Acerca de los números primos en el anillo de los enteros

Introducción:
La llamada *Teoría elemental de números* es una rama de la Teoría de números en la que realizamos el estudio de las cuestiones básicas de divisibilidad, inducción y análisis de procesos combinatorios mediante métodos elementales, considerando elementales los métodos en los que no figuren números imaginarios. Para la resolución de los problemas que surgen en la teoría elemental de números muchas veces hemos de utilizar también métodos no elementales. Ocurre, en variadas ocasiones, que al determinar la solución no elemental de un problema se evidencia también una solución elemental del mismo.

Todas las propiedades de los números enteros pueden, de algún modo, relacionarse con los *números primos*, por lo que el estudio de los problemas de la distribución de estos números en la sucesión natural es de enorme importancia.

La primera demostración del carácter infinito del conjunto de los números primos se debe a Euclides, y el estudio del número de primos no mayores que un número dado x, conjunto $\pi(x)$, fue estudiado por primera vez en el siglo XIX por el matemático ruso P.L. Chebyshev (1821-1894). Chebyshev lograría la prueba de varias desigualdades que involucraban al número de primos no mayores que un número dado x, usando métodos elementales:

$$0{,}92129\frac{x}{\ln x} < \pi(x) < 1{,}10555...\frac{x}{\ln x}$$

También debemos a Chebyshev la prueba de que para n mayor o igual que 2, el intervalo (n,2n) contiene al menos un número primo.

A finales del siglo XIX se pudo establecer, usando métodos no elementales (análisis complejo) que en realidad $\pi(x) \approx x/\ln x$, y durante bastantes años se consideró que este resultado nunca se podría obtener mediante métodos elementales, hasta que en 1948 el matemático A. Selberg (1917-2007) logró la prueba elemental del mismo. Por todos los resultados obtenidos en Teoría de números, Selberg fue galardonado con la Medalla Fields en 1950.

En cuanto a la separación de los números primos de aquellos que no lo son (compuestos), se había elaborado ya en el siglo III a. C. la llamada *Criba de Eratóstenes*, muy popular hoy día entre los escolares que se inician en el concepto de número primo.

Por otra parte, ya en el siglo XX, Viggo Brun (1875-1978) pudo comprobar en 1919 que una modificación del método de Eratóstenes permitía el estudio y determinación de los llamados números *casi primos* (que más adelante definiremos). El trabajo de Brun tiene la importancia histórica de iniciar el estudio de las Cribas de números enteros para determinar números primos. El *Teorema de Brun* establece la convergencia de la suma de los inversos de los primos gemelos, en contraste con la suma de los inversos de los números primos, que es divergente.

Se ha logrado el desarrollo de importantes teoremas relativos a los números primos, entre los que es de destacar el Teorema fundamental de la aritmética, que establece que todo número natural puede representarse de forma única mediante un producto de números primos (salvo el orden). Asimismo hay problemas abiertos desde hace bastantes años sobre la distribución y operatividad con números primos, como son la llamada hipótesis de Riemann, formulada por Bernhard Riemann (1826-1866) en 1859, o la conjetura de Goldbach, formulada por Christian Goldbach (1690-1764), en una carta que envió a Euler en 1742.


Christian Goldbach (1690-1764)


Bernhard Riemann (1826-1846)

El Teorema de Chen, formulado en 1966 por Chen Jingrun (1933-1996) prueba que todo número suficientemente grande puede expresarse como suma de dos primos o bien de un primo y un semiprimo. Representó un avance importante en el estudio de la Conjetura de Goldbach.

Digamos también que una forma débil de la conjetura de Goldbach ha sido resuelta recientemente por el matemático peruano Harald Helfgott (1977-) en el año 2015.


Chen Jilgrun (1933-1996)


Harald Helfgott (1977-)

En las notas que siguen detallamos algunos de los aspectos más básicos sobre los números primos.

Definición y propiedades básicas del número primo:

Definición:

Sea Z el dominio íntegro de los números enteros.

Número primo:

Se dice que el número $p \in Z - \{0,1,-1\}$ es un número primo si, y solamente si, es divisible por unidades o por sus asociados.

(dos números a,b enteros son asociados, aSb, si uno divide al otro)

Obviamente, los divisores del número primo p constituyen el conjunto de cuatro elementos $\{1,-1,p,-p\}$.

También resulta obvio de la definición que los números 0, 1 y -1 no son números primos.

Número compuesto:

Un número entero p es compuesto si no es primo y es distinto de los elementos del conjunto $\{0,1,-1\}$.

Teorema:

Sea (a) el ideal engendrado por el entero $a \in Z$.

Se verifican las proposiciones siguientes:

1) $(a)=(b) \leftrightarrow a \ y \ b$ *son números asociados en* Z
2) $p \in Z \ primo \leftrightarrow (p)$ *ideal maximal.*

En efecto:

1) Si $(a)=(b) \leftrightarrow a|b \wedge b|a \rightarrow aSb \rightarrow a,b \ asociados$

Si $a,b \ asociados \rightarrow \exists u,u' \in \{1,-1\} / (au = b \wedge b = au') \rightarrow ((b) \subseteq (a) \wedge (a) \subseteq (b)) \rightarrow$
$\rightarrow (a)=(b)$

2) Sea $p \ primo$:

Si $\exists q \in Z - \{1,-1\} / (p) \subseteq (q) \rightarrow \exists h \in Z - \{1,-1\} / \ p = qh \rightarrow p$ no sería primo, luego ha de ser $(q) \subseteq (p) \rightarrow (p)$ maximal

Sea (p) maximal:

Si $(q) \subseteq (p), \forall q \in Z - \{1,-1\} \rightarrow q = ph, h \in Z - \{1,-1\} \rightarrow q = ph \wedge q \neq p \rightarrow$
$\rightarrow p \ primo$.

Propiedades básicas:

1. Si es p primo y divide a un producto de dos enteros, entonces p divide al menos a uno de los dos enteros.

2. Si es p primo y no divide al entero a, entonces el máximo divisor común de ambos números es 1.
3. El menor de los divisores de un número compuesto cualquiera es un número primo.
4. Si un número primo p divide a un producto n de dos factores primos, entonces p es igual o asociado a uno de ellos.
5. Si un número entero es divisible por otros enteros que son primos dos a dos, entonces es también divisible por su producto.

Comprobemos estas propiedades:

1. Sea p primo tal que $p|ab$.

   Si $p|a$ hemos terminado, caso contrario:

   $$mcd(p,a)=1 \to \exists x,y \in Z \,/\, xp+ya=1 \to xpb+yab=b \to$$
   $$\to p|xpb \wedge p|yab \to p|(xpb+yab) \to p|b$$

2. Sea p primo tal que $\neg(p|a)$.

   Los divisores de $p \to \{1,-1,p,-p\}$. De estos números solo pueden dividir a a los números 1 y -1, luego $mcd(p,a)=1$.
3. Sea a un número compuesto y sea p el menor divisor de a distinto de 1.

   Si p fuera compuesto habrá de existir un $p' \in Z$ tal que $p'|p$, que además divide a a, y es menor que p en valor absoluto. Luego p no sería el menor divisor de a distinto de la unidad. Por tanto p es primo.
4. Si p divide al producto de factores primos *n=abc…r* y no divide a uno de los factores, entonces ha de dividir al resto del producto, por la propiedad 1. Si vamos suprimiendo los factores de n a los que no divide p, llegaríamos al final a un factor al que sí dividirá p, que, al ser primo, será igual o asociado a p, pues caso contrario no se cumpliría la hipótesis de que p divide a n.
5. Si n es divisible por a,b,c…,r, primos dos a dos, se tendrá:
   $n=a.a', n=b.b', ..., n=r.r'$, por tanto, si todos dividen a n ha de ser
   $n=a.b.c....r.h, con\ h \in Z \to a.b.c....r\ divide\ a\ n$

Se denomina numero primario a la potencia natural de un número primo, p^n, pues el ideal engendrado $\left(p^n\right)$ es primario.

La descomposición factorial de un número entero:

Teorema fundamental:

1) Todo número compuesto puede descomponerse en un producto de factores primos.
2) Tal descomposición es única, salvando el orden de los factores.

En efecto:

1) Sea m un número compuesto.

Sea p_1 el menor divisor de m, que será primo, por la propiedad 3. Por tanto:

$m = p_1 p_1^{'}$, con $p_1^{'} \in Z$

Si $p_1^{'}$ es primo hemos terminado, caso contrario:

$p_1^{'} = p_2 . p_2^{'}$, $p_2^{'} \in Z$, llamando p_2 al menor de sus divisores primos.
Siguiendo el proceso, se tiene, por la propiedad 5, que
$m = p_1 p_2 ... p_k , con\ p_i primo, i = 1,2,...,k$.

2) Para ver que la descomposición es única, consideremos dos descomposiciones de un mismo número n:

$$n = p_1 p_2 ... p_l \qquad\qquad n = q_1 q_2 ... q_m$$

por la propiedad 4:
$p_1 \big| n \rightarrow \exists q_i , i \in \left[1,...,m\right] / \ p_1 \big| q_i ,\ sea\ p_1 \big| q_1 \rightarrow q_1 = p_1 u_1 , u_1 \in \left\{1,-1\right\}$, por lo que:
$n = p_1 p_2 ... p_l = p_1 u_1 q_2 ... q_m \rightarrow p_2 ... p_l = u_1 q_2 ... q_m$
continuando el proceso, suponiendo $l < m$:

$$\begin{cases} p_3 ... p_l = u_1 u_2 q_3 ... q_m \\ .... \\ p_{l-1} = u_1 u_2 ... u_{l-2} q_{l-1} ... q_m \\ p_l = u_1 u_2 ... u_{l-1} q_l ... q_m \\ 1 = u_1 u_2 ... u_l q_{l+1} ... q_m \end{cases}$$

Ahora bien, $1 = u_1 u_2 ... u_l q_{l+1} ... q_m \rightarrow q_i = 1 \vee q_i = -1, i = l+1,...,m$ por lo que:

$$q_{l+1} = u_{l+1} ,..., q_m = u_m$$

por lo que ha de ser

$$l = m,\ p_i = q_i u_i , i = 1,...,l \text{ (primos asociados)}$$

En definitiva, la descomposición es única salvo el orden y el signo.

Si hubiera factores primos repetidos, con órdenes de repetición $a_1 , a_2 ,..., a_k$ se tiene la descomposición del número dado en producto de factores primarios:

$$n = p_1^{a_1} . p_2^{a_2} .... p_k^{a_k}$$

De lo cual se deduce que el ideal engendrado por el número n es intersección de los ideales primarios engendrados por cada uno de los factores de la descomposición:

$$(n) = (p_1^{a_1}) \cap (p_2^{a_2}) \cap ... \cap (p_k^{a_k})$$

Se denomina número semiprimo a un entero cuya descomposición tenga solo dos factores primos, repetidos o no.
Ejemplos: 21=7.3 y 18=2.3^2, 9=3^2 son números semiprimos.

Si el número de factores de la descomposición es k (repetidos o no), el número entero se denomina k-casi primo.
Ejemplos: 30=2.3.5 es 3-casi primo, 1155=3.5.7.11 es 4-casi primo,
4095 es un número 4-casi primo (pues 4095=3^2.5.7.13)

Los números 2-casi primos son los números semiprimos.

Los números primos son los números 1-casi primos.

Sobre la condición de divisibilidad. Divisores de un número entero:
Teorema: La condición necesaria y suficiente para que un número a sea divisible por un número b es que a contenga todos los factores primos de la descomposición de b, con exponentes iguales o mayores.
Demostración: Es trivial, pues la división de a entre b permite reducir en a todos los factores comunes, resultando para la división el número entero cuya descomposición es el producto de los factores primos o primarios que queden sin eliminar.

Teorema: El MCD(a,b) es el producto de los factores primos comunes a ambos números, a y b, elevados a los menores exponentes que en ambos números figuren. El MCM(a,b) es el producto de los factores comunes y no comunes de ambos números, a y b, elevados a los mayores exponentes que en ambos números figuren.
Demostración:
Sea d el divisor de ambos números a y b, obtenido tal como se indica en el enunciado de la proposición. Es obvio que $d\,|\,a$ y $d\,|\,b$. Veamos que d ha de ser el mayor de los divisores comunes a ambos números.
Si fijamos uno cualquiera de los factores primos, por ejemplo p, tal que p^{m_1} está en a y p^{m_2} está en b, con lo cual p^{m} estará en d siendo $m = mín\left\{m_1, m_2\right\}$
Para otro divisor común d' se tiene que si $p^{m'}$ está en d', entonces $m' \leq m_1$ y $m' \leq m_2 \rightarrow m' \leq m \rightarrow d'\,|\,d \rightarrow |d'| \leq |d| = d \rightarrow d = MCD(a,b)$
Puesto que $MCM(a,b) = ab/d$. La afirmación del teorema es inmediata.

Teorema: $\forall a,b,c \in Z, (a) + \left\{(b) \cap (c)\right\} = \left\{(a)+(b)\right\} \cap \left\{(a)+(c)\right\}$
Demostración:
Sean los factores primos de la descomposición de los enteros a, b y c, los siguientes:

Conjunto de los factores primos de a: $P = \left\{p_1, \ldots, p_l\right\}$

Conjunto de los factores primos de b: $Q = \left\{q_1, \ldots, q_m\right\}$

Conjunto de los factores primos de c: $R = \left\{r_1, \ldots, r_n\right\}$

Llamemos $(h) = (a) + \left\{(b) \cap (c)\right\}$ y $(f) = \left\{(a)+(b)\right\} \cap \left\{(a)+(c)\right\}$

Entonces, los factores primos de h serían:

$$P \cap \left\{Q \cup R\right\} = \left\{P \cap Q\right\} \cup \left\{Q \cap R\right\}$$

Que son también los factores primos de f

Veamos los exponentes:

Consideremos un factor primo p de h y de f, y sean:

α : exponente de p en a.
β : exponente de p en b
γ : exponente de p en c

entonces, el exponente de p en h sería $\delta = mín\left\{\alpha, máx\left\{\beta,\gamma\right\}\right\} = \alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$

y el exponente de p en f : $\rho = máx\left\{mín(\alpha,\beta), mín(\alpha,\gamma)\right\} = (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$

Como $(N,\leq)$ es un retículo distributivo, se tiene que:

$$\delta = \alpha \wedge (\beta \vee \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma) = \rho$$

En consecuencia $(f) = (h)$

Divisores de un número:
Podemos hacer el estudio mediante el siguiente teorema:

1) Los divisores del número compuesto $n = a^{\alpha}.b^{\beta}...r^{\gamma}$, son los términos del producto $(1+a+a^2+...+a^{\alpha})(1+b+b^2+...+b^{\beta})....(1+r+r^2+...+r^{\gamma})$, junto con sus asociados.
2) El número de divisores de n, contando sólo una vez cada par de divisores asociados del mismo, es $h = (1+\alpha)(1+\beta)...(1+\gamma)$.
3) La suma de los divisores de n, contando para cada par de números asociados el término positivo, es:

$$S = \frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}.\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}.....\frac{r^{\gamma+1}-1}{r-1}$$

4) El producto de los divisores de n, tomando, como en los casos anteriores, solo los divisores positivos, viene dado por

$$P = \sqrt{n^h}$$

En efecto:

1) Si es $n = a^{\alpha}.b^{\beta}...r^{\gamma}$ la factorización del número, entonces todo divisor del mismo será de la forma $a^i.b^j...r^s$ con $i \leq \alpha, j \leq \beta, ..., s \leq \gamma$, pues tal producto se halla entre los términos del producto descomposición de n. Nos referimos a los divisores positivos del número.
2) Es trivial, pues cada uno de los términos del producto indicado es de la forma $a^i.b^j...r^s$, con la misma limitación que la indicada en el apartado anterior, es decir, divisores positivos.
3) También resulta trivial. Basta aplicar a cada primo $a,b,...,r$ la fórmula de la suma de los términos de una progresión geométrica de razón el número primo correspondiente.
4) Si $d_1 \mid n$ entonces $n = d_1.d_m$, es decir d_1 y d_m son divisores de n, lo cual nos indica que los divisores del mismo están asociados por pares. Si $\left\{d_1, d_2, ..., d_m\right\}$ es el conjunto de los m divisores de n, su producto puede ser escrito en orden creciente o en orden decreciente:

$$P = d_1.d_2.....d_{m-1}.d_m$$
$$P = d_m.d_{m-1}.....d_2.d_1$$

de lo cual:

$$P^2 = (d_1.d_m).(d_2.d_{m-1}).....(d_{m-1}.d_2)(d_m.d_1) = n^m$$

por tanto:

$$P = \sqrt{n^m}$$

Sobre la obtención y distribución de los números primos:
Teorema:
La secuencia de números primos es infinita.
Demostración:
Empleemos un razonamiento de reducción al absurdo. Supongamos que la secuencia de números primos es finita y llamemos p al último número primo. Si realizamos el producto de todos los números primos incluyendo a p:

N=1.2.3.5.7….p

Tal número N es divisible por todos y cada uno de los números primos, ya que los contiene como factores de su descomposición. Pero N+1 no es divisible por ninguno de los primos 2,3,5,7,…,p. Luego N+1 es un número primo que obviamente es mayor que p, contra la hipótesis de que p era el último de los números primos.

La secuencia de números primos, en definitiva, es infinita.

Se han propuesto fórmulas de una variable natural n que permiten obtener números primos para valores limitados de la variable:

- La fórmula de Fermat:

  $2^{2^n}+1$, permite obtener primos para n=0,1,2,3 y 4

- Dos fórmulas de Euler:

  $n^2+n+17,$ que nos da primos para n=0 a n=16

  $2n^2+29,$ con la que obtenemos primos para n=0 hasta n=29

Sin embargo, podemos comprobar que no es posible encontrar una función polinómica en n que genere números primos para todo valor de n. Es decir, no existe una expresión de la forma

$$y = a_0n^k + a_1n^{k-1} + \ldots + a_{k-1}n + a_k$$

tal que para todo n sea y un número primo.
En efecto:

Si para $n = h$ se obtiene el primo p, y si para $n = h + p$ se obtiene el primo q. Será:

$$q - p = a_0\left[(h+p)^k - h^k\right] + a_1\left[(h+p)^{k-1} - h^{k-1}\right] + \ldots + a_{k-1}\left[(h+p) - h\right] = \dot{p} = p.p'$$

por tanto:

$$q - p = p.p' \rightarrow q = p(1+p') \rightarrow q \text{ no es primo}$$

Teorema:
En la progresión aritmética 4n+3 hay infinitos primos
Demostración:
Sabemos que todo número natural mayor que 2 es de la forma 4n+1 o bien 4n+3, y si dos números son de la forma 4n+1, su producto es también de esa forma, pues:

$$(4a+1)(4b+1) = 4(4ab + a + b) + 1, \forall a, b \in N \qquad [1]$$

Supongamos que hubiera en la progresión 4n+3 solamente un número finito de primos, $p_1, p_2, \ldots, p_h$, y sea H el número entero construido a partir de ellos como

$$H = 4(p_1 p_2 \ldots p_h) - 1 = 4(p_1 p_2 \ldots p_h - 1) + 3$$

Una de dos, H es primo o bien es divisible por algún primo distinto de los indicados. Si admitimos que puede ser descompuesto en factores primos distintos de los indicados, todos ellos no pueden ser de la forma 4n+1, pues por [1], H sería también de la forma 4n+1, y obviamente no lo es. Así que deducimos que tiene algún factor de la forma 4n+3, o sea, que alguno de los primos indicados divide a H, lo cual es contradictorio por la construcción de H. Por tanto, no hay un número finito de primos en la sucesión.

De igual manera, se puede probar la misma proposición para progresiones como 5n+6, 7n+9, ….. En realidad, el matemático alemán Lejeune Dirichlet probaría en 1850 que la proposición es cierta para toda progresión

$$an + b, \forall a, b \in N \,/\, MCD(a,b) = 1$$

Sobre algunas conjeturas en la distribución de números primos:
Se han conjeturado numerosas afirmaciones sobre la determinación y distribución de los números primos. Algunas de gran importancia por sus implicaciones en criptografía y diferentes campos de la matemática y de la técnica. Entre las que ya han sido probadas y que, por tanto, son teoremas, mencionemos la afirmación siguiente, que fue conjeturada por Gauss y demostrada en 1896 por Hadamard y De la Vallée Poussin:

Si $\pi(n)$ es la función contadora de números primos entre 0 y n, se verifica que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\pi(n)/n}{1/Ln} = 1$$

Sin embargo, la cuestión de la distribución y determinación de los números primos permanece como un gran problema abierto en la matemática actual. Describimos a continuación algunas de las conjeturas principales que permanecen vigentes:

La conjetura de los primos gemelos:
Todos los números primos, salvo el 2, son impares, y los únicos dos primos consecutivos en la secuencia de los enteros positivos son el 2 y el 3. El problema que aparece de forma natural es el de encontrar números primos consecutivos en la secuencia de los números primos, esto es, primos impares consecutivos. Estos números son de la forma p, p+2, y se denominan *primos gemelos.*

Son ejemplos de primos gemelos los pares (3,5), (5,7), (11,13),…

El teorema probado por Giggo Brun en 1919 afirma que la suma de los inversos de los pares de primos gemelos es convergente a un número real B_2 que se denomina desde entonces *constante de Brun:*

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\right)+.....\approx 1,902$$

Hasta el momento, el mejor valor estimado para la constante de Brun es

$$B_2 = 1,902160583104$$

(valor publicado en 2002 por Pascal Sebah y Patrick Demichel, determinado usando los primos gemelos hasta 10^{16})

La llamada *Conjetura de los Primos Gemelos* afirma que existe un número infinito de pares de primos gemelos.

No se dispone hasta el momento de una prueba de esta proposición, a pesar de los intentos de gran número de matemáticos en los últimos años.

En 1849 fue formulada por Alphonse de Polignac una conjetura más fuerte, que consiste en la afirmación de que existen infinitas parejas de primos (p,q) tales que q=p+2k). La conjetura de los primos gemelos es el caso particular de la conjetura de Polignac para k=1.

La conjetura de Goldbach:
Esta conjetura, que aparece por vez primera en una carta de Christian Goldbach a Leonhard Euler en 1742 afirma que todo entero par mayor que 4 es suma de dos números primos.

Un caso particular es la llamada *conjetura débil de Goldbach*: Todo entero impar mayor que 5 es suma de tres números primos.

Aunque la conjetura de Goldbach continúa siendo en la actualidad un problema abierto, en cambio se ha logrado en 2015 la prueba de la conjetura débil usando técnicas teóricas y computacionales, obra del matemático peruano Harald Helfgoft, por lo que podemos hablar ya de esta proposición como teorema de Goldbach-Helfgoft.

La hipótesis de Riemann:
Se refiere a los ceros de la función Zeta, $\zeta(s)$. Aunque Geodfrey H. Hardy probó en 1914 que existen infinitos ceros de la función zeta de Riemann sobre la recta crítica, nadie ha probado que no existan además otros ceros fuera de dicha recta.

Riemann formuló la hipótesis de que todos los ceros de la función zeta en la banda crítica habrían de estar necesariamente en la recta 1/2 +it (i es la unidad imaginaria). Es decir, que no hay otros ceros fuera de dicha recta. Esta conjetura no ha sido probada y su demostración es quizás el más importante problema abierto de la actualidad.

La importancia de la hipótesis de Riemann en la distribución de los números primos proviene de las relaciones de la función zeta con la distribución de números primos, y la función contadora $\pi(x)$. Algunos ejemplos importantes de estas relaciones son

$\zeta(s) = \prod_{p_i \in P}^{\infty} \left(1 - p_i^{-s}\right)^{-1}$ donde P es el conjunto de los números primos pi, i=1,2,…

$$\int_1^{\infty} \frac{\pi(x)}{x(x^s - 1)} dx = \frac{1}{s} \log \zeta(s)$$

Bibliografía:

Niven, I., Zuckerman, H. *Introducción a la teoría de los números. Limusa, Mexico, 1976.*

Von Koch, Helge *Sur la distribution des nombres premiers.* Springer, *Acta Math.* 24, 1901.

Pettofrezzo, A. J., Byrkit, D. R. *Elements of Number Theory.* Prentice Hall, 1970

Chinea, C.S. *Del problema de Basilea a la función zeta de Riemann*. casanchi.com 2019.

Crandall, Richard *Prime numbers, a computational perspective*. Nueva York: Springer-Verlag 2001.

Ivic, A. *The Riemann zeta function.* Jhon Wiley, New York 1985.