De la Geometría Plana a las Geometrías Curvas

1. La geometría
La geometría, o geometría absoluta usa los conceptos intuitivos de punto, recta y plano, relacionados por condiciones postuladas o axiomas. Si nos ceñimos a un espacio bidimensional, se definen, a partir de estos entes, los conceptos de distancia, de segmento y de ángulo.
- Distancia:
Si es E el conjunto de todos los puntos, se denomina distancia a la correspondencia d:E→E tal que verifica las condiciones siguientes:

$$\forall a,b \in E, d(a,b) \in E$$

$$si\ a = b,\ d(a,b) = 0$$

$$\forall a,b \in E,\ d(a,b) = d(b,a)$$

$$\forall a,b,c \in E,\ d(a,c) \le d(a,b) + d(b,c)$$

$$\forall x \in R, \forall a \in E, \exists b_x \in E / d(a,b_x) = x$$

- Segmento:
Es el conjunto de puntos de una recta comprendido entre dos de ellos, que se denominan extremos del segmento.
- Ángulo:
Es la abertura definida por dos rectas que se cortan. El punto de corte es el vértice del ángulo.
- Ángulo recto:
Es la cuarta parte de un giro completo.
- Circunferencia:
Es el conjunto de los puntos que distan lo mismo de un punto fijo. El punto fijo se llama centro de la circunferencia, y la distancia común es el radio.

- Postulados:
Se postulan los axiomas siguientes:
Axioma 1: Por dos puntos, A y B, pasa una recta única.
Axioma 2: Todo segmento de extremos A y B puede prolongarse infinitamente.
Axioma 3: Un punto y un segmento definen una única circunferencia.
Axioma 4: Todos los ángulos rectos son congruentes.

2. La geometría plana o euclidiana
Es la geometría intuitiva. Se definen en ella puntos, rectas, circunferencias, segmentos, ángulos, ángulo recto, condición de paralelismo y perpendicularidad de las rectas, distancia, longitud de un segmento, etc.

Si tomamos como concepto base el de punto, podemos construir la geometría euclidiana en el plano mediante las definiciones de los demás elementos y los correspondientes postulados de relación.

2.1. Definiciones:

Plano euclidiano: es el conjunto de todos los puntos.
Recta: es el lugar geométrico de los puntos en una misma dirección.
Circunferencia de centro O: es el lugar geométrico de los puntos que distan igual del punto O.
Segmento de extremos los puntos A y B: lugar geométrico de los puntos de la línea recta que pasando por A y B están situados entre A y B.
Ángulo: es cualquiera de las dos aberturas comprendidas entre dos rectas que se cortan en un punto único P, el cual se llama vértice del ángulo.
Ángulo recto: es el ángulo cuya abertura es la cuarta parte de un giro completo.
Distancia en el plano euclidiano E: Es la correspondencia $d:E \rightarrow E$ tal que verifica las condiciones siguientes:

$$\forall a,b \in E, d(a,b) \in E$$

$$si\ a = b,\ d(a,b) = 0$$

$$\forall a,b \in E,\ d(a,b) = d(b,a)$$

$$\forall a,b,c \in E,\ d(a,c) \le d(a,b) + d(b,c)$$

$$\forall x \in R, \forall a \in E, \exists b_x \in E / d(a,b_x) = x$$

Longitud de un segmento AB: es la distancia desde el punto extremo A al punto extremo B.
Paralelismo de rectas: dos rectas son paralelas si no tienen puntos comunes.
Perpendicularidad de rectas: dos rectas que se tocan en un punto P se dicen perpendiculares, si el ángulo que forman con vértice en P es recto.
Dos ángulos ϕ_1 y ϕ_2 se dicen suplementarios si suman dos rectos. Lo indicaremos así: $\phi_1 + \phi_2 = \pi$ ($\pi = 180^{\circ}$).

2.2. Consideraciones:

- Recta que corta a otras dos: Si una recta r corta a dos rectas, l_1 y l_2, en puntos P y M, respectivamente, formará con ambas cuatro ángulos por cada uno de sus dos lados. Dos de ellos interiores y dos exteriores.

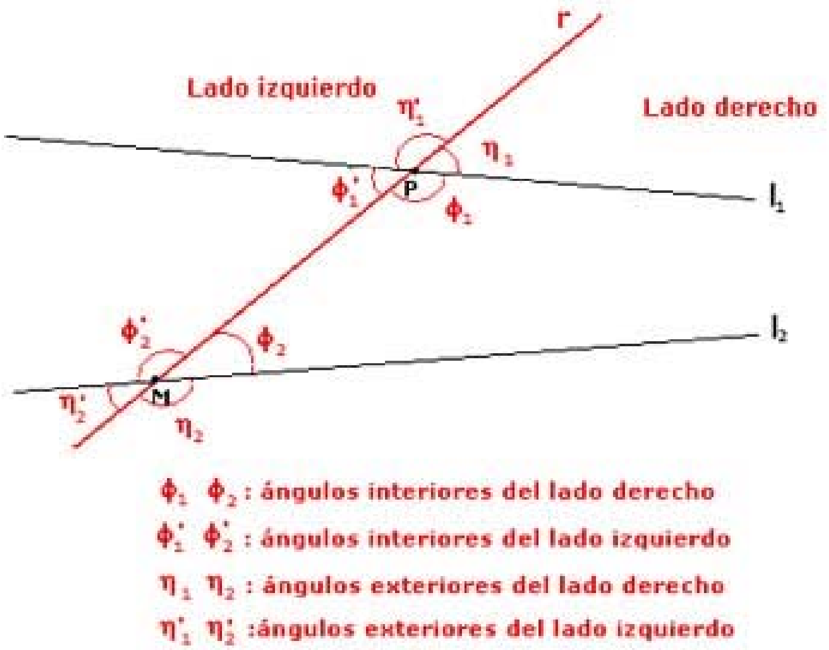


***Figura 1*. Recta r que corta a otras dos formando ángulos interiores y exteriores por ambos lados.**

- Los tres ángulos de un triángulo suman 180º.

Si en la figura consideramos que $\varphi_B^{'}$ es igual a φ_B y que $\varphi_A^{'}$ es igual a φ_A, se tiene, al transportarlos al punto C: $\varphi_A + \varphi_B + \varphi_C = \pi$.

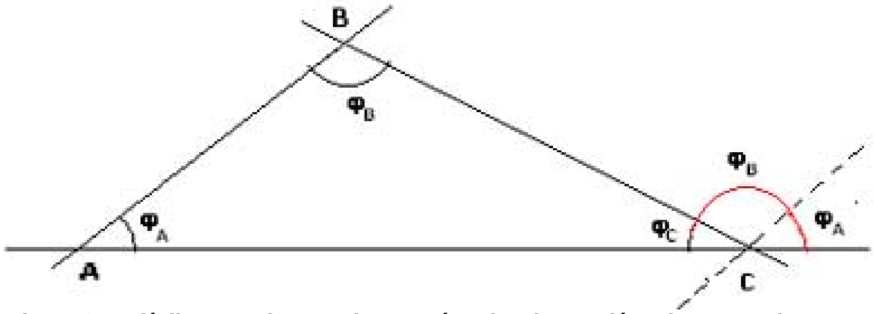


Figura 2. **Es fácil comprobar que los tres ángulos de un triángulo suman dos rectos**

Consecuencia: si dos ángulos cualesquiera suman dos rectos, estos ángulos no pueden pertenecer a un mismo triángulo.

3. Los axiomas o postulados:

Son los enunciados que postuló Euclides en sus *Elementos*:

Axioma 1: Por dos puntos, A y B, pasa una recta única.
Axioma 2: Todo segmento de extremos A y B puede prolongarse infinitamente.
Axioma 3: Un punto y un segmento definen una única circunferencia.
Axioma 4: Todos los ángulos rectos son congruentes (iguales).
Axioma 5: Si una recta corta a otras dos de modo que la suma de los ángulos interiores de un mismo lado sumen menos que dos rectos, entonces ambas rectas se cortan en el lado en donde se encuentran dichos ángulos interiores.

Teorema 1:

Por un punto P exterior a una recta dada r pasa una y solo una recta t paralela a r.

Demostración:

Llamemos s a la recta perpendicular a r por el punto P, la cual la cortará en el punto M, y sea t la recta perpendicular a s por el punto P.

Si las rectas t y r no fueran paralelas, esto querría decir que habrían de tocarse en un punto Q, con lo que se formaría el triángulo PMQ. Ahora bien, dos de los ángulos de ese triángulo, el de vértice en P y el de vértice en M, son rectos, por lo que suman 180º. Esto querrá decir que el hipotético tercer ángulo no puede existir, pues sería igual a 0º, con lo que no existe el punto Q y las rectas t y r no se tocarían, siendo, pues, paralelas.

Tal paralela es única, pues de existir otra, t', ésta tocaría a t en el punto P y sería, por lo anterior, perpendicular a s, por lo que coincidiría con t.

Teorema 2:

El enunciado del teorema 1 es equivalente al axioma 5. O sea, los enunciados siguientes son equivalentes:

- Por un punto P exterior a una recta dada r pasa una y solo una recta t paralela a r.
- Si una recta corta a otras dos de modo que la suma de los ángulos interiores de un mismo lado sumen menos que dos rectos, entonces ambas rectas se cortan en el lado en donde se encuentran dichos ángulos interiores.

Demostración:

Puesto que el enunciado del teorema 1 se ha obtenido desde el axioma 5, solo resta probar que el axioma 5 es consecuencia del enunciado del teorema 1.
Hemos de probar, por tanto, que si la suma de los ángulos internos del mismo lado es distinta de dos rectos, entonces las rectas l_1 y l_2 no son paralelas:

$$\phi_1 + \phi_2 \neq \pi \rightarrow no(l_1 \| l_2)$$

O bien, equivalentemente, el teorema contrarrecíproco: si las rectas son paralelas entonces la suma de los ángulos internos del mismo lado es igual a dos rectos:

$$l_1 \| l_2 \Rightarrow \phi_1 + \phi_2 = \pi$$

Consideremos la figura 1.
Se verifica, por construcción, que los ángulos internos con lados en l_1 son suplementarios, lo mismo que los ángulos internos con lados en l_2, o sea:

$$\phi_1 + \phi_1' = \pi, \quad \phi_2 + \phi_2' = \pi \qquad [1]$$

Si los ángulos internos alternos fueran iguales, o sea, si $\phi_1 = \phi_2'$ y $\phi_2 = \phi_1'$, entonces, sustituyendo en [1] resultaría: $\phi_1 + \phi_2 = \pi$. Esto querría decir que no pueden ser ϕ_1 y ϕ_2 ángulos de un mismo triángulo, por lo que no podría existir un tercer vértice Q que forme un triángulo PMQ. Es decir las rectas l_1 y l_2 serían paralelas.
Recíprocamente, si las rectas l_1 y l_2 son paralelas, bastará, en la figura 1, transportar el ángulo ϕ_1' al lugar donde esta ϕ_2, manteniendo el lado PM y ahora con nuevo lado l'_2 sustituyendo a l_2, siendo, pues, iguales ambos ángulos, con lo que, por lo expuesto antes, las rectas l_1 y l'_2 son paralelas. Es decir, por el punto M pasa una recta l'_2 que es paralela a l_1, y pasa la recta l_2 que por construcción es también paralela a l_1. De acuerdo con el enunciado del teorema 1, l2 y l2' son coincidentes, ya que pasando por el mismo punto M son paralelas a l_1, por lo que ambos ángulos, ϕ_2 y el transportado ϕ'_1, son iguales, $\phi_2 = \phi_1'$ y $\phi_1 + \phi_2 = \pi$, que es lo que pretendíamos probar.

En definitiva, por los teoremas 1 y 2, vemos que el quinto axioma puede sustituirse por la unicidad de la recta paralela a otra por un punto exterior. Los axiomas de la geometría euclidiana pueden, pues, ser enunciados así:

Axioma 1: Por dos puntos, A y B, pasa una recta única.
Axioma 2: Todo segmento de extremos A y B puede prolongarse infinitamente.
Axioma 3: Un punto y un segmento definen una única circunferencia.
Axioma 4: Todos los ángulos rectos son iguales (congruentes).
Axioma 5: Por un punto P exterior a una recta dada r pasa una y solo una recta t paralela a r.

4. Las geometrías curvas

Los axiomas de la geometría euclidiana son indecidibles, consistentes internamente, y no contradictorios. Es decir:

- Indecidibles: ninguno de los axiomas puede derivarse de los otros cuatro.
- Consistentes internamente: No se obtienen teoremas que contradigan a ninguno de los cinco axiomas.
- No contradictorios: ninguno de los axiomas contradice a ninguno de los otros cuatro.

Sin embargo, estos cinco axiomas no son los únicos enunciados que cumplen tales condiciones de indecidibilidad, consistencia interna y no contradictoriedad. Es posible, mediante una modificación sencilla en alguno de los cinco axiomas obtener otro sistema distinto pero que también permite desarrollar una geometría válida. Tal geometría sería, por consiguiente, no euclidiana o curva.

Por razones históricas harto conocidas, el axioma que se comenzó a modificar, ya en el siglo XIX, fue el axioma 5, en una época en la que todavía se dudaba claramente de su indecidibilidad con respecto a los otros cuatro axiomas, a pesar de los repetidos intentos de deducirlo desde los restantes durante casi 2000 años.

- La geometría hiperbólica cambia el axioma 5 de manera que lo deja en la forma siguiente:
Axioma 5: Por un punto P exterior a una recta dada r pasan dos o más rectas t_1, t_2,..., paralelas a r.

- La geometría elíptica hace el cambio del axioma 5 en la forma siguiente:
Axioma 5: Por un punto P exterior a una recta dada r no pasa ninguna paralela a r.

En definitiva, los axiomas de las geometrías euclidiana, hiperbólica y elíptica presentan este aspecto:

Geometría Euclidiana:
Axioma 1: Por dos puntos, A y B, pasa una recta única.
Axioma 2: Todo segmento de extremos A y B puede prolongarse infinitamente.
Axioma 3: Un punto y un segmento definen una única circunferencia.
Axioma 4: Todos los ángulos rectos son congruentes (iguales).
Axioma 5: Por un punto P exterior a una recta dada r pasa una y solo una recta t paralela a r.

Geometría Hiperbólica:
Axioma 1: Por dos puntos, A y B, pasa una recta única.
Axioma 2: Todo segmento de extremos A y B puede prolongarse infinitamente.
Axioma 3: Un punto y un segmento definen una única circunferencia.
Axioma 4: Todos los ángulos rectos son congruentes (iguales).
Axioma 5: Por un punto P exterior a una recta dada r pasan dos o más rectas t_1, t_2,..., paralelas a r.

Geometría Elíptica:
Axioma 1: Por dos puntos, A y B, pasa una recta única.
Axioma 2: Todo segmento de extremos A y B puede prolongarse infinitamente.
Axioma 3: Un punto y un segmento definen una única circunferencia.
Axioma 4: Todos los ángulos rectos son congruentes (iguales).
Axioma 5: Por un punto P exterior a una recta dada r no pasa ninguna paralela a la recta r.

5. Modelos para las geometrías no euclidianas

Busquemos algún modelo intuitivo en el que podamos reconocer la verificación de los axiomas de la correspondiente geometría. Se trata de encontrar espacios de puntos en donde podamos definir la línea recta de modo que se verifiquen los cuatro axiomas de la geometría absoluta y el quinto axioma, específico para cada una de ambas geometrías, elíptica (o de Riemann) e hiperbólica (o de Lobachevski).

Mostramos a continuación, muy brevemente, un par de los más conocidos modelos a fin de ilustrar las ideas que subyacen tanto en la geometría elíptica como en la geometría hiperbólica.

5.1. Modelo para la geometría elíptica de Riemann:

Un modelo bidimensional para la geometría no euclidiana elíptica o de Riemann es la superficie S sobre una esfera del espacio euclidiano tridimensional, en donde las líneas rectas se definen como las circunferencias máximas sobre esta superficie. El paralelismo de dos rectas se definiría como dos circunferencias máximas que no se interceptan.

Es claro que se verifican los cuatro axiomas de la geometría absoluta:

Axioma 1: Por dos puntos del espacio S pasa una y solo una recta (en la visión euclidiana de la esfera diríamos: por dos puntos de la superficie esférica pasa un y solo un círculo máximo).

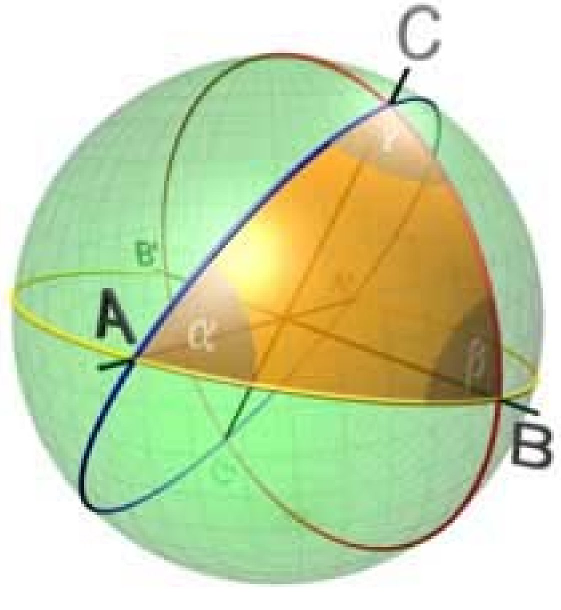
Axioma 2: Todo segmento de extremos A y B puede prolongarse infinitamente (en la superficie S diríamos: todo arco máximo entre A y B puede prolongarse en un círculo máximo ilimitado, aunque finito, obviamente).

Axioma 3: Un punto p y un segmento m definen una única circunferencia (la versión de la geometría en la esfera se podría mencionar así: un punto p de la superficie esférica y un arco de círculo máximo m con uno de los extremos en ese punto definen sobre la superficie de la esfera un único círculo de centro en el punto y radio el arco de circulo máximo).

Axioma 4: Todos los ángulos rectos son congruentes (dos circunferencias máximas ortogonales entre si forman ángulo recto cualesquiera que sea la orientación de ambas).

Y también se verifica el Axioma específico de esta geometría:

Axioma 5: Por un punto P exterior a una recta r no pasa ninguna paralela a r (por un punto P exterior a una circunferencia máxima r no pasa ninguna circunferencia máxima r' que sea paralela a la primera, es decir, todas las circunferencias máximas r' que pasan por p cortan en algún punto de la superficie esférica a la circunferencia máxima r).



En este modelo el espacio de los puntos es la superficie esférica, y las rectas son los círculos máximos. No existen círculos máximos paralelos. Todos se intersecan.

Los triángulos están formados por tres rectas, o sea, por tres círculos máximos de la esfera.

(Imagen de Wikipedia)

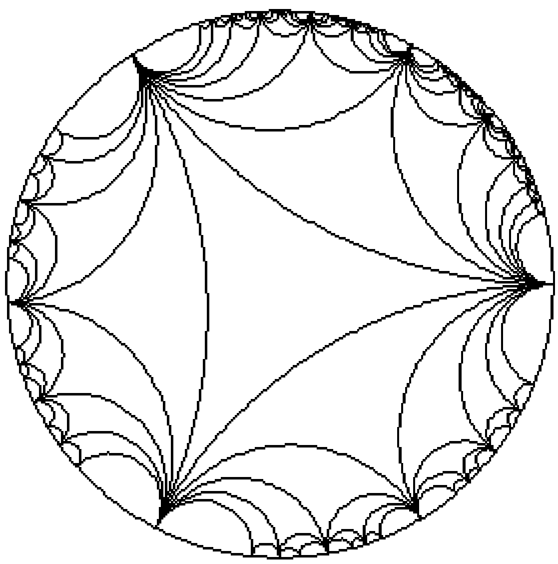
5.2. Modelo para la geometría hiperbólica de Lobatchevski:

Un modelo bidimensional para la geometría no euclidiana hiperbólica o de Lovachevski es la superficie D sobre un disco (disco de Poincaré) sobre el espacio euclidiano bidimensional, en donde las líneas rectas se definen como los arcos de circunferencia ortogonales al borde del disco. El paralelismo de dos rectas se definiría como cómo dos circunferencias ortogonales al borde del disco que no se interceptan.

Se verifican los cuatro axiomas de la geometría absoluta:
Axioma 1: Por dos puntos del espacio D pasa una y solo una recta (en la visión euclidiana del disco diríamos: por dos puntos del disco pasa una y sólo una circunferencia ortogonal al borde del disco).
Axioma 2: Todo segmento de extremos A y B puede prolongarse infinitamente (en la superficie D diríamos: todo arco de circunferencia ortogonal al borde del disco comprendido entre A y B puede prolongarse en una circunferencia ortogonal ilimitada, aunque finita).
Axioma 3: Un punto p y un segmento m definen una única circunferencia (la versión de la geometría en el disco de Poincaré se podría mencionar así: un punto p del disco y un arco m de circunferencia ortogonal al borde, con uno de los extremos en ese punto, definen sobre la superficie del disco un único círculo de centro en el punto y radio el arco de circunferencia ortogonal indicado).
Axioma 4: Todos los ángulos rectos son congruentes (dos circunferencias ortogonales al borde del disco entre si forman ángulo recto cualesquiera que sea la orientación de ambas).

Y también se verifica el Axioma específico de esta geometría:

Axioma 5: Por un punto p exterior a una recta r pasan infinitas rectas paralelas a r (por un punto p exterior a una circunferencia r ortogonal al borde del disco pasan infinitas circunferencias ortogonales al borde del disco que no interceptan a r).



En este modelo el espacio de los puntos es la superficie de un disco, y las rectas son las circunferencias ortogonales al borde del disco. Por un punto exterior a una recta hay infinitas rectas que no la intersecan (paralelas).

Los triángulos están formados por tres rectas, o sea, por tres circunferencias ortogonales a los bordes del disco.
(Imagen de Wolfram Mathworld)