

LA MULTILINEALIDAD Y EL DETERMINANTE

01.Linealidad

01.1. Introducción a la linealidad

Consideremos dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K conmutativo, $(V; K)$ y $(W; K)$.

Si f es una aplicación definida del primero en el segundo, $f: V \rightarrow W$, decimos que es lineal si se verifica, $\forall x, y \in V, \forall \lambda \in K$:

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y) \\ f(\lambda x) &= \lambda f(x) \end{aligned}$$

Ejemplos:

- La función $f: R \rightarrow R$ definida por $\forall x \in R, f(x) = 3x \in R$, es lineal:

$$\left. \begin{aligned} f(x+y) &= 3(x+y) \\ f(x) + f(y) &= 3x + 3y \end{aligned} \right\} \rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$\left. \begin{aligned} f(5x) &= 3(5x) \\ 5 \cdot f(x) &= 5 \cdot 3x \end{aligned} \right\} \rightarrow f(5x) = 5f(x)$$

- La función real $f: R \rightarrow R$ de una variable real definida por $\forall x \in R, f(x) = x^2 + 1 \in R$ no es lineal, pues:

$$\left. \begin{aligned} f(x+y) &= (x+y)^2 + 1 \\ f(x) + f(y) &= x^2 + 1 + y^2 + 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow f(x+y) \neq f(x) + f(y)$$

$$\left. \begin{aligned} f(2x) &= (2x)^2 + 1 = 4x^2 + 1 \\ 2f(x) &= 2(x^2 + 1) = 2x^2 + 2 \end{aligned} \right\} \rightarrow f(2x) \neq 2f(x)$$

Consideremos ahora tres espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K conmutativo, $(V_1; K)$, $(V_2; K)$ y $(W; K)$.

Si f es una aplicación definida del producto cartesiano de los dos primeros en el último, $f: V_1 \times V_2 \rightarrow W$, decimos que es bilineal si, $\forall x_1 \in V_1, \forall x_2 \in V_2, \forall \lambda \in K$, se verifica que:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2^1 + x_2^2) &= f(x_1, x_2^1) + f(x_1, x_2^2), \\ f(x_1^1 + x_1^2, x_2) &= f(x_1^1, x_2) + f(x_1^2, x_2), \\ f(\lambda x_1, x_2) &= \lambda f(x_1, x_2), \\ f(x_1, \lambda x_2) &= \lambda f(x_1, x_2) \end{aligned}$$

siendo, $x_1^1, x_1^2 \in V_1$, $x_2^1, x_2^2 \in V_2$

Podemos generalizar la linealidad a un total de $n+1$ espacios vectoriales, de la siguiente manera:

Consideremos un conjunto de $n+1$ espacios vectoriales, $V_1, \dots, V_n, W$, sobre un mismo cuerpo conmutativo K , y una aplicación f definida desde el conjunto producto de los n primeros espacios en el último:

$$f: V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow W$$

Se dice que f es una *aplicación n-lineal* si se verifica que $\forall x_i, x'_i \in V_i, i \in [1, n]$

$$\left. \begin{aligned} f(x_1, \dots, x_i + x'_i, \dots, x_n) &= f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n) \\ f(x_1, \dots, \lambda x_i, \dots, x_n) &= \lambda f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \end{aligned} \right\}, \quad \forall \lambda \in K$$

El conjunto de todas las aplicaciones n-lineales definidas desde $V_1, \dots, V_n$ en W se representa por $L_n(V_1, \dots, V_n; W)$ o bien, cuando no se origine confusión, L_n .

01.2. Estructura algebraica

Tal conjunto puede estructurarse como un espacio vectorial sobre el mismo cuerpo conmutativo K .

Teorema: El conjunto L_n de las aplicaciones multilineales de n espacios vectoriales, $V_i, i = 1, \dots, n$, en el espacio W dotado de las operaciones suma y producto por un elemento de K :

Suma:

$$\forall f, g \in L_n, (f + g)(\bar{x}) = f(\bar{x}) + g(\bar{x}), \quad \forall \bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in V_1 \times \dots \times V_n$$

Producto por un escalar:

$$\forall f \in L_n, \forall \alpha \in K, (\alpha f)(\bar{x}) = \alpha f(\bar{x}), \quad \forall \bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in V_1 \times \dots \times V_n$$

es un espacio vectorial sobre K .

Demostración:

- Se verifica que $(L_n, +)$ es un grupo conmutativo, pues la suma cumple:
 - Es operación interna: $\forall f, g \in L_n, f + g \in L_n$
 - Es conmutativa: $\forall f, g \in L_n, f + g = g + f$
 - Es asociativa: $\forall f, g, h \in L_n, (f + g) + h = g + (f + h)$
 - Existe elemento neutro: $\exists \theta \in L_n / \forall f \in L_n, (\theta + f) = (f + \theta) = f$
 - Elemento simétrico: $\forall f \in L_n, \exists (-f) \in L_n / (f + (-f)) = ((-f) + f) = \theta$
- Se verifican también las propiedades del producto de un escalar del cuerpo K por una aplicación que dotan al grupo de estructura de espacio vectorial sobre K :
 - Distributividad mixta: $\forall \alpha, \beta \in K, \forall f \in L_n, (\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$
 - Distributividad mixta: $\forall \alpha \in K, \forall f, g \in L_n, \alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$
 - Asociatividad: $\forall \alpha, \beta \in K, \forall f \in L_n, (\alpha\beta)f = \alpha(\beta f)$
 - Elemento unidad: $\exists 1 \in K / 1f = f, \forall f \in L_n$

Estas propiedades se comprueban de inmediato. Veamos solamente alguna de ellas a fin de no alargar demasiado esta exposición:

- Probemos, por ejemplo, que $\forall f, g \in L_n, f + g \in L_n$:

$$\begin{aligned} (f + g)(x_1, \dots, x_i^1 + x_i^2, \dots, x_n) &= f(x_1, \dots, x_i^1 + x_i^2, \dots, x_n) + g(x_1, \dots, x_i^1 + x_i^2, \dots, x_n) = \\ &= f(x_1, \dots, x_i^1, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_i^2, \dots, x_n) + g(x_1, \dots, x_i^1, \dots, x_n) + g(x_1, \dots, x_i^2, \dots, x_n) = \\ &= (f + g)(x_1, \dots, x_i^1, \dots, x_n) + (f + g)(x_1, \dots, x_i^2, \dots, x_n) \rightarrow f + g \in L_n \end{aligned}$$

- Veamos también que $\forall \alpha \in K, \forall f \in L_n, \alpha f \in L_n$:

$$\begin{aligned}
 (\alpha f)(x_1, \dots, \lambda x_i, \dots, x_n) &= \alpha[f(x_1, \dots, \lambda x_i, \dots, x_n)] = \alpha[\lambda f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)] = \\
 &= (\alpha\lambda)f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = (\lambda\alpha)f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = \lambda(\alpha f)(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \rightarrow \alpha f \in L_n
 \end{aligned}$$

Obviamente, si el cuerpo K no fuera conmutativo, estas condiciones no se cumplirían.

01.3. Propiedades elementales

Son inmediatas las dos propiedades siguientes:

$$a) \forall f \in L_n, \forall \lambda_i \in K, \forall x_i \in V_i, i=1, \dots, n, f(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n) = \lambda_1 \dots \lambda_n f(x_1, \dots, x_n)$$

Ejemplo:

$$f(3x_1, (1/5)x_2, x_3) = \frac{3}{5} f(x_1, x_2, x_3), \text{ para } f \in L_3(RxRxR; R)$$

b) Sea $B_i = \{u_{i1}, \dots, u_{ir_i}\}$ una base del espacio vectorial $(V_i; K)$, es decir, $\forall x_i \in V_i$, es

$$x_i = \sum_{j=1}^{r_i} a_{ij} u_{ij}. \text{ Se tiene entonces que:}$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum a_{1j_1} \dots a_{nj_n} f(u_{1j_1} \dots u_{nj_n})$$

estando extendido el sumatorio a todas las n -plas $(j_1, \dots, j_n)$ tales que $j_i \in \{1, \dots, r_i\}$

Ejemplo:

Consideremos $f \in L_2(V_1 \times V_2; W)$, con $\{u_{11}, u_{12}\}$ base de $(V_1; K)$ y $\{u_{21}, u_{22}, u_{23}\}$ base de

$$(V_2; K). \text{ Si es } x_1 = \sum_{j=1}^2 a_{1j} u_{1j} = a_{11} u_{11} + a_{12} u_{12} \text{ y } x_2 = \sum_{j=1}^3 a_{2j} u_{2j} = a_{21} u_{21} + a_{22} u_{22} + a_{23} u_{23}, \text{ se}$$

tiene:

$$\begin{aligned}
 f(x_1, x_2) &= f(a_{11} u_{11} + a_{12} u_{12}, a_{21} u_{21} + a_{22} u_{22} + a_{23} u_{23}) = a_{11} a_{21} f(u_{11}, u_{21}) + a_{11} a_{22} f(u_{11}, u_{22}) + \\
 &= a_{11} a_{23} f(u_{11}, u_{23}) + a_{12} a_{21} f(u_{12}, u_{21}) + a_{12} a_{22} f(u_{12}, u_{22}) + a_{12} a_{23} f(u_{12}, u_{23}) = \\
 &= \sum a_{1j_1} a_{2j_2} f(u_{1j_1}, u_{2j_2}), \text{ con } j_1 \in \{1, 2\} \text{ y } j_2 \in \{1, 2, 3\}
 \end{aligned}$$

02. Aplicaciones multilineales sobre V^n

Si consideramos en lo anterior que los espacios vectoriales $V_i, i=1, \dots, n$ son el mismo espacio vectorial, es decir, $V_1 = \dots = V_n = V$, se puede definir la aplicación multilineal sobre V^n con las mismas propiedades que ya hemos visto antes.

02.1. Definición

Dados dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo conmutativo K , $(V; K)$ y $(W; K)$, se define la aplicación multilineal sobre V^n como una aplicación multilineal $f \in L_n(V \times \dots \times V; W)$. O sea:

$$f: V^n \rightarrow W \text{ es multilineal si } \forall (x_1, \dots, x_n) \in V^n, \forall \lambda \in K, \forall j \in \{1, \dots, n\},$$

$$f(x_1, \dots, x_j^1 + x_j^2, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_j^1, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_j^2, \dots, x_n)$$

$$f(x_1, \dots, \lambda x_j, \dots, x_n) = \lambda f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$$

02.2. Simétricas, antisimétricas, alternadas

Podemos clasificar las aplicaciones multilineales atendiendo a las permutaciones de los n vectores que figuran en el original de la aplicación. Repasemos, pues, antes de establecer la clasificación, la idea de permutación de n elementos.

- Permutaciones:

Consideremos una secuencia de n vectores y el grupo S_n de las permutaciones de los n subíndices $1 \ 2 \ \dots \ n$. Llamaremos permutación principal a la que corresponde al orden natural: $1 \ 2 \ \dots \ n$. Las restantes permutaciones se obtienen invirtiendo el orden de dos o mas de los subíndices.

Dos elementos de una permutación se dice que constituyen una inversión, o que están en inversión, si aparecen en orden distinto del orden que tienen en la permutación principal.

El número de inversiones de una permutación $p \in S_n$, que representamos por $i(p)$, se denomina índice de la permutación. Se define la signatura $\sigma(p)$ de una permutación como el resultado de elevar -1 al índice:

$$\sigma(p) = (-1)^{i(p)}$$

Una trasposición es una permutación que intercambia dos de los índices dejando fijos los restantes. Toda permutación t_j puede expresarse, aunque no de manera única, como un producto de trasposiciones: $\forall p \in S_n, \exists t_1, \dots, t_r, \text{trasposic} / p = t_1 \dots t_r$

Ejemplo:

Las permutaciones de los vectores $x_1 x_2 x_3$ son las seis siguientes:

$$x_1 x_2 x_3, x_1 x_3 x_2, x_2 x_1 x_3, x_2 x_3 x_1, x_3 x_1 x_2, x_3 x_2 x_1$$

Permutación principal: $x_1 x_2 x_3$

Inversiones y signatura de cada una de las seis permutaciones:

$x_1 x_2 x_3$: inversiones: ninguna. $i(x_1 x_2 x_3) = 0, \sigma(x_1 x_2 x_3) = (-1)^0 = 1$

$x_1 x_3 x_2$: inversiones: una ($x_3 x_2$). $i(x_1 x_3 x_2) = 1, \sigma(x_1 x_3 x_2) = (-1)^1 = -1$

$x_2 x_1 x_3$: inversiones: una ($x_2 x_1$). $i(x_2 x_1 x_3) = 1, \sigma(x_2 x_1 x_3) = (-1)^1 = -1$

$x_2 x_3 x_1$: inversiones: dos ($x_3 x_1, x_2 x_1$). $i(x_2 x_3 x_1) = 2, \sigma(x_2 x_3 x_1) = (-1)^2 = 1$

$x_3 x_1 x_2$: inversiones: dos ($x_3 x_1, x_3 x_2$). $i(x_3 x_1 x_2) = 2, \sigma(x_3 x_1 x_2) = (-1)^2 = 1$

$x_3 x_2 x_1$: inversiones: tres ($x_3 x_1, x_3 x_2, x_2 x_1$). $i(x_3 x_2 x_1) = 3, \sigma(x_3 x_2 x_1) = (-1)^3 = -1$

- Simétricas:

Una aplicación n -lineal en un espacio V es simétrica sii la imagen de n vectores cualesquiera no varía al permutar su orden:

$f : V^n \rightarrow W$ simétrica

$$\Leftrightarrow f \in L_n(V^n; W) \wedge (\forall p \in S_n, f(x_{p(1)} x_{p(2)} \dots x_{p(n)}) = f(x_1 x_2 \dots x_n))$$

Llamaremos $S_n(V^n; W)$ al conjunto de las aplicaciones n -lineales simétricas, que es, obviamente, una parte del conjunto de todas las aplicaciones n -lineales $L_n(V^n; W)$:

$$S_n(V^n; W) \subset L_n(V^n; W)$$

$S_n(V^n; W)$ es subespacio vectorial de $L_n(V^n; W)$ ya que $\forall f, g \in S_n(V^n; W), \forall \lambda \in K$ se verifica que $f - g \in S_n(V^n; W), \lambda f \in S_n(V^n; W)$. Efectivamente:

$$\begin{aligned} \forall p \in S_n, \forall (x_1, \dots, x_n) \in V^n, (f - g)(x_{p(1)}, \dots, x_{p(n)}) &= f(x_{p(1)}, \dots, x_{p(n)}) - g(x_{p(1)}, \dots, x_{p(n)}) = \\ &= f(x_1, \dots, x_n) - g(x_1, \dots, x_n) = (f - g)(x_1, \dots, x_n) \rightarrow f - g \in S_n(V^n; W) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall p \in S_n, \forall (x_1, \dots, x_n) \in V^n, (\lambda f)(x_{p(1)}, \dots, x_{p(n)}) &= \lambda(f(x_{p(1)}, \dots, x_{p(n)})) = \lambda f(x_1, \dots, x_n) = \\ &= (\lambda f)(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \lambda f \in S_n(V^n; W) \end{aligned}$$

- Antisimétricas:

Una aplicación n-lineal en un espacio V es antisimétrica si la imagen de n vectores cualesquiera varía de signo al permutar su orden si el número de inversiones es impar o bien no varía si el número de inversiones es par:

$f: V^n \rightarrow W$ antisimétrica

$$\Leftrightarrow f \in L_n(V^n; W) \wedge (\forall p \in S_n, f(x_{p(1)}x_{p(2)}\dots x_{p(n)}) = \sigma(p)f(x_1x_2\dots x_n))$$

Llamaremos $T_n(V^n; W)$ al conjunto de las aplicaciones n-lineales antisimétricas, que es, claro, una parte del conjunto de todas las aplicaciones n-lineales $L_n(V^n; W)$:

$$T_n(V^n; W) \subset L_n(V^n; W)$$

$T_n(V^n; W)$ es subespacio vectorial de $L_n(V^n; W)$ ya que $\forall f, g \in T_n(V^n; W), \forall \lambda \in K$ se verifica que $f - g \in T_n(V^n; W), \lambda f \in T_n(V^n; W)$. Efectivamente:

$$\forall p \in S_n, \forall (x_1, \dots, x_n) \in V^n, (f - g)(x_{p(1)}, \dots, x_{p(n)}) = f(x_{p(1)}, \dots, x_{p(n)}) - g(x_{p(1)}, \dots, x_{p(n)}) =$$

$$= \sigma(p)f(x_1, \dots, x_n) - \sigma(p)g(x_1, \dots, x_n) = \sigma(p)(f - g)(x_1, \dots, x_n) \rightarrow f - g \in T_n(V^n; W)$$

$$\forall p \in S_n, \forall (x_1, \dots, x_n) \in V^n, (\lambda f)(x_{p(1)}, \dots, x_{p(n)}) = \lambda(f(x_{p(1)}, \dots, x_{p(n)})) = \lambda\sigma(p)f(x_1, \dots, x_n) =$$

$$= \sigma(p)\lambda f(x_1, \dots, x_n) = \sigma(p)(\lambda f)(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \lambda f \in T_n(V^n; W)$$

- Alternadas:

Una aplicación n-lineal en un espacio V es alternada si la imagen de n vectores es el vector cero del espacio imagen, cuando se repite alguno de ellos:

$f: V^n \rightarrow W$ alternada

$$\Leftrightarrow f \in L_n(V^n; W) \wedge (f(x_1x_2\dots x_n) = 0_W, \text{ si } \exists i, j \in \{1, \dots, n\} / i \neq j \wedge x_i = x_j)$$

Si llamamos $A_n(V^n; W)$ al conjunto de las aplicaciones n-lineales alternadas, veremos que se trata de un subespacio vectorial del espacio $T_n(V^n; W)$ de las aplicaciones n-lineales antisimétricas. Veamos, pues, que $A_n(V^n; W) \subset T_n(V^n; W)$ y que además es subespacio vectorial.

a) $\forall f \in A_n(V^n; W), \forall (x_1, \dots, x_n) \in V^n, \exists i, j \in \{1, \dots, n\} / i \neq j \wedge x_i = x_j$. Si $x_i = x_j = a + b$, se tiene: $0 = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, a + b, \dots, a + b, \dots, x_n) =$

$$= f(x_1, \dots, a, \dots, a, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, a, \dots, b, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, b, \dots, a, \dots, x_n) +$$

$$+ f(x_1, \dots, b, \dots, b, \dots, x_n) = 0 + f(x_1, \dots, a, \dots, b, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, b, \dots, a, \dots, x_n) + 0 =$$

$$= f(x_1, \dots, a, \dots, b, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, b, \dots, a, \dots, x_n) \rightarrow$$

$$\rightarrow f(x_1, \dots, a, \dots, b, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, b, \dots, a, \dots, x_n) \rightarrow f \in T_n(V^n; W)$$

Por consiguiente es $A_n(V^n; W) \subset T_n(V^n; W)$.

b) $A_n(V^n; W)$ es subespacio vectorial de $T_n(V^n; W)$ ya que

$$\forall f, g \in A_n(V^n; W), \forall \lambda \in K \text{ se verifica que } f - g \in A_n(V^n; W), \lambda f \in A_n(V^n; W).$$

Efectivamente:

$$(f - g)(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) - g(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0 + 0 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow f - g \in A_n(V^n; W)$$

$$(\lambda f)(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) = \lambda f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) = \lambda \cdot 0 = 0 \rightarrow \lambda f \in A_n(V^n; W)$$

Trivialmente, los conjuntos $S_n(V^n; W)$ y $T_n(V^n; W)$ son disjuntos, esto es:

$$S_n(V^n; W) \cap T_n(V^n; W) = \{0\}$$

Teorema:

a) Si los vectores $x_1, \dots, x_n \in V^n$ son linealmente dependientes, entonces

$$\forall f \in A_n(V^n; W), f(x_1, \dots, x_n) = 0$$

b) Si cada uno de los n vectores $x_1, \dots, x_n \in V^n$ es combinación lineal de los n

vectores $\{u_1, \dots, u_n\}$, o sea, si $x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j$, entonces

$$\forall f \in A_n(V^n; W), f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{p \in S_n} \sigma(p) a_{1p(1)} \dots a_{np(n)} f(u_1, \dots, u_n)$$

Demostración:

a) $x_1, \dots, x_n \in V^n$ dependientes $\rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i = \sum_{j \neq i}^{n-1} a_{ij} x_j \rightarrow \left(x_1, \dots, \sum_{j \neq i}^{n-1} a_{ij} x_j, \dots, x_n \right) =$
 $= \sum_{j \neq i}^{n-1} a_{ij} (x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) = 0$, pues cada $x_1, \dots, x_n$ aparece repetido una vez en cada

uno de los sumandos.

b) Hemos visto en 01.3 b) que toda aplicación n -lineal f se expresa por:

$$\forall f \in L_n(V^n; W), f(x_1, \dots, x_n) = \sum a_{1j_1} \dots a_{nj_n} f(u_{j_1}, \dots, u_{j_n})$$

extendiéndose el sumatorio a todas las n -plas $(j_1, \dots, j_n)$ tales que $j_i \in \{1, \dots, n\}$

Si la aplicación n -lineal f es alternada, se anularán los términos del sumatorio en los que $u_{j_i} = u_{j_k}$, por lo que el sumatorio se extiende solamente a las $n!$

permutaciones de S_n :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{p \in S_n} a_{1p(1)} \dots a_{np(n)} f(u_{p(1)}, \dots, u_{p(n)}) = \sum_{p \in S_n} \sigma(p) a_{1p(1)} \dots a_{np(n)} f(u_1, \dots, u_n)$$

02.3. Teorema fundamental

Dados dos espacios vectoriales sobre K , $(V; K)$ y $(W; K)$. Si es $\dim V = n$ y una base de V es $\{u_1, \dots, u_n\}$, entonces se verifica que para todo vector $w \in W$ existe una única aplicación n -lineal alternada f tal que $f(u_1, \dots, u_n) = w$.

Demostración:

Veamos en primer lugar la unicidad de la aplicación f , caso de que exista, para después comprobar que existe, efectivamente, una aplicación n lineal que verifica lo expuesto y que, además, es alternada.

1) Veamos que caso de existir tal $f \in A_n(V^n; K)$ habría de ser única, pues si existieran $f, g \in A_n(V^n; W)$ tales que

$$f(u_1, \dots, u_n) = g(u_1, \dots, u_n) = w \in W$$

se tendría, $\forall (x_1, \dots, x_n) \in V^n$:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{p \in S_n} a_{1p(1)} \dots a_{np(n)} f(u_{p(1)}, \dots, u_{p(n)}) = \sum_{p \in S_n} \sigma(p) a_{1p(1)} \dots a_{np(n)} f(u_1, \dots, u_n)$$

$$g(x_1, \dots, x_n) = \sum_{p \in S_n} a_{1p(1)} \dots a_{np(n)} g(u_{p(1)}, \dots, u_{p(n)}) = \sum_{p \in S_n} \sigma(p) a_{1p(1)} \dots a_{np(n)} g(u_1, \dots, u_n)$$

por lo que, al ser $f(u_1, \dots, u_n) = g(u_1, \dots, u_n)$, se tiene:

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n), \forall (x_1, \dots, x_n) \in V^n \rightarrow f = g$$

2) Para probar la existencia, definamos una aplicación $f : V^n \rightarrow W$ por la condición de que

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in V^n, f(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{p \in S_n} \sigma(p) a_{1p(1)} \dots a_{np(n)} \right) w \in W$$

vemos que la aplicación f así definida es n -lineal, es decir, que cumple que

2_a) $f(x_1, \dots, x_i^1 + x_i^2, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_i^1, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_i^2, \dots, x_n)$, pues siendo:

$$x_i = x_i^1 + x_i^2 \rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j = \sum_{j=1}^n a_{ij}^1 u_j + \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 u_j = \sum_{j=1}^n (a_{ij}^1 + a_{ij}^2) u_j \rightarrow a_{ij} = a_{ij}^1 + a_{ij}^2$$

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) &= \left(\sum_{p \in S_n} \sigma(p) a_{1p(1)} \dots a_{ip(i)} \dots a_{np(n)} \right) w = \\ &= \left(\sum_{p \in S_n} \sigma(p) a_{1p(1)} \dots a_{ip(i)}^1 \dots a_{np(n)} + \sum_{p \in S_n} \sigma(p) a_{1p(1)} \dots a_{ip(i)}^2 \dots a_{np(n)} \right) w = \\ &= \left(\sum_{p \in S_n} \sigma(p) a_{1p(1)} \dots a_{ip(i)}^1 \dots a_{np(n)} \right) w + \left(\sum_{p \in S_n} \sigma(p) a_{1p(1)} \dots a_{ip(i)}^2 \dots a_{np(n)} \right) w = \\ &= f(x_1, \dots, x_i^1, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_i^2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

2_b) $f(x_1, \dots, \lambda x_i, \dots, x_n) = \lambda f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$, pues siendo:

$$\lambda \cdot x_i = \lambda \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j = \sum_{j=1}^n \lambda a_{ij} u_j, \text{ se tiene:}$$

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, \lambda x_i, \dots, x_n) &= \left(\sum_{p \in S_n} \sigma(p) a_{1p(1)} \dots \lambda a_{ip(i)} \dots a_{np(n)} \right) f(u_1, \dots, u_n) = \\ &= \lambda \left(\sum_{p \in S_n} \sigma(p) a_{1p(1)} \dots a_{ip(i)} \dots a_{np(n)} \right) f(u_1, \dots, u_n) = \lambda f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \end{aligned}$$

3) Si la aplicación n -lineal f fuera alternada sabemos que entonces

$$f(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{p \in S_n} \sigma(p) a_{1p(1)} \dots \lambda a_{ip(i)} \dots a_{np(n)} \right) f(u_1, \dots, u_n)$$

con lo que se completaría la demostración, pues

$$\left. \begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= \left(\sum_{p \in S_n} \sigma(p) a_{1p(1)} \dots \lambda a_{ip(i)} \dots a_{np(n)} \right) f(u_1, \dots, u_n) \\ f(x_1, \dots, x_n) &= \left(\sum_{p \in S_n} \sigma(p) a_{1p(1)} \dots \lambda a_{ip(i)} \dots a_{np(n)} \right) w \end{aligned} \right\} \rightarrow f(u_1, \dots, u_n) = w$$

Falta, por tanto, comprobar que la aplicación n -lineal f así definida, es alternada.

Para ello comprobaremos que si $x_i = x_j, i \neq j$, entonces $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = 0$.

Llamemos t a la trasposición de i y j y consideremos la permutación $q = p.t$.

Cuando la permutación p recorre el grupo simétrico S_n , también q recorre S_n y se tiene que $q(i) = p(j), q(j) = p(i)$, siendo $p(k) = q(k)$ si $k \neq i \wedge k \neq j$, cumpliéndose que es $\sigma(p) = -\sigma(q)$. Por consiguiente, se tiene que

$$\sigma(p)a_{1p(1)}\dots a_{np(n)} = -\sigma(q)a_{1q(1)}\dots a_{nq(n)}, \text{ siendo } q = p.t$$

es decir:

$$\sigma(p)a_{1p(1)}\dots a_{np(n)} + \sigma(q)a_{1q(1)}\dots a_{nq(n)} = 0$$

Se tiene, considerando todas las permutaciones p del grupo simétrico S_n , que en unas está el par $(p(i), p(j))$ en inversión, mientras que en otras no lo está, y ambos conjuntos de permutaciones son obviamente disjuntos.

El grupo S_n puede dividirse por tanto en dos clases:

S_{n1} : permutaciones p tales que $(p(i), p(j))$ es inversión.

S_{n2} : permutaciones p tales que $(p(i), p(j))$ no es inversión.

Es inmediato, por tanto que $\forall p \in S_{n1}, \exists q \in S_{n2} / p = q.t$, siendo t una trasposición de los elementos $p(i)$ y $p(j)$ y tal correspondencia es biyectiva.

Se tiene, entonces, que:

$$\begin{aligned} \sum_{p \in S_n} \sigma(p)a_{1p(1)}\dots \lambda a_{ip(i)}\dots a_{np(n)} &= \sum_{p \in S_{n1}} \sigma(p)a_{1p(1)}\dots \lambda a_{ip(i)}\dots a_{np(n)} + \sum_{q \in S_{n2}} \sigma(q)a_{1q(1)}\dots \lambda a_{iq(i)}\dots a_{nq(n)} = \\ &= \sum_{p \in S_n} (\sigma(p)a_{1p(1)}\dots \lambda a_{ip(i)}\dots a_{np(n)} + \sigma(\bar{q})a_{1\bar{q}(1)}\dots \lambda a_{i\bar{q}(i)}\dots a_{n\bar{q}(n)}) = 0 \end{aligned}$$

donde es $\bar{q}$ la permutación obtenida de trasponiendo cada permutación p .

Por consiguiente:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{p \in S_n} \sigma(p)a_{1p(1)}\dots \lambda a_{ip(i)}\dots a_{np(n)} \right) w = 0 \rightarrow f \in A_n(V^n; W)$$

$$\text{En definitiva, } f(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{p \in S_n} \sigma(p)a_{1p(1)}\dots \lambda a_{ip(i)}\dots a_{np(n)} \right) f(u_1, \dots, u_n), \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in V^n$$

Cumpléndose la tesis del teorema:

$$\forall \{u_1, \dots, u_n\} \text{ base de } V, \quad \forall w \in W, \quad \exists f \in A_n(V^n; W) / f(u_1, \dots, u_n) = w$$

03. Las formas multilineales

Como el cuerpo conmutativo K puede ser considerado un espacio vectorial sobre sí mismo, estudiemos las aplicaciones n -lineales de V en K , siendo K el cuerpo de definición del espacio V .

Se denominan *formas n -lineales* a las aplicaciones n -lineales de V en K . Representaremos el espacio de tales formas por $L_n(V^n; K)$. Y puesto que la definición de forma n -lineal en V corresponde a un caso particular de aplicación n -lineal en V , son válidos los resultados obtenidos en los apartados anteriores, en particular, el Teorema Fundamental, que se enunciaría ahora de la manera siguiente:

Dado un espacio vectorial n -dimensional sobre el cuerpo conmutativo K , $(V; K)$, y una base $\{u_1, \dots, u_n\}$ del mismo, se cumple que para todo elemento $k \in K$ del cuerpo existe una y solamente una aplicación n -lineal alternada tal que $f(u_1, \dots, u_n) = k$

Veamos a continuación que el espacio vectorial de las formas n -lineales alternadas es unidimensional, esto es, engendrado por un único elemento.

Teorema: El espacio $L_n(V^n; K)$ de las formas n -lineales alternadas es de dimensión uno.

Demostración:

Sea $\{u_1, \dots, u_n\}$ una base de V , y sea $d \in A_n(V^n; K)$ tal que $d(u_1, \dots, u_n) = 1$, elemento unidad del cuerpo K . Tal forma n -lineal alternada d existe y es única, por el teorema fundamental.

Entonces, $\forall (x_1, \dots, x_n) \in V^n$, $x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j$, será

$$d(x_1, \dots, x_n) = \sum_{p \in S_n} \sigma(p) a_{1p(1)} \dots a_{np(n)} d(u_1, \dots, u_n) = \sum_{p \in S_n} \sigma(p) a_{1p(1)} \dots a_{np(n)} \cdot 1 = \sum_{p \in S_n} \sigma(p) a_{1p(1)} \dots a_{np(n)}$$

$$\forall f \in A_n(V^n; K), f(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{p \in S_n} \sigma(p) a_{1p(1)} \dots a_{np(n)} \right) f(u_1, \dots, u_n) = d(x_1, \dots, x_n) \cdot f(u_1, \dots, u_n)$$

Si llamamos $\lambda = f(u_1, \dots, u_n)$, que existe y es único por el teorema fundamental, se tiene: $f(x_1, \dots, x_n) = \lambda \cdot d(x_1, \dots, x_n)$

Es decir:

$$\forall f \in A_n(V^n; K), \exists \lambda \in K / f = \lambda \cdot d, \text{ siendo } d \in A_n(V^n; K) \text{ tal que } d(u_1, \dots, u_n) = 1$$

Luego el vector $d \in A_n(V^n; K)$ engendra todo el espacio.

Teorema:

a) Si es $f \in A_n(V^n; K)$ y $\{u_1, \dots, u_n\}$ una base de V tal que $f(u_1, \dots, u_n) \neq 0$, entonces para cualquier otra base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de V , es también $f(e_1, \dots, e_n) \neq 0$

b) Si es $f \in A_n(V^n; K)$ tal que $f \neq 0$ se tiene:

b.1) Si $f(e_1, \dots, e_n) \neq 0$ entonces es $\{e_1, \dots, e_n\}$ base de V .

b.2) Si $f(e_1, \dots, e_n) = 0$ entonces $\{e_1, \dots, e_n\}$ es familia linealmente dependiente.

Demostración:

a) Por el teorema anterior: $\forall (x_1, \dots, x_n) \in V^n$, $f(x_1, \dots, x_n) = \lambda \cdot d(x_1, \dots, x_n)$

siendo

$$d(x_1, \dots, x_n) = \sum_{p \in S_n} \sigma(p) a_{1p(1)} \dots a_{np(n)} d(u_1, \dots, u_n) = \sum_{p \in S_n} \sigma(p) a_{1p(1)} \dots a_{np(n)} \cdot 1 = \sum_{p \in S_n} \sigma(p) a_{1p(1)} \dots a_{np(n)}$$

- Si por hipótesis es $f(u_1, \dots, u_n) \neq 0$ se tiene que $f(u_1, \dots, u_n) = \lambda \cdot d(u_1, \dots, u_n) = \lambda \neq 0$ y esto quiere decir que $f(x_1, \dots, x_n) = \lambda \cdot d(x_1, \dots, x_n) = \lambda \sum_{p \in S_n} \sigma(p) a_{1p(1)} \dots a_{np(n)} \neq 0$ [*]

- Si en otra base $\{e_1, \dots, e_n\}$ fuera $f(e_1, \dots, e_n) = 0$: $f(e_1, \dots, e_n) = \lambda \cdot d(e_1, \dots, e_n) = \lambda = 0$ queriendo esto decir que $f(x_1, \dots, x_n) = \lambda \cdot d(x_1, \dots, x_n) = \lambda \sum_{p \in S_n} \sigma(p) a_{1p(1)} \dots a_{np(n)} = 0$

Lo cual es contradictorio con [*], pues la imagen $f(x_1, \dots, x_n)$ no puede tomar dos valores diferentes en $(x_1, \dots, x_n) \in V^n$

b)

b.1) Si $f(e_1, \dots, e_n) \neq 0$, los vectores $\{e_1, \dots, e_n\}$ son linealmente independientes, pues de no serlo, sabemos por un teorema anterior que ha de ser $f(e_1, \dots, e_n) = 0$. Luego son linealmente independientes y su número n es igual a la dimensión del espacio, lo que indica que se trata de una base del mismo.

b.2) Si fuera $f(e_1, \dots, e_n) = 0$ y $f \neq 0$ los vectores $\{e_1, \dots, e_n\}$ han de ser linealmente dependientes, pues de no serlo serían, por lo anterior, una base del espacio, y por

el apartado a) : $f(x_1, \dots, x_n) = \lambda \cdot d(x_1, \dots, x_n) = \lambda \sum_{p \in S_n} \sigma(p) a_{1p(1)} \dots a_{np(n)} = 0$, contra la hipótesis de que $f \neq 0$.

04. Determinantes

04.1. Definición

Consideremos un cuerpo conmutativo K y el espacio vectorial n -dimensional $(V; K)$. Sea $\{u_1, \dots, u_n\}$ una base de dicho espacio y llamemos $A_n(V^n; K)$ al espacio de las formas n -lineales alternadas de V en K .

Si es 1 el elemento unidad del cuerpo K , sabemos, por el teorema fundamental de las aplicaciones multilineales alternadas, que existe una única forma multilineal $d \in A_n(V^n; K)$ tal que $d(u_1, \dots, u_n) = 1$.

Consideremos también la n -pla $(x_1, \dots, x_n) \in V^n$, y las expresiones de estos vectores

en la base indicada; $x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j$, $i = 1, \dots, n$.

Se llama *determinante de los n vectores* $(x_1, \dots, x_n) \in V^n$ al elemento $d(x_1, \dots, x_n)$, es decir, al elemento imagen

$$d(x_1, \dots, x_n) = \sum_{p \in S_n} \sigma(p) a_{1p(1)} \dots a_{np(n)} d(u_1, \dots, u_n) = \sum_{p \in S_n} \sigma(p) a_{1p(1)} \dots a_{np(n)} \cdot 1 = \sum_{p \in S_n} \sigma(p) a_{1p(1)} \dots a_{np(n)}$$

que podemos representar por

$$\det(x_1, \dots, x_n) = \sum_{p \in S_n} \sigma(p) a_{1p(1)} \dots a_{np(n)}$$

es decir, el determinante queda definido por los escalares a_{ij} de la expresión de los vectores $x_1, \dots, x_n$ en la base dada, y es una suma de $n!$ sumandos, constituido cada sumando por los productos de n de estos escalares, de forma que colocados los primeros índices en permutación principal, los segundos recorran todo el grupo simétrico S_n , estando cada sumando afectado del signo que corresponde a la signatura de la permutación de los segundos subíndices.

04.2. Ejemplos:

a) Determinante de 2 vectores:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) \in V^2, \det(x_1, x_2) &= \sum_{p \in S_2} \sigma(p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} = \sigma(12) a_{11} a_{22} + \sigma(21) a_{12} a_{21} = \\ &= (-1)^{i(12)} a_{11} a_{22} + (-1)^{i(21)} a_{12} a_{21} = (-1)^0 a_{11} a_{22} + (-1)^1 a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \end{aligned}$$

Es decir, dados los vectores

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11} u_1 + a_{12} u_2 \\ x_2 &= a_{21} u_1 + a_{22} u_2 \end{aligned} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

observamos que el determinante viene definido por los elementos de la matriz correspondiente, por lo que se acostumbra a indicar que se trata del determinante de la matriz de definición de los vectores:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

utilizándose de forma muy general la notación:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

b) Determinante de 3 vectores:

$$(x_1, x_2, x_3) \in V^2$$

$$\begin{aligned} \det(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{p \in S_3} \sigma(p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} a_{3p(3)} = \sigma(123) a_{11} a_{22} a_{33} + \sigma(132) a_{11} a_{23} a_{32} + \\ &+ \sigma(213) a_{12} a_{21} a_{33} + \sigma(231) a_{12} a_{23} a_{31} + \sigma(312) a_{13} a_{21} a_{32} + \sigma(321) a_{13} a_{22} a_{31} = \\ &= (-1)^{i(123)} a_{11} a_{22} a_{33} + (-1)^{i(132)} a_{11} a_{23} a_{32} + (-1)^{i(213)} a_{12} a_{21} a_{33} + (-1)^{i(231)} a_{12} a_{23} a_{31} + \\ &+ (-1)^{i(312)} a_{13} a_{21} a_{32} + (-1)^{i(321)} a_{13} a_{22} a_{31} = \\ &= (-1)^0 a_{11} a_{22} a_{33} + (-1)^1 a_{11} a_{23} a_{32} + (-1)^1 a_{12} a_{21} a_{33} + (-1)^2 a_{12} a_{23} a_{31} + \\ &+ (-1)^2 a_{13} a_{21} a_{32} + (-1)^3 a_{13} a_{22} a_{31} = \\ &= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} \end{aligned}$$

Análogamente al caso anterior podemos considerar la expresión matricial de los tres vectores:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 \\ x_2 &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3 \\ x_3 &= a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}u_3 \end{aligned} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Teniéndose ahora:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Notación habitual:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

c) En el caso general se tiene

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{p \in S_n} \sigma(p) a_{1p(1)} \dots a_{np(n)}$$

O bien:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p \in S_n} \sigma(p) a_{1p(1)} \dots a_{np(n)}$$

04.3. Propiedades inmediatas

Se prueban elementalmente, desde la definición de determinante como forma multilineal alternada, las propiedades siguientes, que son habitualmente usadas en el ámbito escolar para la comprensión de los fundamentos del álgebra lineal.

1. El determinante de una matriz siempre es igual al determinante de su matriz traspuesta.
2. Si en un determinante se intercambian dos líneas paralelas, el determinante cambia de signo.
3. Si un determinante tiene una línea nula, el determinante es nulo.
4. Si un determinante tiene iguales dos líneas paralelas, de determinante es nulo.
5. Si se multiplica una línea cualquiera de un determinante por un mismo número, todo el determinante queda multiplicado por dicho número.
6. Si dos líneas paralelas son proporcionales, el determinante es nulo.
7. La suma de los productos de los elementos de una línea por los adjuntos de una línea paralela es cero.
8. Si todos los elementos de una cierta línea están constituidos por dos sumandos, el determinante de la matriz puede descomponerse en suma de dos determinantes, de modo que en dicha línea aparezca el primer sumando en el primero de los determinantes y el segundo sumando en el segundo determinante, permaneciendo iguales las restantes líneas en ambos determinantes.
9. Si los elementos de una línea son combinación lineal de líneas paralelas, el determinante es cero.
10. Si a los elementos de una línea se le suman los elementos de otra línea paralela multiplicados por cualquier número, el determinante no varía.

04.4. Una consideración

La utilización de la idea de determinante es sin embargo poco utilizada en la actual matemática, estando inmersa en una cierta controversia.

El hecho de que el concepto de determinante se presente en la actualidad con una definición altamente elaborada y la no siempre muy clara necesidad de su utilización en la resolución de los problemas fundamentales de la Matemática de nuestro tiempo ha hecho que se levanten voces contrarias a su inclusión en la construcción del Álgebra Lineal, de lo cual es una muestra el artículo del Prof. Sheldon Axler de 1994 titulado "¡Abajo los determinantes!" (Down with Determinants!). (Sheldon Axler es en la actualidad profesor del College of Science and Engineering, de la Universidad del Estado de San Francisco, USA).

05. Bibliografía

Artin, E., Geometric Algebra, Interscience, 2011

Raya, A., Rider, A., Rubio, R.; Algebra y Geometría lineal, Editorial REverté, Barcelona, 2007

Abellanas, P.; Geometría Básica, Editorial Romo, Madrid, 1969

Sheldon Axler, Down with Determinants!, <http://www.axler.net/DwD.html>

China, C, A propósito del determinante, <http://casanchi.com/mat/determin01.htm>