J.V., Sánchez, E.A. y García, L.M**. Curso de Prácticas de Matemáticas para primeros cursos de Ingeniería. Universidad Politécnica de Valencia, 1997.

Pedro Castañeda Porras
pcasta@mat.upr.edu.cu