SÍNTESIS DIDÁCTICA DE LA CONJETURA DE POINCARÉ Y DE SU SOLUCIÓN

Joaquín González Álvarez.

Entre los años 2002 y 2003 el matemático ruso Grigori Perelman colocó en la prestigiosa página de Internet, *arXiv* una serie de artículos en los cuales sostenía que con lo expuesto en los mismos daba solución a un problema propuesto por Henri Poincaré un siglo antes, conocido como la Conjetura de Poincaré, sin que no obstante importantes acercamientos a la solución, no se había logrado la misma. Entre las mas acertadas propuestas de solución aparecieron las de Bill Thurston y Richard Hamilton en las que mucho se basó Perelman y así lo reconoce en sus trabajos.

La solución por Perelman, la adjudicación e inexplicable no aceptación de la muy importante Medalla Fields, acaparó la atención no sólo de matemáticos y otros especialistas, sino también del público llano. Consecuentemente, aparecieron publicaciones de todo tipo que trataban de adecuarse a distintos sectores atendiendo a los distintos niveles de preparación de los destinatarios. Pero es el caso que dada la complejidad tanto de lo que plantea la conjetura a pesar y quizás por eso mismo, de la aparente simplicidad e intrascendencia del enunciado y del instrumentlal matemático de gran complejidad necesario para la cabal comprensión, ésta ha llegado a muy pocos, a todos los niveles incluyendo a especialistas. Sin embargo hay una gran cantidad de estudiosos que continúan (continuamos) interesados en tener aunque sea una idea aproximada de lo esencial del tema en cuestión. Pensando en esta situación, y para tratar personalmente de aclararme ideas al respecto, me he decidido a preparar estas líneas producto de mis dudas y de los esfuerzos de estudio e investigación que me han permitido el modesto acercamiento que me propongo compartir con los lectores.

Para poder dar una idea sobre lo que constituyó la Conjetura de Poincaré y el aporte definitivo de Perelman, es necesario ensayar una sucinta introducción. La Conjetura de Poincaré se inscribe en una de las menos tratadas ramas de la matemática: la Topología.

Apartándome un tanto del estricto rigor, diré que la Topología se ocupa de las figuras geométricas de una forma muy peculiar. En Topología son equivalentes (homeomórficas) dos figuras A y B aunque no se parezcan en nada con tal que cada punto en A tenga su correspondiente en B y como vecinos los puntos correspondientes a los vecinos que tenía en A. Así una rosquilla o donut (geométricamente *toro*) y una taza de café son topológicamente equivalentes (homeomórficas). Y también una pelota de ping-pong y un dado, o una bola de billar y un huevo, etc. Interesa sólo la superficie exterior o cascarón. Las superficies que tienen, como el toro, uno o más huecos se denominan no conexas y las que como la esfera no tienen huecos son conexas, El número de huecos determinan el género de una superficie, así la esfera es de género cero y el toro lo es de género uno. Las superficies que son homeomórficas son del mismo género. Una superficie puede deformarse (evolucionar) hasta otra que será homeomórfica con ella.

Y a propósito de esferas, en Topología hay esferas insólitas, la 1-esfera o esfera de una sola dimensión: la circunferencia, la 2-esfera o esfera de dos dimensiones: el cascarón de una esfera. Decimos dos dimensiones porque bastan dos coordenadas (longitud y latitud) para ubicar un punto en su superficie, y la mas importante para la Conjetura, la 3-esfera o "esfera" de tres dimensiones. Recordar que es sólo la superficie; ¡imposible de visualizar!, pero sí de dar su fórmula. Cualquier punto de la 3-esfera o triesfera viene dado por 4 coordenasas x,y,z,u, tales que $x^2+y^2+z^2+u^2=r^2$. Fijarse que cada "esfera" de dimensión *n* descrita está embebida, "sumergida" en un espacio de dimensión *n+1*. La 3-esfera si bien nos fijamos, se aviene con una superficie que envuelve un espacio de 3 dimensiones como el que nos sirve de "morada" o sea como el que se aviene a nuestro Universo (por demás conexo) embebido, sumergido en un espacio de 4 dimensiones al cual no podemos "salir" para comprobar la forma del Universo y que por tanto tenemos que "deducirla" desde "adentro" y ese es el fin secundario de la teoría de Poincaré, llegar a la conclusión de que la forma del Universo es una superficie topológicamnete equivalente (homeomórfica) a una 3- esfera.

Antes de seguir adelante es necesario presentar un concepto muy importante en topología: el de lazo, Un lazo puede pensarse como un segmento lineal que une sus extremos. Dos lazos son equivalentes si uno puede deformarse hasta igualarse al otro, Con los lazos puede efectuarse la operación de composición con la cual se obtiene de dos lazos uno sólo resultado de unir los "recorridos" de cada uno de ellos. Un conjunto de lazos constituyen un *grupo* con relación a la composición, si al componer cualesquiera dos de ellos el resutado es un lazo de ese conjunto. A ese grupo se le llama fundamental. Para que dos variedades topológicas sean homeomórficas tienen que tener un grupo fundamental con el mismo número de clases de elementos distintas entre si.

Y es el caso que la 3-esfera y sus equivalentes topológicas son las únicas superficies en las cuales, si se dibuja un lazo o camino que empezando en un punto vuelve al mismo, puede constreñirse hasta reducirse a un punto sin abandonar la superficie (es fácil darse cuenta de que en el toro se pueden trazar lazos que no pueden constreñirse). Es por esta simpleza (simpleza que ha tardado un siglo en demostrarse) que la Conjetura de Poincaré lo que viene a decir es que toda superficie en la que un lazo puede constreñirse hasta un punto es homeomórfica con la 3-esfera. En una esfera es fácil darse cuenta que cualquier lazo dibujado en su superficie la corta en dos superficies que no son esferas De modo que todos los lazos en una esfera son de la misma clase, son todos homeomórficos entre si, todos la cortan en dos superficies que no son esferas, el conjunto de esos lazos constan topológicamente de una sola clase de elementos, su grupo fundamental es un grupo trivial. Sin embargo en un toro hay dos clases de lazos, los que lo dividen en dos partes iguales y los que no, su grupo fundamental por lo tanto, es no trivial, será distinto al de la esfera y en consecuencia esfera y toro no son homeomórficas.

Para tratar de demostrar lo que afirma la Conjetura, Hamilton ideó la utización del Flujo de Ricci el cual es una ecuación diferencial de apariencia muy sencilla:

$$\partial g/\partial t=-2R_{ic}$$

Donde *g* se refiere a las medidas de distancias (la métrica) en una superficie siguiendo la geometría esférica de curvatura positiva de Riemann utilizada por Einstein en su Teoría de la Relatividad y R_{ic} el tensor de curvatura de Ricci que conlleva una derivación pues es igual a $-1/2.(\Delta g)$ donde Δ es el operador laplaciano. Estas igualdades permiten escribir el flujo de Ricci de forma annáloga a la ecuación del calor:

$$\partial g/\partial t=\Delta g. \qquad (1)$$

El tensor de Ricci y *g* están relacionados así: $R_{ic}=\lambda g$ (λ constante), lo que puesto en el flujo de Ricci conduce a una expresión de *g* que sucesivas aplicaciones que conllevan reescalado y renormalización del mismo, conducentes a la obtención de autosemejanzas con invarianza de escala, llevarían a demostrar que la métrica final a la cual converja el proceso, corresponde a una triesfera homeomófica con la variedad inicial y por tanto que cumple con el requisito de que un lazo en su superficie puede constreñirse en un punto, con lo cual se demuestra la Conjetura. Lo que acabamos de decir, intentamos en lo que sigue reducir a una exposición abreviada y elemental, utilizando una terminología coloquial y transgrediendo un tanto el rigor en aras de lograr algo de claridad en este tema por demás en lo profundo, sumamente complejo. En primer lugar veamos como obtenemos una solución de la ecuación del Flujo para lo cual sustituimos el tensor curvatura por λg que es la expresión de la métrica riemanniana de Einstein y que es la métrica de la esfera siendo $\lambda>0$ una constante. Se tendrá, integrando: $g=-\lambda gt +C$ y como para $t=0$, $g=g_0$, se obtiene la solución tipo solitón:

$$g=(1-2\lambda t)g_0 \qquad (2)$$

Pero resulta que en ese proceso de aplicación del flujo de Ricci se presenta un valor del tiempo $t=1/2\lambda$ en el cual g, como vemos, se anula (se dice *explota*) que impide la secuencia del flujo, dificultad que Hamilton no pudo superar y es ahí donde interviene la genial idea de Perelman introduciendo una adecuación al proceso ya esbozado por Hamilton conocido como cirugía el cual consiste en cortar (amputar) la "zona" topológica donde aparece la dificultad y unir los extremos que quedaron libres, permitiendo la continuidad de aplicación del flujo hasta la extinción de éste en una variedad topológica que cumple la contracción de lazos hasta un punto y por tanto lo estipulado en la Conjetura de Poincaré. La aplicación continuada del Flujo antes y después de cada cirugía, se lleva acabo multiplicando cada g obtenida (segundo miembro de la solución que antes obtuvimos) a la vez que t se sustituye por t/λ y la distancia x (implícita en g_0) dividiéndola por $\lambda^{1/2}$ (operación de reescalado), comprobándose en cada ocasión que la g obtenida es solución del la ecuación del Flujo. Si denotamos por g_n la correspondiente al enésimo reescalado y por λ^n la constante, tomando valores altos pero finitos para n, se tendrá algo semejante a $g_n=\lambda^n g_0$, proceso llamado renormalización que nos muestra que la métrica obtenida es semejante a la tomada inicialmete reescalada en λ, Extremando lo coloquial, podríamos decir que el proceso de renormalización viene a consistir en agrupar elementos autoemejantes como los resultados de aplicar el Flujo a g, en un solo elemento *gordo* que conserva las propiedades que interesan de los elementos aislados. Claro que suena poco científico, Richard Feyman ha dicho que la renormalización le parece no matemática sin embargo ayuda significativamente en importantes tópicos de la física de lo muy pequeño como la mecánica cuántica y otras, y es precisamente Feyman alguien que la utiliza profusamente en la evitación de los indeseados infinitos.

Debo explicar lo que indiqué sobre el reescalado de la distancia x implícita en g_0. Propongo el siguiente proceso, en el que me valgo de la analogía entre el Flujo de Ricci expresado de la forma (1) con la ecuación de Schrödinger:

$$\partial\psi/\partial t=(h/2\pi mi)\Delta\psi$$

cuya solución es:

$$\psi=\text{const.}\exp(-2\pi i/h(Et-px)) \qquad (3)$$

Por analogía con (3) propongo como solución de (1):

$$g=k.\exp(At+Bx) \qquad (4)$$

lo cual nos indica que lo será si $B=A^{1/2}$. Además para t=0 vemos $g_0=k.\exp(A^{1/2}x)$

Por (4) vemos , nos lleva a $\partial g/\partial t= kAg$, igualdad que al integrarla conduce a:

$$g=(1+kAt)g_o$$

que nos recuerda a (2) y sugiere la sustitución. $kA=-2\lambda$, con lo que teniendo en cuenta la expresión que acabamos de obtener para g_0, se tendrá:

$$g=(1-2\lambda t).k.\exp(A^{1/2}x)$$

y como ya vimos A es proporcional a λ, nos parece entender porque el reescalado de la distancia x se obtiene mediante la división de la misma por $\lambda^{1/2}$.

Demás está decir que he utilizado términos coloquiales como cortar, amputar, unir extremos, en aras de hacer posible ¿visualizar? lo que realmente son operaciones matemáticas con ecuaciones y gráficos matemáticos.

Es muy importante que se advierta que la relativa sencillez del intento de explicación de la Conjettura de Poincaré y del Flujo de Ricci que hemos ensayado, ni remotamente refleja la enorme complejidad y dificultad que tales temas encierran en su profunda esencia, pero creo que hemos podido llegar a tener una idea de lo que significa la Conjetura y en que consistió el proceso de demostración mediante el Flujo de Ricci.

Bibliografía consultada

- Morgan J. y G.Tian. Ricci Flow and the Poincaré Conjecture. American Mathematical Society. Clay Mathematics Institute.
- O´Shea J. The Poincaré Conjecture. Walker & Company. New York.

Joaquín GONZÁLEZ ÁLVAREZ
j.gonzalez.a@hotmail.com