

Sobre Problemas de Contorno para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

01. Problemas de contorno

El teorema de existencia de la integral de una ecuación diferencial ordinaria de orden n , $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$, establece bajo conocidas condiciones la existencia y unicidad de la solución cuando se conocen los valores de la función y de sus $n-1$ primeras derivadas, $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$, en un punto $x = x_0$ inicial.

Verificadas, pues, las condiciones de existencia, el problema de encontrar la integral particular que verifique ciertas condiciones iniciales, es un problema perfectamente determinando.

Ejemplo:

Dada la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden

$$A_0(x).y'' + A_1(x).y' + A_2(x).y = f(x)$$

veamos la determinación de una integral particular en un dominio en el que suponemos continuas las funciones $A_0(x), A_1(x), A_2(x)$ y $f(x)$, con $A_0(x) \neq 0$.

Una vez hallada la forma de la integral general $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + h(x)$, donde son $y_1(x), y_2(x)$ soluciones particulares de la ecuación incompleta (homogénea), ambas linealmente independientes, y $h(x)$ una solución particular de la ecuación completa, el problema de determinar una integral general con alguna condición inicial preestablecida exige la determinación de los coeficientes c_1 y c_2 de forma que se cumpla tal condición inicial.

Pueden considerarse varios tipos de condiciones iniciales. Veamos algunos casos:

- a) Determinar la solución general para los valores $y(x_0), y'(x_0)$, esto es, para $x = x_0$. Se trata de resolver el sistema de ecuaciones lineales en c_1 y c_2 :

$$\begin{cases} y(x_0) = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + h(x_0) \\ y'(x_0) = c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) + h'(x_0) \end{cases}$$

sistema que, al ser linealmente independientes $y_1(x_0), y_2(x_0)$ para $x = x_0$, tiene solución única, ya que la matriz de los coeficientes tiene rango 2, porque su determinante, el wronskiano, es no nulo

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

el sistema se puede representar elementalmente así:

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = y(x_0) - h(x_0) \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = y'(x_0) - h'(x_0) \end{cases}$$

Matriz de los coeficientes: $M = \begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix}$

Matriz ampliada: $M' = \begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & y(x_0) - h(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & y'(x_0) - h'(x_0) \end{pmatrix}$

- b) Determinar la integral general para su valor en los puntos extremos de un intervalo $[x_0, x_1]$, $y(x_0), y(x_1)$, esto es, para $x = x_0$ y $x = x_1$. Se trata ahora de resolver el sistema de ecuaciones lineales en c_1 y c_2 :

$$\begin{cases} y(x_0) = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + h(x_0) \\ y(x_1) = c_1 y_1(x_1) + c_2 y_2(x_1) + h(x_1) \end{cases}$$

que también podemos escribir elementalmente:

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = y(x_0) - h(x_0) \\ c_1 y_1(x_1) + c_2 y_2(x_1) = y(x_1) - h(x_1) \end{cases}$$

Matriz de los coeficientes: $M = \begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1(x_1) & y_2(x_1) \end{pmatrix}$

Matriz ampliada: $M' = \begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & y(x_0) - h(x_0) \\ y_1(x_1) & y_2(x_1) & y(x_1) - h(x_1) \end{pmatrix}$

Al tratarse de puntos diferentes, pudiera ocurrir en este caso que fuera nulo el determinante de la matriz de los coeficientes, por lo que en tal caso el sistema pudiera ser incompatible, o bien compatible indeterminado.

- c) Determinar la integral general para su valor en un extremo de un intervalo $[x_0, x_1]$ y el valor de su derivada en el otro extremo, $y(x_0), y'(x_1)$, esto es, para $y(x)$ en $x = x_0$ y $y'(x)$ en $x = x_1$. Se trata ahora de resolver el sistema de ecuaciones lineales en c_1 y c_2 :

$$\begin{cases} y(x_0) = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + h(x_0) \\ y'(x_1) = c_1 y_1'(x_1) + c_2 y_2'(x_1) + h'(x_1) \end{cases}$$

Donde pueden darse las mismas circunstancias que en el caso b) anterior.

- d) Determinar la integral general para el valor de la derivada en los puntos extremos de un intervalo $[x_0, x_1]$, $y'(x_0), y'(x_1)$, esto es, para $x = x_0$ y $x = x_1$. Se trata ahora de resolver el sistema de ecuaciones lineales en c_1 y c_2 :

$$\begin{cases} y'(x_0) = c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) + h'(x_0) \\ y'(x_1) = c_1 y_1'(x_1) + c_2 y_2'(x_1) + h'(x_1) \end{cases}$$

Donde pueden darse también las mismas circunstancias que en el caso b).

Estos problemas acostumbran a denominarse problemas de contorno, pues en realidad se establecen bajo condiciones iniciales impuestas en el contorno de un cierto recinto, en general un intervalo.

El enunciado general de un problema de contorno para una ecuación diferencial de orden n -simo, donde cada una de las funciones coeficientes de cada uno de sus términos es al menos tantas veces derivable con continuidad como sea el orden de la derivada del término del cual es coeficiente, se puede establecer del siguiente modo:

Sea la ecuación diferencial ordinaria de orden n con coeficientes p_i variables:

$$L_n[y] \equiv p_0(x) \cdot y^{(n)} + p_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) \cdot y = f(x)$$

o bien

$$L_n[y] \equiv \sum_{i=0}^n p_i(x) \cdot y^{(n-i)} = f(x), \quad \text{con } p_i(x) \in C^{n-i}, \quad i=0,1,\dots,n \text{ y } p_0(x) \neq 0, \quad \forall x \in [a,b]$$

se pretende encontrar una solución general que verifique las n condiciones iniciales en los extremos del intervalo $[a,b]$:

$$u_i[y] \equiv \sum_{k=1}^n [\alpha_{ik} \cdot y^{(k-1)}(a) + \beta_{ik}(x) \cdot y^{(k-1)}(b)] = \gamma_i, \quad i=1,\dots,n, \quad \alpha_{ik}, \beta_{ik} \in R$$

El problema de contorno se denomina *homogéneo* si es $f(x)=0$ y $\gamma_i=0$, $i=1,\dots,n$ y no homogéneo en caso contrario.

02. El Teorema de la Alternativa

Cuando tratamos de encontrar aquellos problemas de contorno que tienen solución única, o infinitas soluciones, o bien son incompatibles, nos encontramos que existe una alternativa entre las soluciones del problema homogéneo y las del problema no homogéneo, que se establece mediante un sencillo teorema.

Teorema 01 (Teorema de la alternativa)

Si el problema no homogéneo tiene solución única, entonces el problema homogéneo no tiene solución (excluyendo la idénticamente nula), y si el problema no homogéneo es indeterminado o incompatible, entonces el problema homogéneo tiene infinitas soluciones.

Demostración:

Podemos hacer la demostración reduciendo el problema a la expresión de un sistema matricial de ecuaciones lineales, y aplicando el Teorema de Rouché-Fröbenius para discutirlo.

Sea, pues, la ecuación diferencial lineal con coeficientes variables

$$L_n[y] \equiv p_0(x) \cdot y^{(n)} + p_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) \cdot y = f(x)$$

y sean las n condiciones de contorno dadas por

$$u_i[y] \equiv \sum_{k=1}^n [\alpha_{ik} \cdot y^{(k-1)}(a) + \beta_{ik}(x) \cdot y^{(k-1)}(b)] = \gamma_i, \quad i=1,\dots,n$$

asimismo, la solución general sabemos que se expresa por

$$y(x) = \sum_{j=1}^n c_j y_j(x) + h(x)$$

donde las $y_j(x), \dots, j=1, \dots, n$ son soluciones particulares linealmente independientes de la ecuación homogénea y $h(x)$ es una solución particular de la ecuación completa. Las c_j son constantes arbitrarias.

Al aplicar las condiciones de contorno:

$$u_i[y] = u_i \left[\sum_{j=1}^n c_j y_j(x) + h(x) \right] = \sum_{j=1}^n c_j u_i[y_j(x)] + u_i[h(x)] = \gamma_i \quad i=1, \dots, n$$

o sea:

$$\sum_{j=1}^n c_j u_i[y_j(x)] = \gamma_i - u_i[h(x)], \quad i=1, \dots, n$$

o, en el caso homogéneo:

$$\sum_{j=1}^n c_j u_i[y_j(x)] = 0, \quad i=1, \dots, n$$

que, en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} u_1[y_1(x)] & u_1[y_2(x)] & \dots & u_1[y_n(x)] \\ u_2[y_1(x)] & u_2[y_2(x)] & \dots & u_2[y_n(x)] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n[y_1(x)] & u_n[y_2(x)] & \dots & u_n[y_n(x)] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 - u_1[h(x)] \\ \gamma_2 - u_2[h(x)] \\ \dots \dots \dots \\ \gamma_n - u_n[h(x)] \end{bmatrix}$$

o bien, para el caso homogéneo:

$$\begin{bmatrix} u_1[y_1(x)] & u_1[y_2(x)] & \dots & u_1[y_n(x)] \\ u_2[y_1(x)] & u_2[y_2(x)] & \dots & u_2[y_n(x)] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n[y_1(x)] & u_n[y_2(x)] & \dots & u_n[y_n(x)] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si el sistema completo tiene solución única, el teorema de Rouché nos dice que la matriz de los coeficientes ha de tener el mismo rango que la matriz ampliada, y tal rango ha de ser igual al número n de incógnitas. Es decir, el rango será igual a n , con lo que su determinante será necesariamente no nulo. Esto quiere decir que en el caso homogéneo la solución única que existe es la trivial (solución nula), tal como afirma el teorema de la alternativa.

Finalmente, si el sistema completo no tiene solución o bien tuviera infinitas soluciones, esto indicaría que la matriz de los coeficientes tiene rango inferior a n , es decir, tiene determinante nulo, de lo cual se deduce que el sistema homogéneo ha de tener infinitas soluciones.

03. Algunos ejemplos elementales

03.1. Encontrar la solución o soluciones de la ecuación diferencial $y'' + y = 0$ que verifiquen las condiciones de contorno dadas por $y(0) = 0$ y $y(\pi/2) = 1$.

Resolución:

$r^2 + r = 0 \rightarrow r = \pm i$, de lo cual, al ser homogénea, obtenemos ya la solución.

Solución general: $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$

Aplicamos las condiciones de contorno:

$$\begin{cases} y(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \operatorname{sen} 0 = 0 \\ y(\pi/2) = c_1 \cos(\pi/2) + c_2 \operatorname{sen}(\pi/2) = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 \cdot 0 + c_2 = 1 \end{cases} \rightarrow c_1 = 0, \quad c_2 = 1$$

Solución que verifica las condiciones de contorno:

$$y(x) = \operatorname{sen} x$$

03.2. Encontrar la solución o soluciones de la ecuación diferencial $y'' + \pi^2 y = 0$ que verifiquen las condiciones de contorno dadas por $y(0) = 1$ y $y(1) = 0$.

Resolución:

$r^2 + \pi^2 = 0 \rightarrow r = \pm \pi i$, que al ser también un caso de ecuación homogénea, se tiene:

Solución general: $y(x) = c_1 \cos(\pi x) + c_2 \operatorname{sen}(\pi x)$

Aplicamos las condiciones de contorno:

$$\begin{cases} y(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \operatorname{sen} 0 = 1 \\ y(1) = c_1 \cos(\pi) + c_2 \operatorname{sen}(\pi) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ -c_1 + 0 = 0 \end{cases} \text{ incompatible}$$

03.3. Encontrar la solución o soluciones de la ecuación diferencial $y'' - 3y' + y = 2 \operatorname{sen} x$ que verifiquen las condiciones de contorno dadas por $y(0) = 2$ y $y'(0) = 0$.

Resolución:

$r^2 - 3r + 1 = 0 \rightarrow r = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, solución de la homogénea: $y(x) = c_1 e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}x} + c_2 e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}x}$

Obtenemos una solución particular de la ecuación completa:

$$y_0'' - 3y_0' + y_0 = (-A \cos x - B \operatorname{sen} x) - 3(-A \operatorname{sen} x + B \cos x) + (A \cos x + B \operatorname{sen} x) = 2 \operatorname{sen} x \rightarrow$$

$$\rightarrow -3B \cos x + 3A \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} x \rightarrow B = 0, A = 2/3 \rightarrow y_0(x) = (2/3) \cos x$$

Solución general: $y(x) = c_1 e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}x} + c_2 e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}x} + (2/3) \cos x$

Aplicamos las condiciones de contorno:

$$\begin{cases} y(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 + (2/3) \cos 0 = 2 \\ y'(0) = \frac{3+\sqrt{5}}{2} c_1 e^0 + \frac{3-\sqrt{5}}{2} c_2 e^0 - (2/3) \operatorname{sen} 0 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + 2/3 = 2 \\ (3+\sqrt{5})c_1 + (3-\sqrt{5})c_2 = 4/3 \end{cases}$$

Resultando:

$$\begin{cases} c_1 = \frac{10-6\sqrt{5}}{15} \\ c_2 = \frac{10+6\sqrt{5}}{15} \end{cases}$$

Solución que verifica las condiciones de contorno:

$$y(x) = \frac{10-6\sqrt{5}}{15} e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}x} + \frac{10+6\sqrt{5}}{15} e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}x} + (2/3) \cdot \cos x$$

03.4. Encontrar la solución o soluciones de la ecuación diferencial $y'' + 4y = e^x$ que verifiquen las condiciones de contorno dadas por $y(0) = 1$ y $y(\pi/4) = -1$.

Resolución:

Solución general: $y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x + (1/5)e^x$

Aplicamos las condiciones de contorno:

$$\begin{cases} y(0) = c_1 \cdot 1 + 0 + 1/5 = 1 \\ y(\pi/4) = 0 + c_2 \cdot 1 + (1/5)e^{\pi/4} = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = 4/5 \\ c_2 = -\frac{5+e^{\pi/4}}{5} \end{cases}$$

Solución que verifica las condiciones de contorno:

$$y(x) = \frac{4}{5} \cos 2x - \frac{5+e^{\pi/4}}{5} \operatorname{sen} 2x + (1/5)e^x$$

03.5. Encontrar la solución o soluciones de la ecuación diferencial $y'' - y' - 2y = x$ que verifiquen las condiciones de contorno dadas por $y(0) = 0$ y $y(1) = 1$.

Resolución:

Solución general: $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x$

Aplicamos las condiciones de contorno:

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 + 1/4 = 0 \\ y(1) = c_1 \cdot e^2 + c_2 \cdot e^{-1} - \frac{1}{4} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = -1/4 \\ c_1 \cdot e^3 + c_2 = \frac{5}{4} \cdot e \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{1}{4} \frac{5e+1}{e^3-1} \\ c_2 = \frac{1}{4} \frac{e^3+5}{1-e^3} \end{cases}$$

Solución que verifica las condiciones de contorno:

$$y(x) = \frac{1}{4} \frac{5e+1}{e^3-1} e^{2x} + \frac{1}{4} \frac{e^3+5}{1-e^3} e^{-x} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

04. Los problemas de contorno con autovalores y homogéneos

04.1. Definiciones

Si consideramos una ecuación diferencial lineal con coeficientes variables, podemos plantearnos el problema de encontrar una solución que cumpla ciertas condiciones iniciales para diferentes autovalores.

Supongamos un operador L_n tal que

$$L_n(y) = p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y$$

donde sobre un cierto intervalo $[a, b]$ son $p_j \in C^{n-j}$, $j = 0, 1, \dots, n$ y es $p_0(t) \neq 0$.

Nos planteamos el problema siguiente:

Hallar los valores de λ (autovalores) para los cuales el sistema

$$\begin{cases} L_n(y) = \lambda y \\ Uy = 0 \end{cases}$$

tenga solución (para que existan las correspondientes autofunciones).

Supongamos que se conocen n soluciones de la ecuación diferencial $L_n(y) = \lambda y$:

$$\varphi_j = \varphi_j(t, \lambda), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

que satisfacen la condición inicial de que para algún punto c del intervalo $[a, b]$ se verifica que

$$\varphi_j^{(k-1)}(c, \lambda) = \delta_{jk} \quad j, k = 1, \dots, n$$

lo cual nos asegurará que son linealmente independientes, ya que su wronskiano en el punto $c \in [a, b]$ es no nulo:

$$W[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n](c) \neq 0$$

Puesto que cualquier solución de la ecuación diferencial $L_n(y) = \lambda y$ es combinación lineal de las soluciones $\varphi_j(t, \lambda)$, el problema tendrá a λ como autovalor si y solamente si existen constantes c_j , no todas nulas, tales que y satisface la condición impuesta $Uy = 0$, es decir, si el sistema de ecuaciones homogéneo

$$U_k(y) = U_k \left(\sum_{j=1}^n c_j \varphi_j(t, \lambda) \right) = \sum_{j=1}^n c_j U_k(\varphi_j(t, \lambda)) = 0, \quad \text{para } k = 1, \dots, n$$

tiene solución distinta de la trivial (distinta de la solución nula). Para que ello ocurra es necesario que la matriz de los coeficientes del sistema sea de rango inferior a n , es decir, es necesario que su determinante sea nulo:

$$|U_k(\varphi_j(t, \lambda))| = 0$$

que es la ecuación de determinación de los autovalores.

04.2. Ejemplos:

- a) Sea la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden dada por $L_2(y) = -y''$ y consideremos la ecuación de autovalores $L_2(y) = \lambda y$ con las condiciones de contorno $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

Se tiene, entonces:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0 \end{cases}$$

Veamos como determinar los autovalores:

Si $\lambda < 0$:

$$y(x) = c_1 e^{px} + c_2 e^{-px}, \quad \text{con } p = \sqrt{-\lambda} > 0$$

Al imponer las condiciones de contorno:

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 = 0 \\ y(\pi) = c_1 e^{\pi p} + c_2 e^{-\pi p} = 0 \end{cases}$$

$$c_2 = -c_1 \rightarrow c_1 e^{\pi p} - c_1 e^{-\pi p} = 0 \rightarrow c_1 (e^{\pi p} - e^{-\pi p}) = 0 \rightarrow c_1 = 0 \rightarrow c_2 = 0$$

Puestos que todas las constantes son nulas, $\lambda < 0$ no puede ser autovalor.

Si $\lambda = 0$:

En este caso, $y'' = 0 \rightarrow y(x) = c_1 + c_2 x$

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 \cdot 0 = 0 \\ y(\pi) = c_1 + c_2 \pi = 0 \end{cases} \rightarrow c_1 = 0, c_2 = 0$$

Tampoco en el caso $\lambda = 0$ puede ser autovalor, pues todas las constantes se anulan.

Si $\lambda > 0$:

$$y(x) = c_1 \cos px + c_2 \operatorname{sen} px, \text{ con } p = \sqrt{\lambda} > 0$$

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + 0 = 0 \\ y(\pi) = c_1 \cos p\pi + c_2 \operatorname{sen} p\pi = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 \operatorname{sen} p\pi = 0 \end{cases}$$

λ podrá ser autovalor si $c_2 \neq 0$, es decir, en los casos en los que $\operatorname{sen} p\pi = 0$:

$$p\pi = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots \rightarrow \sqrt{\lambda} = n, \quad n = 1, 2, \dots \rightarrow \lambda = 1, 2^2, 3^2, \dots$$

En definitiva, el problema tendrá solución solamente si es $c_2 \neq 0$, obteniéndose los autovalores $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2^2, \dots, \lambda_n = n^2, \dots$, para los que existen las soluciones no triviales, $y_n(x) = c_2 \operatorname{sen} nx, \quad n = 1, 2, \dots$

Se obtienen, en definitiva, las infinitas autofunciones: $\{\operatorname{sen} nx\}, \quad n = 1, 2, \dots$

Tales autofunciones son ortogonales en el intervalo $[0, \pi]$ establecido por el problema de contorno:

$$\forall a, b \in N, \quad \int_0^\pi \operatorname{sen} ax \cdot \operatorname{sen} bx \cdot dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi [\cos(a-b)x - \cos(a+b)x] \cdot dx = 0, \quad a \neq b$$

- b) Sea la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden dada por $L_2(y) = -y''$ y consideremos la ecuación de autovalores $L_2(y) = \lambda y$ con las condiciones de contorno $y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$.

Se tiene, entonces:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

Veamos como determinar los autovalores:

Si $\lambda < 0$:

$$y(x) = c_1 e^{px} + c_2 e^{-px}, \text{ con } p = \sqrt{-\lambda} > 0$$

Al imponer las condiciones de contorno:

$$\begin{cases} y'(0) = pc_1 e^{p0} - pc_2 e^{-p0} = 0 \\ y'(\pi) = pc_1 e^{\pi p} - pc_2 e^{-\pi p} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p(c_1 - c_2) = 0 \\ p(c_1 e^{\pi p} - c_2 e^{-\pi p}) = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow p(c_1 e^{\pi p} - c_2 e^{-\pi p}) = 0 \rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

Puestos que todas las constantes son nulas, $\lambda < 0$ no puede ser autovalor.

Si $\lambda = 0$:

En este caso, $y'' = 0 \rightarrow y(x) = c_1 + c_2 x$

$$\begin{cases} y'(0) = c_2 = 0 \\ y'(\pi) = c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow c_1 = 0, c_2 = 0$$

Tampoco en el caso $\lambda = 0$ puede ser autovalor, pues todas las constantes se anulan.

Si $\lambda > 0$:

$y(x) = c_1 \cos px + c_2 \operatorname{sen} px$, con $p = \sqrt{\lambda} > 0$

$$\begin{cases} y'(0) = -c_1 p \operatorname{sen} p0 + c_2 p \cos 0 = 0 \\ y'(\pi) = -c_1 p \operatorname{sen} p\pi + c_2 p \cos p\pi = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_2 = 0 \\ -c_1 \operatorname{sen} p\pi = 0 \end{cases}$$

λ podrá ser autovalor si $c_1 \neq 0$, es decir, en los casos en los que $\operatorname{sen} p\pi = 0$:

$$p\pi = n\pi, \quad n=1, 2, \dots \rightarrow \sqrt{\lambda} = n, \quad n=1, 2, \dots \rightarrow \lambda = 1, 2^2, 3^2, \dots$$

En definitiva, el problema tendrá solución solamente si es $c_1 \neq 0$, obteniéndose los autovalores $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2^2, \dots, \lambda_n = n^2, \dots$, para los que existen las soluciones no triviales, $y_n(x) = c_1 \cos nx, \quad n=1, 2, \dots$

Se obtienen, en definitiva, las infinitas autofunciones: $\{\cos nx\}, \quad n=1, 2, \dots$

Tales autofunciones son ortogonales en el intervalo $[0, \pi]$ establecido por el problema de contorno:

$$\forall a, b \in N, \quad \int_0^\pi \cos ax \cdot \cos bx \cdot dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi [\cos(a-b)x + \cos(a+b)x] \cdot dx = 0, \quad a \neq b$$

- c) Veamos ahora la ecuación diferencial ordinaria dada por $L_2(y) = -y''$ y consideremos la ecuación de autovalores $L_2(y) = \lambda y$ con las condiciones de contorno $y'(0) = 0, y(1) = 0$.

Se tiene, entonces:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = 0, y(1) = 0 \end{cases}$$

Autovalores:

Si $\lambda < 0$:

$$y(x) = c_1 e^{px} + c_2 e^{-px}, \quad \text{con } p = \sqrt{-\lambda} > 0$$

$$y'(x) = c_1 p e^{px} - c_2 p e^{-px}$$

De las condiciones de contorno:

$$y'(0) = c_1 p - c_2 p = 0 \rightarrow p(c_1 - c_2) = 0 \rightarrow c_1 - c_2 = 0 \rightarrow c_1 = c_2$$

$$y(1) = c_1 e^p + c_2 e^{-p} = 0 \rightarrow c_1 e^p + c_1 e^{-p} = 0 \rightarrow c_1 (e^p + e^{-p}) = 0 \rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

Y, por tanto, $\lambda < 0$ no puede ser autovalor.

Si $\lambda = 0$:

En este caso, $y'' = 0 \rightarrow y(x) = c_1 + c_2 x$

$$\begin{cases} y'(0) = c_2 = 0 \\ y(1) = c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow c_1 = 0, c_2 = 0$$

$\lambda = 0$ no es, por tanto, autovalor.

Si $\lambda > 0$:

$$y(x) = c_1 \cos px + c_2 \operatorname{sen} px, \text{ con } p = \sqrt{\lambda} > 0$$

$$\begin{cases} y'(0) = -c_1 p \operatorname{sen} p \cdot 0 + c_2 p \cos 0 = 0 \\ y(1) = c_1 \cos p + c_2 \operatorname{sen} p = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 \cos p + c_2 \operatorname{sen} p = 0 \end{cases} \rightarrow c_1 \cos p = 0$$

Para que $\lambda > 0$ sea autovalor, ha de ser $c_1 \neq 0$, lo que implica que es $\cos p = 0$:

$$\cos p = 0 \rightarrow p_n = n\pi - \frac{1}{2}\pi = \frac{2n-1}{2}\pi, \quad n=1, 2, \dots$$

$$\text{Los autovalores son } \lambda_n = p_n^2 = \frac{(2n-1)^2}{4} \pi^2, \quad n=1, 2, \dots$$

Para los cuales existen las soluciones no triviales:

$$y_n(x) = c_1 \cos p_n x = c_1 \cos \left(\frac{2n-1}{2} \pi x \right), \quad n=1, 2, \dots$$

$$\text{Se obtienen las infinitas autofunciones: } \left\{ \cos \left(\frac{2n-1}{2} \pi x \right) \right\}, \quad n=1, 2, \dots$$

Tales autofunciones son ortogonales en el intervalo $[0, 1]$ establecido por el problema de contorno.

$$\forall a, b \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 \cos \left(\frac{2a-1}{2} \pi x \right) \cos \left(\frac{2b-1}{2} \pi x \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 [\cos(a-b)\pi x + \cos(a+b-1)\pi x] dx = 0, \quad a \neq b$$

- d) Consideremos finalmente la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden dada por $L_2(y) = -y''$ y la ecuación de autovalores $L_2(y) = \lambda y$ con las condiciones de contorno $y'(0) = 0, y'(1) + y(1) = 0$.

Se tiene, entonces:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = 0, y'(1) + y(1) = 0 \end{cases}$$

Veamos los autovalores:

Si $\lambda < 0$:

$$y(x) = c_1 e^{px} + c_2 e^{-px}, \text{ con } p = \sqrt{-\lambda} > 0$$

$$y'(x) = c_1 p e^{px} - c_2 p e^{-px}$$

De las condiciones de contorno:

$$y'(0) = c_1 p - c_2 p = 0 \rightarrow p(c_1 - c_2) = 0 \rightarrow c_1 - c_2 = 0 \rightarrow c_1 = c_2$$

$$y'(1) = c_1 p e^p - c_2 p e^{-p}$$

$$y(1) = c_1 e^p + c_2 e^{-p}$$

$$y'(1) + y(1) = c_1 p e^p - c_2 p e^{-p} + c_1 e^p + c_2 e^{-p} = c_1 (p+1) e^p + c_2 (-p+1) e^{-p} =$$

$$= c_1[(p+1)e^p + (-p+1)e^{-p}] = 0 \rightarrow c_1 = 0 \rightarrow c_2 = c_1 = 0$$

Y, por tanto, $\lambda < 0$ no puede ser autovalor.

Si $\lambda = 0$:

En este caso, $y'' = 0 \rightarrow y(x) = c_1 + c_2 x$

$$\begin{cases} y'(0) = c_2 = 0 \\ y'(1) + y(1) = c_2 + c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow c_1 = 0, c_2 = 0$$

No es, pues, autovalor.

Si $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 \cos px + c_2 \operatorname{sen} px, \text{ con } p = \sqrt{\lambda} > 0 \\ y'(x) &= -c_1 p \operatorname{sen} px + c_2 p \cos px \\ \begin{cases} y'(0) = -c_1 p \operatorname{sen} p0 + c_2 p \cos p0 = 0 \\ y'(1) = -c_1 p \operatorname{sen} p + c_2 p \cos p \\ y(1) = c_1 \cos p + c_2 \operatorname{sen} p \end{cases} &\rightarrow \\ \rightarrow \begin{cases} y'(0) = -c_1 p \operatorname{sen} p0 + c_2 p \cos p0 = 0 \\ y'(1) + y(1) = -c_1 p \operatorname{sen} p + c_2 p \cos p + c_1 \cos p + c_2 \operatorname{sen} p = 0 \end{cases} &\rightarrow \\ &\rightarrow \begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1(-p \operatorname{sen} p + \cos p) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Para que $\lambda > 0$ sea autovalor, ha de ser $c_1 \neq 0$, lo que implica $-p \operatorname{sen} p + \cos p = 0$, o bien:

$$\operatorname{tg} p = 1/p \rightarrow \operatorname{tg} \sqrt{\lambda} = 1/\sqrt{\lambda}$$

nos encontramos aquí con un caso en el que no podemos determinar de forma explícita los autovalores del problema. Solo indicamos la ecuación que verifican.

05. Los problemas de contorno con autovalores y no homogéneos

05.1. Definiciones

Nos planteamos ahora el problema así:

Hallar los valores de λ (autovalores) para los cuales el sistema

$$\begin{cases} L_n[y] = \lambda y + f \\ U[y] = 0 \end{cases}$$

tenga solución.

Donde es $f \in C$ en $[a, b]$ (derivable con continuidad en este intervalo).

Supongamos, al igual que en el caso anterior, que se conocen n soluciones de la ecuación diferencial $L_n(x) = \lambda x$:

$$\varphi_j = \varphi_j(t, \lambda), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

que satisfacen la condición inicial de que para algún punto c del intervalo $[a, b]$ se verifica que

$$\varphi_j^{k-1}(\zeta, \lambda) = \delta_{jk} \quad j, k = 1, \dots, n$$

A partir de estas n soluciones, vamos a iniciar un proceso que nos permita determinar una solución $u = u(t, \lambda)$ de la ecuación diferencial no homogénea con autovalores, $L[y] = \lambda y + f(x)$, y, a continuación, mediante una modificación, hacer que verifique también las condiciones de contorno $U[y] = 0$ del problema.

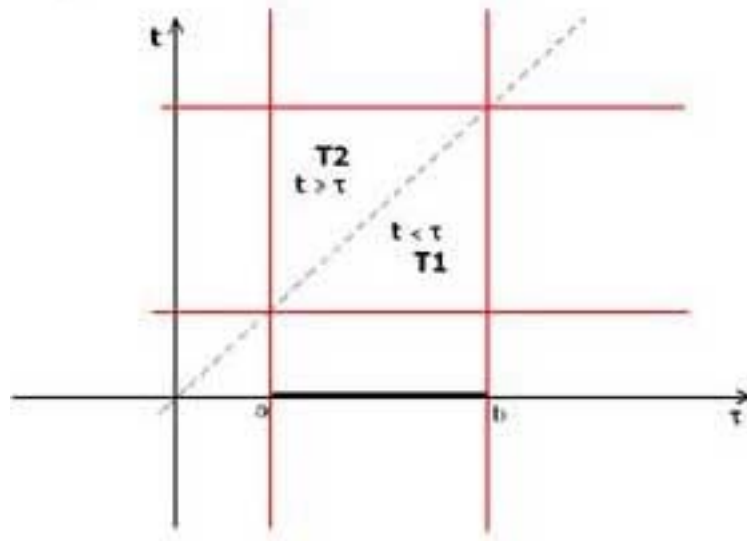
05.2. La función auxiliar $k(t, \tau, \lambda)$:

Construyamos una función $k(t, \tau, \lambda)$, definiéndola de la siguiente manera:

$$k(t, \tau, \lambda) = \frac{1}{p_0(\tau)W[\varphi_1(\tau, \lambda), \dots, \varphi_n(\tau, \lambda)]} \begin{vmatrix} \varphi_1(t, \lambda) & \dots & \varphi_n(t, \lambda) \\ \varphi_1'(\tau, \lambda) & \dots & \varphi_n'(\tau, \lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-2)}(\tau, \lambda) & \dots & \varphi_n^{(n-2)}(\tau, \lambda) \\ \varphi_1(\tau, \lambda) & \dots & \varphi_n(\tau, \lambda) \end{vmatrix}, \text{ si } t \geq \tau$$

$$k(t, \tau, \lambda) = 0, \text{ si } t < \tau$$

Gráficamente queda definida en el rectángulo de la figura:



Veamos dos propiedades básicas:

$$a) \frac{\partial^j}{\partial t^j} k(\tau+0, \tau, \lambda) = 0 \quad j = 0, 1, \dots, n-2$$

Es obvio, puesto que el determinante con el que se define la función se anula cuando son iguales dos filas, por construcción función continua de t .

$$b) \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} k(\tau+0, \tau, \lambda) - \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} k(\tau-0, \tau, \lambda) = 1/p_0(\tau)$$

pues en el triángulo T2 de la figura es:

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} k(t, \tau, \lambda) = \frac{1}{p_0(\tau) W[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n]} \begin{vmatrix} \varphi_1^{(n-1)}(t, \lambda) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(t, \lambda) \\ \varphi_1'(\tau, \lambda) & \dots & \varphi_n'(\tau, \lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-2)}(\tau, \lambda) & \dots & \varphi_n^{(n-2)}(\tau, \lambda) \\ \varphi_1(\tau, \lambda) & \dots & \varphi_n(\tau, \lambda) \end{vmatrix}$$

y en el triángulo T1:

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} k(t, \tau, \lambda) = 0$$

Resulta, entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} k(\tau + 0, \tau, \lambda) &= \frac{1}{p_0(\tau) W[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n]} \begin{vmatrix} \varphi_1^{(n-1)}(\tau, \lambda) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(\tau, \lambda) \\ \varphi_1'(\tau, \lambda) & \dots & \varphi_n'(\tau, \lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-2)}(\tau, \lambda) & \dots & \varphi_n^{(n-2)}(\tau, \lambda) \\ \varphi_1(\tau, \lambda) & \dots & \varphi_n(\tau, \lambda) \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{p_0(\tau) W[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n]} W[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n] = \frac{1}{p_0(\tau)} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} k(\tau - 0, \tau, \lambda) = 0$$

y de ambas expresiones, se obtiene la propiedad indicada:

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} k(\tau + 0, \tau, \lambda) - \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} k(\tau - 0, \tau, \lambda) = 1/p_0(\tau)$$

Por otra parte, existen y son continuas en ambos triángulos T1 y T2, las derivadas

$$\frac{\partial^j}{\partial t^j} k(t, \tau, \lambda), \quad j = n-1, n$$

Asimismo, k es función de t y además combinación lineal de las $\varphi_j(t, \lambda)$, soluciones de la ecuación $L_n(x) = \lambda x$, por lo que satisface dicha ecuación. Pero para $t = \tau$ la función $k(t, \tau, \lambda)$ deja de ser solución de la ecuación $L_n(x) = \lambda x$.

05.3. La función $u = u(t, \lambda)$:

A continuación vamos a obtener una función que verifique el problema de contorno no-homogéneo con autovalores. Lo haremos por modificación de la función que definimos a continuación.

Teorema:

La función $u = u(t, \lambda)$ definida por

$$u(t, \lambda) = \int_a^t k(t, \tau, \lambda) f(\tau) . d\tau$$

Es de clase C^n ($u \in C^n$) y verifica la ecuación diferencial no homogénea con autovalores.

Demostración:

Veamos que se verifica que $L[u] = \lambda u + f(x)$, donde es

$$L_n[u] = p_0 u^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} u' + p_n u$$

De las propiedades básicas vistas antes para la función auxiliar $k(t, \tau, \lambda)$ se tiene:

$$u'(t, \lambda) = k(t-0, t, \lambda) + \int_a^t k'(t, \tau, \lambda) \cdot f(\tau) \cdot d\tau = \int_a^t k'(t, \tau, \lambda) \cdot f(\tau) \cdot d\tau$$

$$u''(t, \lambda) = k'(t-0, t, \lambda) + \int_a^t k''(t, \tau, \lambda) \cdot f(\tau) \cdot d\tau = \int_a^t k''(t, \tau, \lambda) \cdot f(\tau) \cdot d\tau$$

... ..
... ..

$$u^{(n-1)}(t, \lambda) = k^{(n-2)}(t-0, t, \lambda) + \int_a^t k^{(n-1)}(t, \tau, \lambda) \cdot f(\tau) \cdot d\tau = \int_a^t k^{(n-1)}(t, \tau, \lambda) \cdot f(\tau) \cdot d\tau$$

Veamos ahora la derivada n-sima, para lo cual aplicamos la definición formal:

$$\begin{aligned} u^{(n)}(t, \lambda) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u^{(n-1)}(t + \Delta t, \lambda) - u^{(n-1)}(t, \lambda)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_a^{t+\Delta t} k^{(n-1)}(t + \Delta t, \tau, \lambda) f(\tau) \cdot d\tau - \int_a^t k^{(n-1)}(t, \tau, \lambda) f(\tau) \cdot d\tau \right] = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_a^{t+\Delta t} k^{(n-1)}(t + \Delta t, \tau, \lambda) f(\tau) \cdot d\tau - \int_a^t k^{(n-1)}(t + \Delta t, \tau, \lambda) f(\tau) \cdot d\tau \right] + \\ &+ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_a^t k^{(n-1)}(t + \Delta t, \tau, \lambda) f(\tau) \cdot d\tau - \int_a^t k^{(n-1)}(t, \tau, \lambda) f(\tau) \cdot d\tau \right] = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} k^{(n-1)}(t + \Delta t, \tau, \lambda) f(\tau) \cdot d\tau + \int_a^t k^{(n)}(t, \tau, \lambda) f(\tau) \cdot d\tau = \\ &= k^{(n-1)}(t+0, t^*, \lambda) f(t^*) + \int_a^t k^{(n)}(t, \tau, \lambda) \cdot f(\tau) \cdot d\tau, \quad t^* \in [t, t + \Delta t] \end{aligned}$$

En definitiva, teniendo en cuenta la propiedad b) del apartado anterior:

$$u^{(n)}(t, \lambda) = \frac{1}{p_0(t)} f(t) + \int_a^t k^{(n)}(t, \tau, \lambda) \cdot f(\tau) \cdot d\tau$$

Sustituyendo las derivadas sucesivas en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} L_n[u] &= p_0 u^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} u' + p_n u = p_0 \left[\frac{f(t)}{p_0} + \int_a^t k^{(n)}(t, \tau, \lambda) \cdot f(\tau) \cdot d\tau \right] + \\ &+ p_1 \int_a^t k^{(n-1)}(t, \tau, \lambda) \cdot f(\tau) \cdot d\tau + \dots + p_{n-1} \int_a^t k'(t, \tau, \lambda) \cdot f(\tau) \cdot d\tau + p_n \int_a^t k(t, \tau, \lambda) \cdot f(\tau) \cdot d\tau = \\ &= f(t) + p_0 \int_a^t k^{(n)}(t, \tau, \lambda) \cdot f(\tau) \cdot d\tau + p_1 \int_a^t k^{(n-1)}(t, \tau, \lambda) \cdot f(\tau) \cdot d\tau + \dots + p_{n-1} \int_a^t k'(t, \tau, \lambda) \cdot f(\tau) \cdot d\tau + \\ &+ p_n \int_a^t k(t, \tau, \lambda) \cdot f(\tau) \cdot d\tau = f(t) + \int_a^t [p_0 k^{(n)}(t, \tau, \lambda) + \dots + p_{n-1} k'(t, \tau, \lambda) + p_n k(t, \tau, \lambda)] f(\tau) \cdot d\tau = \end{aligned}$$

$$= f(t) + \int_a^t L_n k(t, \tau, \lambda) f(\tau) d\tau = f(t) + \int_a^t \lambda k(t, \tau, \lambda) f(\tau) d\tau = f(t) + \lambda \int_a^t k(t, \tau, \lambda) f(\tau) d\tau =$$

$$= f(t) + \lambda u$$

ya que la función auxiliar $k(t, \tau, \lambda)$ es solución del sistema homogéneo, por ser combinación lineal de soluciones. Esto es, $L_n k(t, \tau, \lambda) = \lambda k(t, \tau, \lambda)$.

La función $u = u(t, \lambda)$ verifica la ecuación de autovalores completa. Sin embargo no satisface en general las condiciones de contorno $U[y] = 0$. En lo que sigue vamos a modificar la función para que también verifique las condiciones de contorno.

05.4. Modificación de la función $u = u(t, \lambda)$. La función de Green:

Sea la función

$$G(t, \tau, \lambda) = k(t, \tau, \lambda) + \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j(t, \lambda)$$

donde elegimos las constantes c_j ($j=1, \dots, n$) de manera que para cada τ fijo de (a, b) , G como función de la variable t satisface las condiciones de contorno $U[y] = 0$, es decir, $UG = 0$. O sea:

$$U_k G = U_k k(t, \tau, \lambda) + \sum_{j=1}^n c_j U_k \varphi_j(t, \lambda) = 0 \quad (k=1, \dots, n)$$

y puesto que $U_k k$ puede extenderse hasta ser continua para $a \leq \tau \leq b$, se tiene:

$$\sum_{j=1}^n c_j U_k \varphi_j(t, \lambda) = -U_k k(t, \tau, \lambda) \quad (k=1, \dots, n) \quad [1]$$

donde el segundo miembro es continuo en (τ, λ) para $a \leq \tau \leq b$ y todo λ es una función entera de λ para un τ fijo. Puesto que el determinante Δ es una función entera de λ con ceros para los autovalores del problema de contorno homogéneo

$$\begin{cases} L_n[y] = \lambda y \\ U[y] = 0 \end{cases} \quad [2]$$

se sigue que si Δ no es idénticamente nulo, el sistema [1] determina las constantes c_j ($j=1, \dots, n$) como funciones de (τ, λ) continuas para τ sobre $[a, b]$ y para todo λ excepto para los autovalores de [2].

Para un τ fijo, las funciones c_j ($j=1, \dots, n$) son funciones meromorfas de λ . En definitiva, G está determinada, exceptuando para los autovalores de [2].

Al ser $u(t, \lambda) = \int_a^t k(t, \tau, \lambda) f(\tau) d\tau$ una solución de $L_n[y] = \lambda y + f$, es obvio que la función $u(t, \lambda) = \int_a^b G(t, \tau, \lambda) f(\tau) d\tau$ es una solución, excepto para los autovalores de

[2]. En definitiva, se puede establecer lo siguiente:

Si al menos para un valor de λ el problema de contorno con autovalores (2) no tiene solución excepto la trivial, entonces existe una única función $G(t, \tau, \lambda)$ definida para (t, τ) en el cuadrado $a \leq t \leq b, a \leq \tau \leq b$ y para todo complejo λ excepto para los autovalores de [2] con las siguientes propiedades:

a) Las derivadas parciales

$$\frac{\partial^k G}{\partial t^k} \quad k=0, 1, \dots, n-2$$

existen y son continuas en (t, τ, λ) para (t, τ) en el cuadrado $a \leq t \leq b, a \leq \tau \leq b$ y λ no es autovalor de [2]. Para (t, τ) fijos aquellas funciones son todas funciones meromorfas de λ .

b) Se verifica que

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} G(\tau+0, \tau, \lambda) - \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} G(\tau-0, \tau, \lambda) = 1/p_0(\tau)$$

c) Como función de t , G satisface $L_n[y] = \lambda y$, si $t \neq \tau$.

d) Como función de t , G satisface las condiciones de contorno $U[y] = 0$ para $a \leq \tau \leq b$.

e) La función definida por $u(t, \lambda) = \int_a^b G(t, \tau, \lambda) f(\tau) d\tau$ es solución del problema de contorno

$$\begin{cases} L_n[y] = \lambda y + f \\ U[y] = 0 \end{cases}$$

La función G es llamada *Función de Green* para el sistema

$$\begin{cases} L_n[y] = \lambda y \\ U[y] = 0 \end{cases}$$

05.5. Ejemplos elementales de aplicación de la función de Green:

a) Sea la ecuación diferencial $p(x).y'' + q(x).y + r(x) = f(x)$, donde son $p(x) = 1$, $q(x) = 0$, $r(x) = 0$, $f(x) = 1$, y con condiciones de contorno $y(0) = 0$, $y(1) = 0$. O sea:

$$\begin{cases} y''(x) = 1 \\ y(0) = 0, y(1) = 0 \end{cases}$$

El problema homogéneo sería:

$$\begin{cases} y''(x) = 0 \\ y(0) = 0, y(1) = 0 \end{cases}$$

Consideremos dos soluciones no triviales, $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$, del problema homogéneo que cumplan las condiciones de contorno. Sean, por ejemplo:

$$\varphi_1(x) = x$$

$$\varphi_2(x) = x - 1$$

$$W[\varphi_1(x), \varphi_2(x)] = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Función de Green:

$$G(x, \tau) = \frac{1}{p(x) \cdot W[\varphi_1, \varphi_2]} \varphi_1(\tau) \cdot \varphi_2(x), \quad 0 \leq \tau \leq x$$

$$G(x, \tau) = \frac{1}{p(x) \cdot W[\varphi_1, \varphi_2]} \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(\tau), \quad x \leq \tau \leq 1$$

Solución que verifica las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^x G(x, \tau) \cdot f(\tau) \cdot d\tau + \int_x^1 G(x, \tau) \cdot f(\tau) \cdot d\tau \\ &= \int_0^x \tau \cdot (x-1) \cdot 1 \cdot d\tau + \int_x^1 x \cdot (\tau-1) \cdot 1 \cdot d\tau = (x-1) \int_0^x \tau d\tau + x \int_x^1 (\tau-1) \cdot d\tau = \\ &= (x-1) \cdot \frac{x^2}{2} + x \left(-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} + x \right) = \frac{1}{2} (x^2 - x) \\ \text{Solución : } &\frac{1}{2} (x^2 - x) \end{aligned}$$

Que obviamente verifica el problema, ya que $y''(x) = 1, y(0) = y(1) = 0$

- b) Sea la ecuación diferencial $p(x) \cdot y'' + q(x) \cdot y' + r(x) = f(x)$, donde son $p(x) = 1, q(x) = 0, r(x) = 0, f(x) = x$, y con condiciones de contorno $y(0) = 0, y(1) = 0$. O sea:

$$\begin{cases} y''(x) = x \\ y(0) = 0, y(1) = 0 \end{cases}$$

El problema homogéneo sería:

$$\begin{cases} y''(x) = 0 \\ y(0) = 0, y(1) = 0 \end{cases}$$

Consideremos dos soluciones no triviales, $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$, del problema homogéneo que cumplan las condiciones de contorno. Sean, por ejemplo:

$$\varphi_1(x) = x$$

$$\varphi_2(x) = x - 1$$

$$W[\varphi_1(x), \varphi_2(x)] = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Función de Green:

$$G(x, \tau) = \frac{1}{\rho(x) \cdot W[\varphi_1, \varphi_2]} \varphi_1(\tau) \cdot \varphi_2(x), \quad 0 \leq \tau \leq x$$

$$G(x, \tau) = \frac{1}{\rho(x) \cdot W[\varphi_1, \varphi_2]} \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(\tau), \quad x \leq \tau \leq 1$$

Solución que verifica las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^x G(x, \tau) \cdot f(\tau) \cdot d\tau = \int_0^x G(x, \tau) \cdot f(\tau) \cdot d\tau + \int_x^1 G(x, \tau) \cdot f(\tau) \cdot d\tau = \\ &= \int_0^x \tau \cdot (x-1) \cdot \tau \cdot d\tau + \int_x^1 x \cdot (\tau-1) \cdot \tau \cdot d\tau = (x-1) \int_0^x \tau^2 d\tau + x \int_x^1 (\tau^2 - \tau) \cdot d\tau = \\ &= (x-1) \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{x}{6} - \frac{x^4}{3} + \frac{x^3}{2} = \frac{1}{6} [x^3 - x] \\ &\text{Solución : } \frac{1}{6} (x^3 - x) \end{aligned}$$

Que obviamente verifica el problema, ya que $y''(x) = x$, $y(0) = y(1) = 0$

Bibliografía

Castro Brzezicki, Antonio de. Complementos de Matemáticas, Madrid, Editorial Saeta, 1970

E. Hairer, S.P. Norsett, G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations*. vols. I-II, Springer, 2010.

Castro Brzezicki, Antonio de; Maraval Casesnoves, Darío. Métodos matemáticos de la Ingeniería, Madrid, Dosat, 1961.

Coddington, Earl A.. Introduction to Ordinary Differential Equations, Dover, 1990

C.H. Edwards, D.E. Penney. *Ecuaciones Diferenciales Elementales y Problemas con Condiciones en la Frontera*. Prentice Hall, 2000.

R.K. Nagel, E.B. Saff, A.D. Snider. *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera*. Pearson, 2002.