Operadores funcionales. Invariancia.

01. El Espacio vectorial de las funciones definidas desde un espacio euclidiano:

01.1. El espacio vectorial euclidiano. Operadores en el espacio.

Un espacio vectorial euclidiano es un grupo aditivo (V,+) que se denomina grupo de los vectores, y un cuerpo (K,+,.), que se llama cuerpo de los escalares, tal que V es conmutativo y existe una ley externa "." de kxV en V (escalares por vectores), tal que:

$$\forall x, y \in V, \forall a \in k, a.(x+y) = a.x + a.y$$
$$\forall x \in V, \forall a, b \in k, (a+b).x = a.x + b.x$$
$$\forall x \in V, \forall a, b \in k, (a.b).x = a.(b.x)$$
$$\exists 1 \in k / 1.x = x, \forall x \in V$$

y en el que existe un producto interior de VXV en k tal que para dos vectores dados de V, $x = (x_1,...,x_n),\ y = (y_1,...,y_n)$ se verifica que $x.y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in k$, donde los elementos $x_1,...,x_n\ y\ y_1,...,y_n$ son escalares que se denominan componentes de los vectores *x* y *y*, respectivamente. Tal producto interior se denomina producto escalar en el espacio euclidiano, y la raíz cuadrada positiva del producto escalar de un vector por si mismo se llama norma o módulo del vector.

Producto interior:

$$\forall x, y \in V,\ \ x.y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in k \,/\, x = (x_1,...,x_n),\ y = (y_1,...,y_n)$$

Norma o módulo:

$$|x| \equiv \mathrm{mod}(x) = +\sqrt{x.x} = +\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \ / \ x = (x_1,...,x_n)$$

Representaremos en adelante por $(E_n,+,.;k)$ a un espacio vectorial cuyo cuerpo de escalares es k y donde n es el número de componentes de los vectores, o dimensión del espacio.

Un operador en el espacio euclidiano es una aplicación τ del espacio en si mismo, de modo que a cada vector le corresponde otro vector del espacio:

$$\tau : E_n \to E_n$$

o sea,

$$\forall x \in E_n, x \xrightarrow{\tau} x' \in E_n$$

o bien, podemos escribir

$$\forall x \in E_n, \tau x = x' \in E_n$$

Esto quiere decir, usando la notación de las componentes del vector, que para cada operador existe una matriz de escalares cuadrada de orden n, que llamaremos matriz A asociada al operador, tal que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\forall x \in E_n, x = (x_1, \dots, x_n) \wedge \tau x = x' \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ \dots \\ \dots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

Por lo que también podemos representar la igualdad $\tau x = x'$ por la expresión $Ax = x'$, donde es A la matriz asociada al operador τ.

Llamaremos T_n al conjunto de los operadores definidos sobre el espacio euclidiano E_n, y A_n al conjunto de sus matrices asociadas.

01.2. El espacio de las funciones definidas desde el espacio euclidiano. Operadores.

Si consideramos las funciones definidas desde el espacio euclidiano real $(E_n, +, .; R)$ en un conjunto cualquiera M, $\varphi : E_n \rightarrow M$, es inmediato que el conjunto de todas ellas

$$\Phi_M = \{\varphi / \varphi : E_n \rightarrow M\}$$

tiene estructura de espacio vectorial sobre R, pues

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \Phi_M, \forall \alpha, \beta \in R, \forall x \in E_n, \ \alpha.\varphi_1(x) \in M \wedge \beta.\varphi_2(x) \in M \rightarrow$$
$$\rightarrow \alpha.\varphi_1(x) + \beta.\varphi_2(x) \in M \rightarrow \alpha.\varphi_1 + \beta.\varphi_2 \in \Phi_M$$

Llamaremos al espacio $(\Phi_M, +, .; R)$ espacio vectorial de las funciones definidas desde el espacio vectorial euclidiano real $(E_n, +, .; R)$ en el espacio de objetos M.

También sobre el espacio $(\Phi_M, +, .; R)$ podemos definir operadores $\gamma : \Phi_M \rightarrow \Phi_M$, y llamaremos *O* al conjunto de todos estos operadores:

$$O = \{\gamma / \gamma : \Phi_M \to \Phi_M\}$$

En lo que sigue se pretende relacionar los operadores τ del espacio euclidiano real $(E_n,+,.;R)$ con los operadores γ del espacio $(\Phi_M,+,.;R)$ de las funciones definidas desde E_n en *M.*

02. Los operadores O_τ :

02.1. Definición.

Consideremos un operador τ cualquiera en $(E_n,+,.;R)$:

$$\forall \tau \in T_n, \tau : E_n \to E_n$$

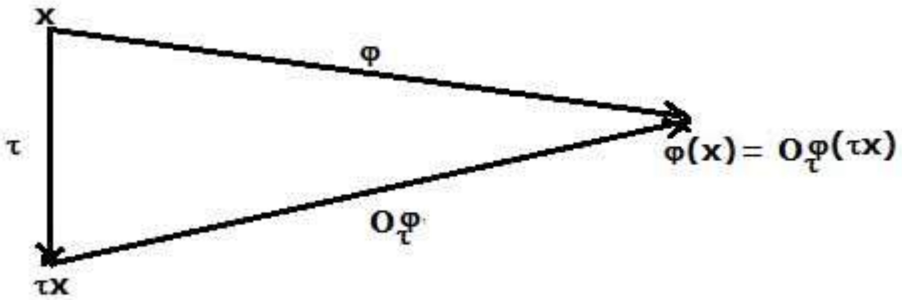
es decir

$$\forall \tau \in T_n, \forall x \in E_n, \tau x \in E_n$$

Si es Φ_M el espacio de las funciones de origen en E_n e imagen en *M*, se define el operador O_τ como un operador $O_\tau : \Phi_M \to \Phi_M$ tal que

$$\forall \varphi \in \Phi_M, \forall x \in E_n, O_\tau \varphi(\tau x) = \varphi(x) \in M$$

En definitiva, el operador O_τ queda definido por la condición de que la imagen de $x \in E_n$ por φ coincida con la imagen de $\tau x \in E_n$ por $O_\tau \varphi$. Gráficamente:



Diremos, por consiguiente, que el operador O_τ está asociado al operador τ.

Si llamamos $U \equiv O_\tau \varphi$ se cumplirá que $U(\tau x) = \varphi(x)$ y si llamamos $z \equiv \tau x$ se tendrá:

$U(z) = \varphi(x)$ o bien $U(z) = \varphi(\tau^{-1} z)$, lo cual nos permite expresar $U(x) = \varphi(\tau^{-1} x)$. Es decir:

$$O_\tau \varphi(x) = \varphi(\tau^{-1} x)$$

02.2. Estructura.

Teorema: Los operadores O_τ son lineales, es decir:

1) $\forall \varphi \in \Phi_M, \forall \alpha \in R, O_\tau \alpha\varphi = \alpha O_\tau \varphi$

2) $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \Phi_M, O_\tau(\varphi_1 + \varphi_2) = O_\tau \varphi_1 + O_\tau \varphi_2$

Demostración:

1) $\forall\varphi\in\Phi_M,\forall\alpha\in R,\forall x\in E_n, O_\tau\alpha\varphi(x)=\alpha\varphi(\tau^{-1}x)=\alpha O_\tau\varphi(x)\rightarrow O_\tau\alpha\varphi=\alpha O_\tau\varphi$

2) $\forall\varphi_1,\varphi_2\in\Phi_M,\forall x\in E_n, O_\tau(\varphi_1+\varphi_2)(x)=(\varphi_1+\varphi_2)(\tau^{-1}x)=$

$=\varphi_1(\tau^{-1}x)+\varphi_2(\tau^{-1}x)=O_\tau\varphi_1(x)+O_\tau\varphi_2(x)\rightarrow O_\tau(\varphi_1+\varphi_2)=O_\tau\varphi_1+O_\tau\varphi_2$

Teorema: Si son $O_{\tau_1},O_{\tau_2}\in O$ los operadores asociados a $\tau_1,\tau_2\in T_n$, se verifica que

$$O_{\tau_2\tau_1}=O_{\tau_2}O_{\tau_1}$$

Demostr.:
De ser

$O_{\tau_1}\varphi(\tau_1 x)=\varphi(x)$, $O_{\tau_2}\varphi(\tau_2 x)=\varphi(x)$, $O_{\tau_1\tau_2}\varphi(\tau_1\tau_2 x)=\varphi(x)$

llamando $O_{\tau_1}\varphi\equiv\varphi_1,\ \tau_1 x\equiv x_1$:

$O_{\tau_2}\varphi_1(\tau_2 x_1)\equiv\varphi_1(x_1)\rightarrow O_{\tau_2}O_{\tau_1}\varphi(\tau_2\tau_1 x)=O_{\tau_1}\varphi(\tau_1 x)=\varphi(x)\rightarrow$

$\rightarrow O_{\tau_2}O_{\tau_1}\varphi(\tau_2\tau_1 x)=O_{\tau_2\tau_1}\varphi(\tau_2\tau_1 x)=\varphi(x)\rightarrow O_{\tau_2\tau_1}=O_{\tau_2}O_{\tau_1}$

Teorema: Si los operadores $\tau\in T_n$ forman grupo multiplicativo también forman grupo multiplicativo los operadores $O_\tau\in O$ asociados.

Demostración:

a) La multiplicación es ley interna:

$$\forall O_\tau,O_\mu\in O,\quad O_\tau.O_\mu=O_{\tau\mu}\in O$$

b) Tiene la propiedad asociativa:

$$\forall O_\tau,O_\mu,O_\upsilon\in O,\quad O_\tau.(O_\mu.O_\upsilon)=O_\tau.O_{\mu\upsilon}=O_{\tau(\mu\upsilon)}=$$
$$=O_{(\tau\mu)\upsilon}=O_{\tau\mu}.O_\upsilon=(O_\tau.O_\mu).O_\upsilon$$

c) Existe elemento neutro:

Sea $1\in T_n$ el operador neutro del grupo de los operadores $\tau\in T_n$:

$$\forall O_\tau\in O,\quad O_\tau.O_1=O_{\tau 1}=O_\tau\rightarrow O_1 neutro$$

d) Todo elemento tiene simétrico:

Sea $\tau\in T_n\wedge\tau^{-1}\in T_n$ el operador simétrico de $\tau\in T_n\rightarrow\tau^{-1}.\tau=1$

$$O_\tau.O_{\tau^{-1}}=O_{\tau\tau^{-1}}=O_1\rightarrow O_{\tau^{-1}} simetrico\ de\ O_\tau$$

03.Acerca de la invariancia de las funciones $\varphi \in \Phi_M$ definidas desde el espacio euclidiano respecto a los operadores $\tau \in T_n$ y $O_\tau \in O$:

a) Invariancia con respecto a los operadores $\tau \in T_n$ del espacio E_n euclidiano.

Una función $\varphi \in \Phi_M$ se dice invariante respecto al operador $\tau \in T_n$ sii

$$\varphi(\tau x) = \varphi(x), \forall x \in E_n$$

$\varphi \in \Phi_M$ es invariante respecto al grupo T_n sii

$$\forall \tau \in T_n,\ \varphi(\tau x) = \varphi(x), \forall x \in E_n$$

Ejemplo:
Sea $\varphi : E_n \to R$ tal que $\forall x \in E_n, \varphi(x) = |x| \in R$ y sea $\tau \in T_n$ un operador unitario, esto es, un operador rotación en el espacio E_n. Se tiene que $|\tau x| = |x|$, por lo que:

$$\forall x \in E_n, \varphi(\tau x) = |\tau x| = |x| = \varphi(x) \in R$$

b) Invariancia con respecto a los operadores $O_\tau \in O$ del espacio Φ_M de las funciones:

Una función $\varphi \in \Phi_M$ se dice invariante respecto al operador $O_\tau \in O$ sii

$$O_\tau \varphi(x) = \varphi(x), \forall x \in E_n$$

Obviamente respecto al operador O_1 toda función es invariante.

El problema de determinar las funciones invariantes respecto al operador $O_\tau \in O$ se reduce al cálculo de las funciones propias para el autovalor $\lambda = 1$:

$$O_\tau \varphi(x) = \lambda \varphi(x) = \varphi(x) \to \lambda = 1$$

c) Teorema de equivalencia:
La función $\varphi \in \Phi_M$ es invariante respecto a un operador $\tau \in T_n$ si y solo si es invariante respecto al operador $O_\tau \in O$.
Demostración:
a) Si $\varphi \in \Phi_M$ es invar. respecto a $\tau \in T_n$
$\tau \in T_n \to \forall x \in E_n, \varphi(\tau x) = \varphi(x) \wedge O_\tau \varphi(\tau x) = \varphi(x) \to$
$\to O_\tau \varphi(\tau x) = \varphi(\tau x) \to O_\tau \varphi(x) = \varphi(x) \to \varphi \in \Phi_M$ es invar. respecto a $O_\tau \in O$
b) Si $\varphi \in \Phi_M$ es invar. respecto a $O_\tau \in O$
$O_\tau \in O \to \forall x \in E_n, O_\tau \varphi(x) = \varphi(x) \wedge O_\tau \varphi(\tau x) = \varphi(x) \to$
$\to O_\tau \varphi(\tau x) = O_\tau \varphi(x) \to \varphi(\tau x) = \varphi(x) \to \varphi \in \Phi_M$ es invar. respecto a $\tau \in T_n$