

Una demostración analítica de la irracionalidad del número π

Los griegos descubrieron que el número pi (π) no se podría calcular nunca como el cociente de dos números enteros. Descubrieron, por tanto, que no era un 'número racional'. Y este hecho les pareció asombroso y digno de guardarse en secreto.

Hoy día puede hacerse la demostración de la irracionalidad del número π de diferentes maneras. Exponemos aquí una demostración basada en la prueba que hace el profesor Michael Spivak en su obra "Calculus". Es una demostración mediante una reducción al absurdo, esto es, suponiendo en principio que π es un número racional llegaríamos a una contradicción lógica.

Es suficiente demostrar que π^2 es irracional para que podamos afirmar la irracionalidad de π , puesto que si π fuera racional también lo sería π^2 . Para desarrollar la demostración por reducción al absurdo (Teorema 3) necesitamos probar dos teoremas auxiliares previos (Teorema 1 y Teorema 2) que se refieren a las funciones que intervienen en dicho teorema. Los procesos de prueba son muy sencillos.

Teorema 1:

Dadas las funciones $f_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, se verifica que:

- a) $0 < f_n(x) < \frac{1}{n!}$, $0 < x < 1$
- b) $f_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$, $f_n^{(k)}(1) \in \mathbb{Z} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Demostración:

- a) Si $0 < x < 1 \Rightarrow 0 < x(1-x) < 1 \Rightarrow 0 < x^n \cdot (1-x)^n < 1 \Rightarrow 0 < \frac{x^n \cdot (1-x)^n}{n!} < \frac{1}{n!}$, por tanto:

$$0 < f_n(x) < \frac{1}{n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{si } 0 < x < 1$$

- b) Como es $x^n(1-x)^n$ un polinomio de coeficientes enteros cuya mayor potencia es x^{2n} y el menor de los exponentes es n , se tiene que existen números enteros $c_n, c_{n+1}, \dots, c_{2n}$ tales que

$$x^n(1-x)^n = \sum_{k=n}^{2n} c_k x^k$$

y por tanto se puede expresar

$$f_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=n}^{2n} c_k x^k$$

sus derivadas serían:

$$f_n^{(k)}(x) = 0, \text{ si } k < n \vee k > 2n$$

en los restantes casos:

$$f_n^{(n)}(x) = \frac{1}{n!} [n! \cdot c_n + \varphi_n(x)], \text{ siendo } \varphi_n(x) \text{ suma de términos en } x$$

$$f_n^{(n+1)}(x) = \frac{1}{n!} [(n+1)! \cdot c_{n+1} + \varphi_{n+1}(x)], \text{ siendo } \varphi_{n+1}(x) \text{ suma de términos en } x$$

... ..

... ..

$$f_n^{(2n)}(x) = \frac{1}{n!} [(2n)! \cdot c_{2n}]$$

por lo cual, para $x=0$:

$$f_n^{(n)}(0) = c_n$$

$$f_n^{(n+1)}(0) = (n+1) \cdot c_{n+1}$$

.....

.....

$$f_n^{(2n)}(0) = \frac{(2n)!}{n!} c_{2n} = 2n \cdot (2n-1) \dots (n+1) \cdot c_{2n}$$

o sea, las derivadas en el origen, de cualquier orden, son números enteros.

$$\forall k \in N, f_n^{(k)}(0) \in Z$$

Por otra parte, de ser $f_n(x) = f_n(1-x)$, al derivar se tiene:

$$f_n^{(k)}(x) = (-1)^k \cdot f_n^{(k)}(1-x)$$

y, por consiguiente, es $f_n^{(k)}(1) = (-1)^k \cdot f_n^{(k)}(0)$ numero entero. Así, pues:

$$\forall k \in N, f_n^{(k)}(1) \in Z$$

En definitiva:

$$\forall k \in N, f_n^{(k)}(0) \in Z \quad \text{y} \quad \forall k \in N, f_n^{(k)}(1) \in Z$$

Teorema 2:

$$\forall \varepsilon > 0, \forall a \in R \text{ fijo, } \exists n'_0 \in N / \forall n > n'_0, \frac{a^n}{n!} < \varepsilon$$

Demostración:

Bastará elegir un $n_0 > 2a$. Se tiene que

$$\frac{a^{n_0+1}}{(n_0+1)!} = \frac{a}{n_0+1} \cdot \frac{a^{n_0}}{n_0!} < \frac{1}{2} \cdot \frac{a^{n_0}}{n_0!}$$

$$\left(\text{puesto que } n_0 > 2a \Rightarrow n_0 + 1 > 2a \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{a}{n_0+1} \right)$$

asimismo sumando a n_0 un $2, 3, \dots, k$, sería:

$$\frac{a^{n_0+2}}{(n_0+2)!} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a^{n_0}}{n_0!}, \dots, \frac{a^{n_0+k}}{(n_0+k)!} < \frac{1}{2^k} \cdot \frac{a^{n_0}}{n_0!}$$

para un k tan grande que $2^k > \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{a^{n_0}}{n_0!}$ se cumple que:

$$\frac{a^{n_0+k}}{(n_0+k)!} < \frac{1}{2^k} \cdot \frac{a^{n_0}}{n_0!} < \frac{1}{\frac{a^{n_0}}{\varepsilon \cdot n_0!}} \cdot \frac{a^{n_0}}{n_0!} = \varepsilon$$

o sea, para un $n \geq n'_0 = n_0 + k$ es $\frac{a^n}{n!} < \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$ que es lo que se quería probar.

Teorema 3:

Consideremos las funciones de la forma $G_p(x) = p^n \sum_{k=0}^n (\pi^2)^{n-k} (-1)^k \cdot f_n^{(2k)}(x)$, para

cada $p \in \mathbb{Z}^+$, donde las $f_n(x)$ son las funciones del Teorema 1. Si el número π^2 fuera racional se tendría que $\exists a, b \in \mathbb{Z}^+ / \pi^2 = a/b$, verificándose:

a) $G_b(0) \in \mathbb{Z}, \quad G_b(1) \in \mathbb{Z}$

b) $G_b''(x) + \pi^2 \cdot G_b(x) = \pi^2 \cdot a^n \cdot f_n(x)$

c) Si es $H(x) = G_b'(x) \cdot \sin \pi x - \pi \cdot G_b(x) \cdot \cos \pi x$, entonces $H'(x) = \pi^2 a^n f_n(x) \cdot \sin \pi x$

d) Si es $I_n = \int_0^1 H'(x) \cdot dx$ se cumple que $I_n = \pi \cdot [G(1) - G(0)] \in \mathbb{Z}$

e) $0 < I_n < 1$

Demostración:

a) $G_b(x) = b^n \sum_{k=0}^n \pi^{2n-2k} (-1)^k f_n^{(2k)}(x) = \sum_{k=0}^n b^k a^{n-k} (-1)^k f_n^{(2k)}(x)$

si $x=0$: $G_b(0) = \sum_{k=0}^n b^k a^{n-k} (-1)^k f_n^{(2k)}(0) \in \mathbb{Z}$ por ser una suma de productos de números enteros.

si $x=1$: $G_b(1) = \sum_{k=0}^n b^k a^{n-k} (-1)^k f_n^{(2k)}(1) \in \mathbb{Z}$ por ser una suma de productos de números enteros.

b) Veamos las dos primeras derivadas de esta función:

$$G'_b(x) = b^n \sum_{k=0}^n \pi^{2n-2k} (-1)^k f_n^{(2k+1)}(x)$$

$$G''_b(x) = b^n \sum_{k=0}^n \pi^{2n-2k} (-1)^k f_n^{(2k+2)}(x)$$

desarrollando:

$$G_b(x) = b^n [\pi^{2n} f_n(x) - \pi^{2n-2} f_n''(x) + \pi^{2n-4} f_n^{(4)}(x) - \dots (-1)^n f_n^{(2n)}(x)]$$

$$G''_b(x) = b^n [\pi^{2n} f_n''(x) - \pi^{2n-2} f_n^{(4)}(x) + \pi^{2n-4} f_n^{(6)}(x) - \dots (-1)^n f_n^{(2n+2)}(x)]$$

La suma $\pi^2 G_b(x) + G''_b(x)$ resulta, cancelando términos:

$$\pi^2 G_b(x) + G''_b(x) = b^n \pi^{2n+2} f_n(x) = \pi^2 b^n (\pi^2)^n f_n(x) = \pi^2 b^n \left(\frac{a}{b}\right)^n f_n(x) = \pi^2 a^n f_n(x)$$

c) La función $H(x) = G'_b(x) \cdot \text{sen} \pi x - \pi \cdot G_b(x) \cdot \cos \pi x$ tiene por derivada a la función:

$$\begin{aligned} H'(x) &= G''_b(x) \cdot \text{sen} \pi x - \pi \cdot G'_b(x) \cdot \cos \pi x - \pi \cdot G'_b(x) \cdot \cos \pi x + \pi^2 \cdot G_b(x) \cdot \text{sen} \pi x = \\ &= [G''_b(x) + \pi^2 G_b(x)] \text{sen} \pi x = \pi^2 \cdot a^n f_n(x) \cdot \text{sen} \pi x \end{aligned}$$

d) La integral $I_n = \int_0^1 H'(x) \cdot dx$ es:

$$I_n = \int_0^1 H'(x) \cdot dx = H(1) - H(0) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^1 \pi^2 a^n f_n(x) \cdot \text{sen} \pi x \cdot dx &= G'_b(1) \cdot \text{sen} \pi - \pi \cdot G_b(1) \cdot \cos \pi - G'_b(0) \cdot \text{sen} 0 + \pi \cdot G_b(0) \cdot \cos 0 = \\ &= \pi [G_b(1) - G_b(0)] \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\text{En definitiva, } I_n = \int_0^1 \pi^2 a^n f_n(x) \cdot \text{sen} \pi x \cdot dx \in \mathbb{Z}$$

e) Se tiene, por el teorema 1_a), $0 < f_n(x) < \frac{1}{n!}$, si $0 < x < 1$,

Asimismo es $0 \leq \text{sen} \pi x \leq 1$, $0 < x < 1$

Por consiguiente, es $0 < f_n(x) \cdot \text{sen} \pi x < \frac{1}{n!}$, si $0 < x < 1$

También, es $0 < \pi^2 \cdot a^n \cdot f_n(x) \cdot \text{sen} \pi x < \pi^2 \frac{a^n}{n!}$, si $0 < x < 1$

Integrando los dos miembros de la desigualdad:

$$0 < \int_0^1 \pi^2 a^n f_n(x) \cdot \text{sen } \pi x \cdot dx < \int_0^1 \pi^2 \frac{a^n}{n!} \cdot dx = \pi^2 \frac{a^n}{n!}$$

Por el teorema 2:

$$0 < \int_0^1 \pi^2 a^n f_n(x) \cdot \text{sen } \pi x \cdot dx = I_n < \pi^2 \frac{a^n}{n!} < \pi^2 \varepsilon$$

O sea, $0 < I_n < \pi^2 \varepsilon$

En particular, para $\varepsilon = \frac{1}{\pi^2}$: $0 < I_n < 1$

Corolario:

El número π es irracional, es decir, no existen dos enteros a, b tales que $\pi^2 = \frac{a}{b}$

En efecto, las afirmaciones d) y e) del teorema 3 son una contradicción, pues el número entero I_n no puede encontrarse nunca entre el cero y el uno, ya que ambos son enteros consecutivos. Luego es falso que $\pi^2 = \frac{a}{b}$ para dos enteros a y b . Esto es, el número π no es un número racional.

Carlos S. CHINEA
casanchi@teleline.es