Transformaciones en el Espacio Ordinario Tridimensional
El Grupo de los Movimientos

Carlos S. Chinea

0. Introducción. Movimientos en el espacio E_3

0.1. El espacio afín tridimensional E_3

0.1. Se denomina *espacio afín E asociado a un espacio vectorial V* al conjunto de los puntos de dicho espacio, esto es, a un conjunto de puntos para los que existe una correspondencia del producto cartesiano ExE en V de modo que a cada par de puntos de E le corresponde un vector de V, verificando las tres condiciones siguientes:

1) Para todo vector v del espacio, y para todo punto O de E existe otro punto P de E tal que O es el punto origen de v y P su punto extremo.
2) Si al par de puntos A, B de E le corresponde el vector nulo, entonces ambos puntos A y B coinciden.
3) Para tres puntos dados A,B,C de E se verifica que el vector que corresponde al par (A,B) más el vector que corresponde al par (B,C) es igual al vector que corresponde al par (A,C).

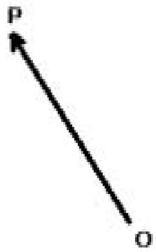
$$f : ExE \to V \qquad \forall (A,B) \in ExE, \exists \vec{v} \in V / \left[\vec{AB}\right] = \vec{v}$$

1) $\forall \vec{v} \in V, \forall O \in E, \exists P \in E / \left[\vec{OP}\right] = \vec{v}$

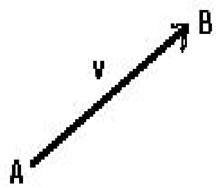
2) $\left[AB\right] = \vec{0} \Rightarrow A = B$

3) $\forall A,B,C \in ExExE, \left[AB\right] + \left[BC\right] = \left[AC\right]$

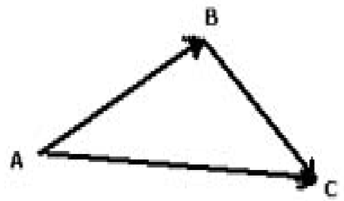
Si el espacio vectorial es tridimensional, el espacio afín asociado es el espacio ordinario, que, dotado del producto escalar (producto interior) es lo que denominamos espacio euclidiano ordinario. En el espacio afín ordinario se visualizan rápidamente las propiedades que le definen:



Siempre hay un extremo P para todo origen de vector



Si A=B el vector asociado v es nulo



Se verifica la regla del paralelogramo para la suma de vectores

0.2. Movimientos en E_3:
Los movimientos en el espacio afín euclidiano tridimensional vienen definidos por transformaciones de puntos de modo que se pueden establecer correspondencias tales que a un determinado punto le ha de corresponder un punto imagen que verifica cierta condición. Veremos que el conjunto de todos los movimientos presenta la estructura algebraica de grupo. Los movimientos más elementales son las simetrías (especular, axial, central), las traslaciones y los giros.

Ciertos movimientos invierten las figuras, y otros no, o bien no conservan los ángulos y otros si los conservan, etc.

02.1. Involuciones:
Se dice que un movimiento f es una involución si al aplicarlo a un punto cualquiera P para obtener el punto imagen P′ (f(P)=P′) y si se le aplica nuevamente a P′ para obtener P″ (f(P′)=P′′) la imagen resultante es el punto P inicial. O Sea, f[f(P)]=P.

Si es $\vec{r}_{p'} = f(\vec{r}_p)$ la ecuación vectorial del movimiento, debe ser

$$\begin{cases} \vec{r}_{p''} = & f(\vec{r}_{p'}) \\ \vec{r}_{p'} = & f(\vec{r}_p) \end{cases} \rightarrow \vec{r}_{p''} = f\left[f(\vec{r}_p)\right] = (f \circ f)(\vec{r}_p) = \vec{r}_p$$

02.2. Conservación de los ángulos:
Se dice que un movimiento conserva los ángulos si al aplicar el movimiento a una figura cualquiera se cumple que si la imagen de un cierto ángulo Φ es Φ', entonces $\phi = \phi'$. Es decir, el ángulo con el que se cortan dos rectas es el mismo que el ángulo con el que se cortan sus rectas imágenes en el movimiento.

Sean las rectas $\vec{r}_a \equiv \vec{x} = \vec{a} + \lambda.\vec{v}_a,\ \vec{r}_b \equiv \vec{x} = \vec{b} + \rho.\vec{v}_b$, el ángulo ϕ que forman verifica que $\cos\phi = \vec{v}_a.\vec{v}_b$ ($\vec{v}_a, \vec{v}_b$ unitarios).

Para las rectas imágenes en el movimiento $\vec{r}_a \equiv \vec{x}' = \vec{a}' + \lambda.\vec{v}_a^{\,'},\ \vec{r}_b \equiv \vec{x}' = \vec{b}' + \rho.\vec{v}_b^{\,'}$ se cumple que el ángulo ϕ' que forman verifica $\cos\phi' = \vec{v}_a^{\,'}.\vec{v}_b^{\,'}$ ($\vec{v}_a^{\,'}, \vec{v}_b^{\,'}$ unitarios).

Los ángulos se conservarán, por consiguiente, si $\vec{v}_a.\vec{v}_b = \vec{v}_a^{\,'}.\vec{v}_b^{\,'}$.

02.3. Conservación de las distancias:
Se dice que un movimiento conserva las distancias, o que es una isometría, si al aplicar el movimiento a una figura cualquiera se cumple que si la imagen de una distancia d es d′, entonces d = d′.

Si son $\vec{x}, \vec{y}$ los vectores de posición de dos puntos X e Y, respectivamente, y son $\vec{x}', \vec{y}'$ los vectores de posición de sus respectivos puntos imágenes, X′,Y′, las distancias respectivas son $d^2(X,Y) = \left|\vec{x} - \vec{y}\right|^2$, $d^2(X',Y') = \left|\vec{x}' - \vec{y}'\right|^2$. Para que se conserven las distancias debe ocurrir, por consiguiente, que $\left|\vec{x} - \vec{y}\right| = \left|\vec{x}' - \vec{y}'\right|$.

02.4. Inversión de las figuras:
Se dice que un movimiento invierte las figuras, o que es un movimiento indirecto, si al aplicar el movimiento a una figura cualquiera se cumple que la imagen de una secuencia de puntos ABC es la secuencia CBA. Podemos hacer una comprobación

práctica de la inversión encontrando el volumen orientado de un paralelepípedo elemental definido por cuatro puntos A,B,C,D y el volumen orientado del paralelepípedo que definen sus puntos imágenes A′,B′,C′,D′. Si presentan distinto signo esto nos indicará que la correspondencia invierte las figuras.

Si son $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ los vectores de posición de los puntos A,B,C,D, respectivamente y son $\vec{a}',\vec{b}',\vec{c}',\vec{d}'$ los vectores de posición de A′,B′,C′,D′, se cumpliría en caso de inversión de figuras el cambio de signo de los productos mixtos:

$$signo\left[\vec{b}-\vec{a},\vec{c}-\vec{a},\vec{d}-\vec{a}\right] \neq signo\left[\vec{b}'-\vec{a}',\vec{c}'-\vec{a}',\vec{d}'-\vec{a}'\right]$$

02.5. Invarianza con respecto a un movimiento:
Se dice que un movimiento deja invariante un punto P, o que P es invariante con respecto a un movimiento dado, si la imagen del punto P es también el punto P.
Se dice que un movimiento deja invariante a una recta r, si la imagen de cualquier punto de r es también un punto de r.
Se dice que un movimiento deja invariante a un plano π, si la imagen de un cualquier punto de π es también un punto de π.

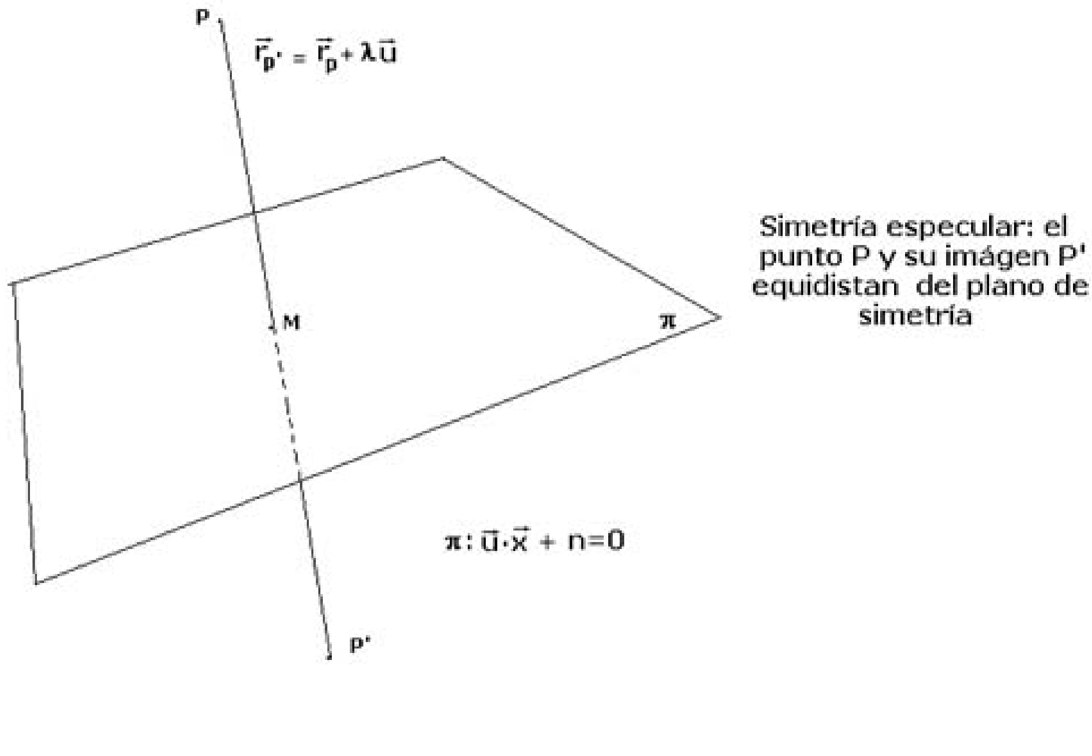
1. Definiendo movimientos

1.1. Simetría especular

1.1.1. Definición. Se denomina simetría especular respecto a un plano π dado, a la aplicación

$$S_\pi : E_3 \to E_3 / \forall P \in E_3, S_\pi(P) = P' \in E_3$$

cumpliéndose que la recta que contiene a P y P′ es perpendicular a π y que $\overrightarrow{MP} = -\overrightarrow{MP'}$ siendo M el punto de corte de dicha recta con el plano π.



1.1.2. Ecuación vectorial de la simetría especular:

si son respectivamente $\vec{r}_p, \vec{r}_{p'}$ los vectores de posición de P y P', se verifica que $\vec{r}_{p'} = \vec{r}_p + \lambda\vec{u}$, siendo λ un parámetro y $\vec{u}$ el vector unitario normal al plano π. M es el punto cuyo vector de posición es $\dfrac{\vec{r}_p + \vec{r}_{p'}}{2} \in \pi$.
Si es $\vec{u}.\vec{x} + n = 0$ la ecuación del plano de simetría, se verifica que:

$$\frac{\vec{r}_p + \vec{r}_{p'}}{2}.\vec{u} + n = 0 \rightarrow \frac{\vec{r}_p + \vec{r}_p + \lambda\vec{u}}{2}.\vec{u} + n = 0 \rightarrow \left(2.\vec{r}_p + \lambda\vec{u}\right).\vec{u} + 2n = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow 2.\vec{r}_p.\vec{u} + \lambda.\vec{u}^{\,2} + 2n = 0 \rightarrow \lambda = -2\left(\vec{r}_p.\vec{u} + n\right)$$

Y se obtiene finalmente la ecuación vectorial de la simetría:

$$\vec{r}_{p'} = \vec{r}_p - 2\left(\vec{r}_p.\vec{u} + n\right)\vec{u}$$

1.1.3. Ecuaciones escalares:

Llamando $\vec{u} = \left(A, B, C\right)$ y siendo $\vec{r}_p = (P_1, P_2, P_3)$, $\vec{r}_{p'} = \left(P_1^{'}, P_2^{'}, P_3^{'}\right)$, se tiene:

$$\vec{r}_p.\vec{u} + n = AP_1 + BP_2 + CP_3 + n \rightarrow -2(\vec{r}_p.\vec{u} + n).\vec{u} =$$
$$= -2\left[(AP_1 + BP_2 + CP_3 + n).A,\ (AP_1 + BP_2 + CP_3 + n).C,\ (AP_1 + BP_2 + CP_3 + n).C\right]$$

Por tanto, es:

$$\begin{cases} P_1^{'} = & P_1 - 2(AP_1 + BP_2 + CP_3 + n).A \\ P_2^{'} = & P_2 - 2(AP_1 + BP_2 + CP_3 + n).B \\ P_3^{'} = & P_3 - 2(AP_1 + BP_2 + CP_3 + n).C \end{cases}$$

1.1.4. Ejemplo:

Determinación del punto simétrico del punto $P(4,-1,3)$ con respecto al plano de ecuación $-x + 5y + z + 3\sqrt{27} = 0$.

En este ejemplo es $\vec{u} = (A, B, C) = (-1/\sqrt{27}, 5/\sqrt{27}, 1/\sqrt{27})$, $n = 3$, por lo que al sustituir en las ecuaciones escalares:

$$\begin{cases} P_1^{'} = & 4 - 2\dfrac{1}{\sqrt{27}}(-1.4 + 5.(-1) + 1.3 + 3\sqrt{27}).\dfrac{-1}{\sqrt{27}} = \dfrac{32 + 2\sqrt{27}}{9} \\ P_2^{'} = & -1 - 2\dfrac{1}{\sqrt{27}}(-1.4 + 5.(-1) + 1.3 + 3\sqrt{27}).\dfrac{5}{\sqrt{27}} = \dfrac{11 - 10\sqrt{27}}{9} \\ P_3^{'} = & 3 - 2\dfrac{1}{\sqrt{27}}(-1.4 + 5.(-1) + 1.3 + 3\sqrt{27}).\dfrac{1}{\sqrt{27}} = \dfrac{4 - 2\sqrt{27}}{9} \end{cases}$$

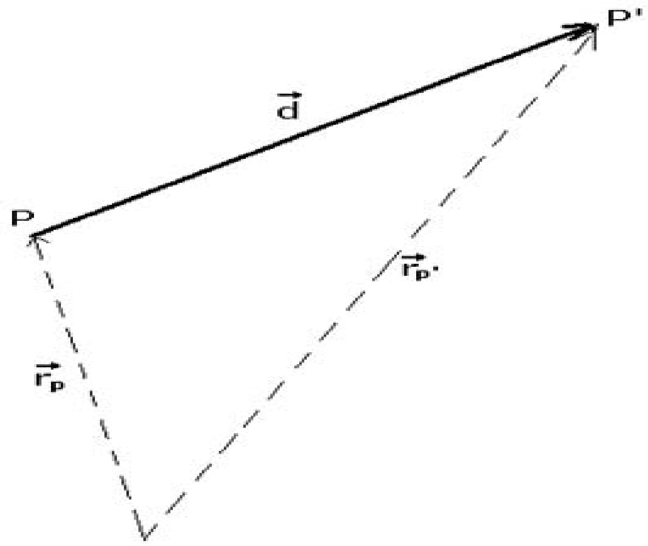
Punto simétrico: $P'(\dfrac{32 + 2\sqrt{27}}{9}, \dfrac{11 - 10\sqrt{27}}{9}, \dfrac{4 - 2\sqrt{27}}{9})$

1.2. Traslación

1.2.1. Definición. Se denomina traslación de vector $\vec{d}$, a la aplicación

$$T : E_3 \to E_3 \,/\, \forall P \in E_3, T(P) = P' \in E_3$$

cumpliéndose que $\overrightarrow{PP'} = \vec{d}$.



1.2.2. Ecuación vectorial de la traslación:

De la figura, se tiene: $\vec{r}_{p'} = \vec{r}_p + \vec{d}$

1.2.3. Ecuaciones escalares:

De la ecuación vectorial: $(P_1', P_2', P_3') = (P_1, P_2, P_3) + (d_1, d_2, d_3)$

O sea:

$$\begin{cases} P_1' = & P_1 + d_1 \\ P_2' = & P_2 + d_2 \\ P_3' = & P_3 + d_3 \end{cases}$$

1.2.4. Ejemplo:

Determinación de una traslación del punto P(4,5,2) de vector $\vec{d} = (-3,0,6)$.

$$\begin{cases} P_1' = & 4 - 3 = 1 \\ P_2' = & 5 + 0 = 5 \\ P_3' = & 2 + 6 = 8 \end{cases}$$

Punto trasladado: $P'(1,5,8)$

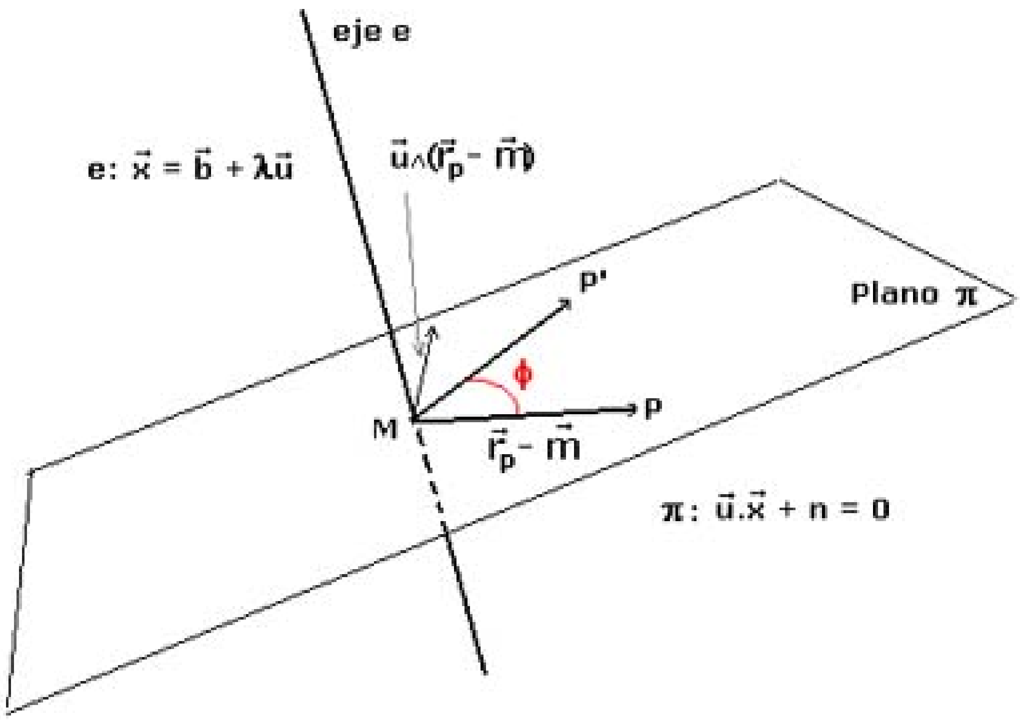
1.3. Giro o rotación

1.3.1. Definición. Se denomina giro o rotación de eje e y ángulo ϕ, a la aplicación

$$G_{(e,\phi)} : E_3 \to E_3 / \forall P \in E_3, G_{(e,\phi)}(P) = P' \in E_3$$

cumpliéndose que si son respectivamente $\vec{r}_p, \vec{r}_{p'}$ los vectores de posición de P y P', se verifica:

a) Ambos puntos P y P' están contenidos en un plano π perpendicular al eje e de giro.
b) Si es M el punto de corte de π con el eje e de giro, ambos puntos distan lo mismo de M.
c) Si es $\vec{m}$ el vector de posición de M, el ángulo que forman los vectores $\vec{r}_p - \vec{m} \quad y \quad \vec{r}_{p'} - \vec{m}$ es igual a ϕ.



1.3.2. Ecuación vectorial del giro:

Sea $\vec{u}.\vec{x} + n = 0$ la ecuación normal del plano π $(|\vec{u}| = 1)$ y sea $\vec{x} = \vec{b} + \lambda\vec{u}$ la ecuación del eje de giro, el vector producto vectorial $\vec{u} \wedge (\vec{r}_p - \vec{m})$ es perpendicular al vector $\vec{r}_p - \vec{m}$ y está contenido en el plano π. El vector $\vec{r}_{p'} - \vec{m}$ puede expresarse como combinación lineal de ellos en la forma

$$\vec{r}_{p'} - \vec{m} = (\vec{r}_p - m).\cos\phi + [\vec{u} \wedge (\vec{r}_p - \vec{m})].sen\phi$$

puesto que el punto M pertenece al eje de giro, se tiene, para un cierto λ_m :

$$\vec{m} = \vec{b} + \lambda_m \vec{u}$$

y puesto que la ecuación del plano se puede expresar por $\left(\vec{m}-\vec{r}_p\right).\vec{u}=0$:

$$\left(\vec{b}+\lambda_m\vec{u}-\vec{r}_p\right).\vec{u}=0 \rightarrow \lambda_m=\left(\vec{r}_p-\vec{b}\right).\vec{u} \rightarrow \vec{m}=\vec{b}+\left[\left(\vec{r}_p-\vec{b}\right).\vec{u}\right].\vec{u}$$

Se tiene por tanto, la siguiente ecuación vectorial:

$$\vec{r}_{p'}=\vec{m}+\left(\vec{r}_p-m\right).\cos\phi+\left[\vec{u}\wedge(\vec{r}_p-\vec{m})\right].sen\phi$$

donde es

$$\vec{m}=\vec{b}+\left[\left(\vec{r}_p-\vec{b}\right).\vec{u}\right].\vec{u}$$

1.3.3. Ecuaciones escalares:

Llamando $\vec{D}=\vec{r}_p-\vec{m}=(D_1,D_2,D_3)$, $\vec{E}=\left[\vec{u}\wedge(\vec{r}_p-\vec{m})\right]=(E_1,E_2,E_3)$, será:

$$(P_1,P_2,P_3)=(m_1,m_2,m_3)+(D_1,D_2,D_3).\cos\phi+(E_1,E_2,E_3).sen\phi$$

$$\begin{cases} P_1' = & m_1+D_1\cos\phi+E_1sen\phi \\ P_2' = & m_2+D_2\cos\phi+E_2sen\phi \\ P_3' = & m_3+D_3\cos\phi+E_3sen\phi \end{cases}$$

1.3.4. Ejemplo:

Búsqueda de la imagen del punto P(7,-1,3) cuando se le aplica un giro de 30º alrededor del eje e de ecuación vectorial (x,y,z)=(1,0,4)+λ(0,1,0)

$\vec{r}_p-\vec{b}=(7,-1,3)-(1,0,4)=(6,-1,-1)$, $\quad(\vec{r}_p-\vec{b}).\vec{u}=(6,-1,-1).(0,1,0)=-1$

$$\vec{m}=\vec{b}+\left[\left(\vec{r}_p-\vec{b}\right).\vec{u}\right].\vec{u}=(1,0,4)+(-1).(0,1,0)=(1,-1,4)$$

$$\vec{D}=\vec{r}_p-\vec{m}=(7,-1,3)-(1,-1,4)=(6,0,-1)$$

$$\vec{E}=\vec{u}\wedge(\vec{r}_p-\vec{m})=(0,1,0)\wedge(6,0,-1)=(-1,0,-6)$$

$$\begin{cases} P_1' = & m_1+D_1\cos\phi+E_1sen\phi=1+6.\cos 30+(-1).sen30=1+6\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1+6\sqrt{3}}{2} \\ P_2' = & m_2+D_2\cos\phi+E_2sen\phi=-1+0.\cos 30+0.sen30=-1 \\ P_3' = & m_3+D_3\cos\phi+E_3sen\phi=4+(-1).\cos 30+(-6).sen30=4-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{6}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Punto girado: $P'(\frac{1+6\sqrt{3}}{2},-1,\frac{2-\sqrt{3}}{2})$

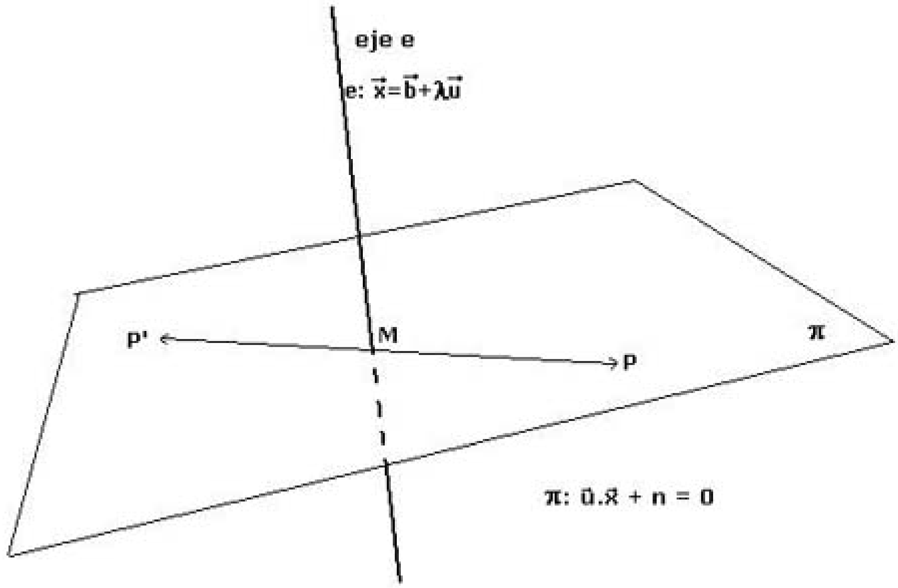
1.4. Simetría axial

1.4.1. Definición. Se denomina simetría axial eje e, a la aplicación

$$S_e : E_3 \to E_3 / \forall P \in E_3, S_e(P) = P' \in E_3$$

cumpliéndose que:

d) Ambos puntos P y P' están en un plano perpendicular al eje e de simetría.
e) La recta definida por P y P' es perpendicular al eje e de simetría.
f) Si es M el punto de corte del eje e de simetría con la recta PP', ambos puntos, P y P', distan lo mismo de M.



1.4.2. Ecuación vectorial de la simetría axial:

Sean $\vec{r}_p \; y \; \vec{r}_{p'}$ los vectores de posición de P y P' respectivamente. Puesto que, realmente, una simetría axial es un giro cuyo eje es el eje de la simetría axial y ángulo de 180º, se tiene, de la ecuación vectorial del giro:

$$\vec{r}_{p'} = \vec{m} + (\vec{r}_p - m).\cos 180 + [\vec{u} \wedge (\vec{r}_p - \vec{m})].sen 180$$

donde es $\vec{m} = \vec{b} + [(\vec{r}_p - \vec{b}).\vec{u}].\vec{u}$

En definitiva, es $\vec{r}_{p'} = 2.\vec{m} - \vec{r}_p = 2.\vec{b} + 2[(\vec{r}_p - \vec{b}).\vec{u}].\vec{u} - \vec{r}_p$

Ecuación vectorial:

$$\vec{r}_{p'} = 2.\vec{b} + 2[(\vec{r}_p - \vec{b}).\vec{u}].\vec{u} - \vec{r}_p$$

1.4.3. Ecuaciones escalares:

Se tiene que: $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{u} = (A, B, C)$, $\vec{r}_p - \vec{b} = (P_1 - b_1, P_2 - b_2, P_3 - b_3)$

$(\vec{r}_p - \vec{b}).\vec{u} = (P_1 - b_1, P_2 - b_2, P_3 - b_3)(A, B, C) = (P_1 - b_1)A + (P_2 - b_2)B + (P_3 - b_3)C$

En definitiva:

$$\begin{cases} P_1' = & 2b_1 + 2[(P_1 - b_1)A + (P_2 - b_2)B + (P_3 - b_3)C].A - P_1 \\ P_2' = & 2b_2 + 2[(P_1 - b_1)A + (P_2 - b_2)B + (P_3 - b_3)C].B - P_2 \\ P_3' = & 2b_3 + 2[(P_1 - b_1)A + (P_2 - b_2)B + (P_3 - b_3)C].C - P_3 \end{cases}$$

1.4.4. Ejemplo:

Determinar el punto imagen de P(0,8,-3) en una simetría axial de eje dado por la ecuación vectorial (x,y,z)=(2,1,2)+λ(1,0,0).

$$\begin{cases} P_1' = & 2.2 + 2[(0-2).1 + (8-1)0 + (-3-2)0].1 - 0 = 4 + 2.(-2) = 0 \\ P_2' = & 2.1 + 2[(0-2).1 + (8-1)0 + (-3-2)0].0 - 8 = 2 - 8 = -6 \\ P_3' = & 2.2 + 2[(0-2).1 + (8-1)0 + (-3-2)0].0 - (-3) = 4 + 3 = 7 \end{cases}$$

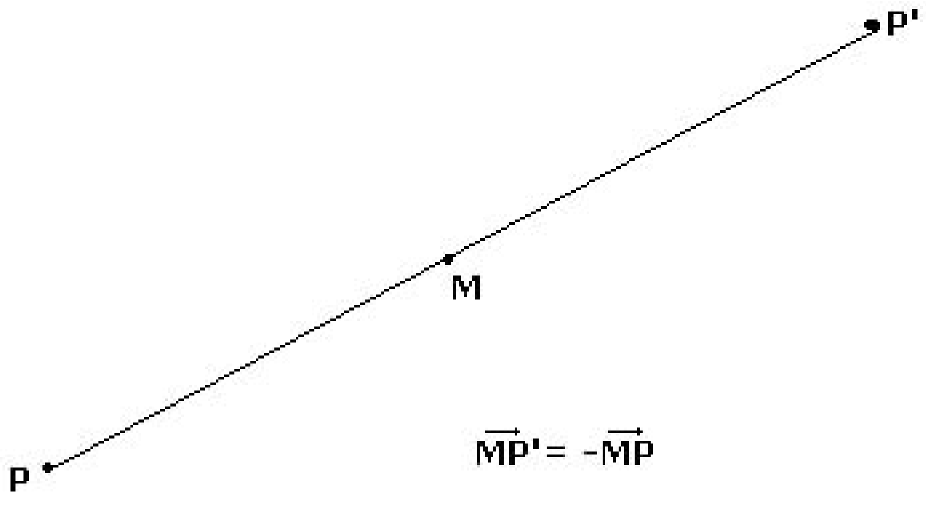
Punto simétrico: $P'(0,-6,7)$

1.5. Simetría central

1.5.1. Definición. Se denomina simetría central de centro M, a la aplicación

$$S_M : E_3 \rightarrow E_3 / \forall P \in E_3, S_M(P) = P' \in E_3$$

cumpliéndose que los puntos P, M Y P' son colineales y tales que se verifica la relación de proporcionalidad $\vec{MP'} = -\vec{MP}$.



1.5.2. Ecuación vectorial de la simetría central:

Se tiene, de la figura, llamando $\vec{m}$ al vector de posición del centro M, y $\vec{r}_p$ y $\vec{r}_{p'}$ los vectores de posición de P y P' respectivamente:

$$\begin{cases} \vec{r}_{p'} = & \vec{m} + \overrightarrow{MP'} = \vec{m} - \overrightarrow{MP} \\ \vec{r}_p = & \vec{m} + \overrightarrow{MP} \end{cases}$$

Sumando ambas relaciones:

$$\vec{r}_p + \vec{r}_{p'} = 2.\vec{m}$$

Por tanto, la ecuación vectorial es

$$\vec{r}_{p'} = 2.\vec{m} - \vec{r}_p$$

1.5.3. Ecuaciones escalares:

De la ecuación vectorial: $(P_1^{'}, P_2^{'}, P_3^{'}) = 2.(m_1, m_2, m_3) - (P_1, P_2, P_3)$

Por tanto se tienen las siguientes ecuaciones escalares:

$$\begin{cases} P_1^{'} = & 2m_1 - P_1 \\ P_2^{'} = & 2m_2 - P_2 \\ P_3^{'} = & 2m_3 - P_3 \end{cases}$$

1.5.4. Ejemplo:

Cálculo del punto imagen del punto P(-1,9,-3) en una simetría central de centro M(0,0,-3).

$$\begin{cases} P_1^{'} = & 2.0 - (-1) = 1 \\ P_2^{'} = & 2.0 - 9 = -9 \\ P_3^{'} = & 2.(-3) - (-3) = -3 \end{cases}$$

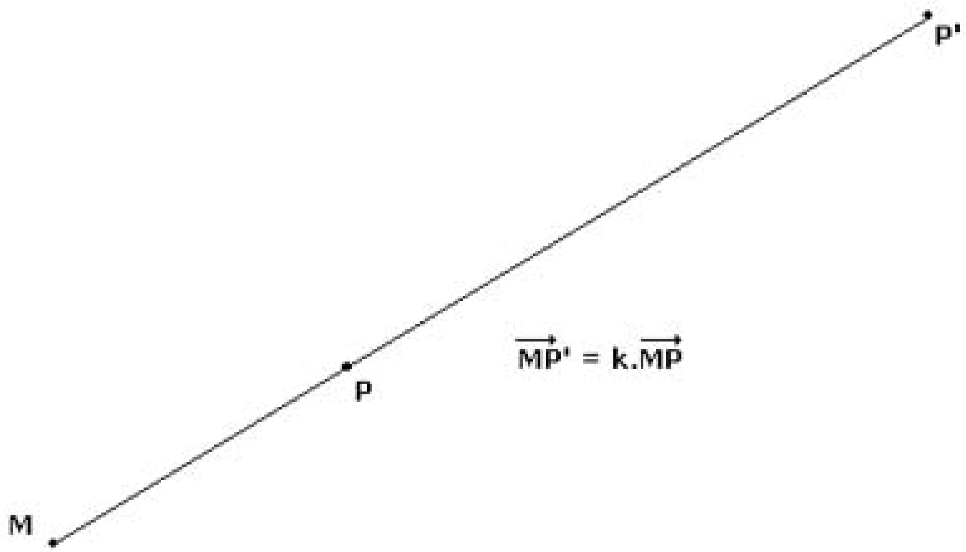
Punto simétrico: $P'(1,-9,-3)$

1.6. Homotecia

1.6.1. Definición. Se denomina Homotecia de centro M y razón k, a la aplicación

$$H_{(M,k)} : E_3 \to E_3 / \forall P \in E_3, H_{(M,k)}(P) = P' \in E_3$$

cumpliéndose que los puntos P, M Y P’ son colineales y tales que se verifica la relación de proporcionalidad $\overrightarrow{MP'} = K.\overrightarrow{MP}$.



1.6.2. Ecuación vectorial de la homotecia:

Siendo $\vec{r}_p \; y \; \vec{r}_{p'}$ los vectores de posición de P y P' respectivamente, $\vec{m}$ el vector de posición del centro M de homotecia, se tiene:

$$\begin{cases} \vec{r}_{p'} = & \vec{m} + \overrightarrow{MP'} = \vec{m} + k.\overrightarrow{MP} \\ \vec{r}_p = & \vec{m} + \overrightarrow{MP} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{r}_{p'} = & \vec{m} + k.\overrightarrow{MP} \\ k.\vec{r}_p = & k.\vec{m} + k.\overrightarrow{MP} \end{cases} \Rightarrow \vec{r}_{p'} - k.\vec{r}_p = k.\vec{m} - \vec{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{r}_{p'} = \vec{m} + k.(\vec{r}_p - \vec{m})$$

Ecuación vectorial: $\vec{r}_{p'} = \vec{m} + k.(\vec{r}_p - \vec{m})$

1.6.3. Ecuaciones escalares:

De la ecuación vectorial: $(P_1', P_2', P_3') = (m_1, m_2, m_3) + k.(P_1 - m_1, P_2 - m_2, P_3 - m_3)$

$$\begin{cases} P_1' = & m_1 + k(P_1 - m_1) \\ P_2' = & m_2 + k(P_2 - m_2) \\ P_3' = & m_3 + k(P_3 - m_3) \end{cases}$$

1.6.4. Ejemplo:

Determinemos el punto imagen P' del punto P(3,5,2) mediante una homotecia de centro M(6,2,-1) y razón k=2.

$$\begin{cases} P_1' = & 6 + 2(3-6) = 0 \\ P_2' = & 2 + 2(5-2) = 8 \\ P_3' = & -1 + 2(2-(-1)) = 5 \end{cases}$$

Punto homotético: $P(0,8,5)$

2. Propiedades de los movimientos

2.1. Propiedades de las simetrías especulares

Teorema 2.1.1:
Las simetrías especulares verifican las siguientes propiedades
1) Son involuciones.
2) Invierten el sentido de las figuras.
3) Transforman rectas en rectas y planos en planos.
4) Conservan los ángulos.
5) Son isometrías.
6) Son invariantes en una simetría especular a) los puntos del plano de simetría, b) las rectas y planos perpendiculares al plano de la simetría.

Demostración:

Sea la ecuación del plano P de simetría expresada por $\vec{n}.\vec{x} + d = 0$, donde es $\vec{n}$ vector unitario (se trata de la ecuación normalizada del plano).

La ecuación vectorial de la simetría especular que transforma el punto X en el punto X′ (S_p(X)=X′) es $\vec{x}' = \vec{x} - 2(\vec{n}.\vec{x} + d).\vec{n}$, y la que transforma el punto X′ en el punto X″ (S_p(X′)=X″) es $\vec{x}'' = \vec{x}' - 2(\vec{n}.\vec{x}' + d).\vec{n}$, por tanto:

1)
$$\begin{aligned}
\vec{x}'' &= (\vec{x} - 2(\vec{n}.\vec{x} + d).\vec{n}) - 2(\vec{n}.(\vec{x} - 2(\vec{n}.\vec{x} + d).\vec{n}) + d).\vec{n} = \\
&= \vec{x} - 2(\vec{n}.\vec{x}).\vec{n} - 2d.\vec{n} - 2((\vec{n}.\vec{x}) - 2(\vec{n}.\vec{x}).\vec{n}^2 - 2d.\vec{n}^2 + d).\vec{n} = \\
&= \vec{x} - 2(\vec{n}.\vec{x}).\vec{n} - 2d.\vec{n} + (-2(\vec{n}.\vec{x}) + 4(\vec{n}.\vec{x}).\vec{n}^2 + 4d.\vec{n}^2 - 2d).\vec{n} = \\
&= \vec{x} - 2(\vec{n}.\vec{x}).\vec{n} - 2d.\vec{n} - 2(\vec{n}.\vec{x}).\vec{n} + 4(\vec{n}.\vec{x}).\vec{n}^2.\vec{n} + 4d.\vec{n}^2.\vec{n} - 2d.\vec{n} = \\
&= \vec{x} - 2(\vec{n}.\vec{x}).\vec{n} - 2d.\vec{n} - 2(\vec{n}.\vec{x}).\vec{n} + 4(\vec{n}.\vec{x}).\vec{n} + 4d.\vec{n} - 2d.\vec{n} = \vec{x}
\end{aligned}$$

2) Se trata de probar que

$$[\vec{y}' - \vec{x}', \vec{z}' - \vec{x}', \vec{w}' - \vec{x}'] = -[\vec{y} - \vec{x}, \vec{z} - \vec{x}, \vec{w} - \vec{x}]$$

y si, por simplificar, tomamos el origen del sistema de referencia en el punto X, será $\vec{x} = 0$ y sería suficiente probar que

$$[\vec{y}' - \vec{x}', \vec{z}' - \vec{x}', \vec{w}' - \vec{x}'] = -[\vec{y}, \vec{z}, \vec{w}]$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned}
&\vec{x}' = \vec{x} - 2(\vec{n}.\vec{x} + d).\vec{n} = 0 - 2(0 + d).\vec{n} = -2d.\vec{n} \\
&\vec{y}' - x' = \vec{y} - 2(\vec{n}.\vec{y} + d).\vec{n} + 2d.\vec{n} = \vec{y} - 2(\vec{n}.\vec{y}).\vec{n} \\
&\vec{z}' - x' = \vec{z} - 2(\vec{n}.\vec{z} + d).\vec{n} + 2d.\vec{n} = \vec{z} - 2(\vec{n}.\vec{z}).\vec{n} \\
&\vec{w}' - x' = \vec{w} - 2(\vec{n}.\vec{w} + d).\vec{n} + 2d.\vec{n} = \vec{w} - 2(\vec{n}.\vec{w}).\vec{n}
\end{aligned}$$

por tanto:

$$\begin{aligned}
&[\vec{y}' - \vec{x}', \vec{z}' - \vec{x}', \vec{w}' - \vec{x}'] = [\vec{y} - 2(\vec{n}.\vec{y}).\vec{n}, \vec{z} - 2(\vec{n}.\vec{z}).\vec{n}, \vec{w} - 2(\vec{n}.\vec{w}).\vec{n}] = \\
&= [\vec{y}, \vec{z}, \vec{w}] + (-2(\vec{n}.\vec{y}))[\vec{n}, \vec{z}, \vec{w}] + (-2(\vec{n}.\vec{z}))[\vec{y}, \vec{n}, \vec{w}] + (-2(\vec{n}.\vec{w}))[\vec{y}, \vec{z}, \vec{n}]
\end{aligned}$$

y puesto que es:

$$\left(-2(\vec{n}.\vec{y})\right)\left[\vec{n},\vec{z},\vec{w}\right]+\left(-2(\vec{n}.\vec{z})\right)\left[\vec{y},\vec{n},\vec{w}\right]=2\left[\vec{n}\wedge(\vec{z}\wedge\vec{y})\right].\left[\vec{n}\wedge\vec{w}\right]=$$
$$=2(\vec{n}.\vec{w})\left[\vec{y},\vec{z},\vec{n}\right]-2\left[\vec{y},\vec{z},\vec{w}\right]$$

Se tiene, al sustituir:

$$\left[\vec{y}'-\vec{x}',\vec{z}'-\vec{x}',\vec{w}'-\vec{x}'\right]=\left[\vec{y},\vec{z},\vec{w}\right]-2(\vec{n}.\vec{w}).\left[\vec{y},\vec{z},\vec{n}\right]+2(\vec{n}.\vec{w}).\left[\vec{y},\vec{z},\vec{n}\right]-2\left[\vec{y},\vec{z},\vec{w}\right]=$$
$$=-\left[\vec{y},\vec{z},\vec{w}\right]$$

3)

3.1) Sea la recta $\vec{x}=\vec{a}+\lambda\vec{t}$, ($\vec{t}$ unitario)

$$\vec{x}'=\vec{a}+\lambda\vec{t}-2(\vec{n}.(\vec{a}+\lambda\vec{t})+d).\vec{n}=(\vec{a}+2(\vec{n}.\vec{a}).\vec{n}-2d.\vec{n})+\lambda(\vec{t}-2(\vec{n}.\vec{t}).\vec{n})=\vec{A}+\lambda\vec{T}$$

Habiendo llamado

$$\vec{A}=\vec{a}+2(\vec{n}.\vec{a}).\vec{n}-2d.\vec{n},\qquad \vec{T}=\vec{t}-2(\vec{n}.\vec{t}).\vec{n}$$

Así, pues, la imagen de la recta $\vec{x}=\vec{a}+\lambda\vec{t}$, con $\vec{t}$ unitario, es la recta $\vec{x}=\vec{A}+\lambda\vec{T}$ donde el vector director $\vec{T}$ es también unitario, ya que:

$$\left|\vec{T}\right|^2=\left|\vec{t}-2.(\vec{n}.\vec{t}).\vec{n}\right|^2=\vec{t}.\vec{t}-2(\vec{n}.\vec{t}).(\vec{n}.\vec{t})-2(\vec{n}.\vec{t}).(\vec{n}.\vec{t})+4(\vec{n}.\vec{t}).(\vec{n}.\vec{t})=\vec{t}.\vec{t}=1$$

3.2) Sea ahora el plano $\vec{A}.\vec{x}+B=0$ y sea $\vec{x}'$ el vector de posición del punto imagen X. Se tiene:

$\vec{x}'=\vec{x}-2(\vec{n}.\vec{x}+d).\vec{n}$, y, por tratarse de una involución, también puede escribirse, que $\vec{x}=\vec{x}'-2(\vec{n}.\vec{x}'+d).\vec{n}$. Por tanto, sustituyendo en la ecuación del plano:

$$\vec{A}.\vec{x}+B=0\rightarrow\vec{A}.(\vec{x}'-2(\vec{x}'.\vec{n}+d).\vec{n})+B=0\rightarrow\vec{A}.\vec{x}'-2(\vec{x}'.\vec{n})\vec{A}.\vec{n}-2\vec{A}.d.\vec{n}+B=0\rightarrow$$
$$\rightarrow\left(\vec{A}-2.(\vec{A}.\vec{n}).\vec{n}\right).\vec{x}'+\left(B-2d.(\vec{A}.\vec{n})\right)=0\rightarrow\vec{A}'.\vec{x}'+B'=0$$

llamando $\vec{A}'=\vec{A}-2.(\vec{A}.\vec{n}).\vec{n},\quad B'=B-2d.(\vec{A}.\vec{n})$

y, por tanto, la imagen del plano $\vec{A}.\vec{x}+B=0$ resulta ser el plano $\vec{A}.'\vec{x}+B'=0$

4) Sean las rectas $\vec{x}=\vec{a}+\lambda\vec{t}$, $\vec{x}=\vec{b}+\mu\vec{s}$, y sean $\vec{x}=\vec{a}'+\lambda\vec{t}'$, $\vec{x}=\vec{b}'+\mu\vec{s}'$ sus rectas imágenes, en donde, por el anterior apartado, los vectores directores de las rectas imágenes son unitarios si lo son los vectores directores de las rectas dadas.

El coseno del ángulo que forman las rectas dadas viene, por consiguiente, dado por el producto interior de sus vectores directores, y también el coseno del ángulo que formas sus correspondientes rectas imágenes. Para probar que se trata del mismo ángulo bastará en este caso probar que ambos productos interiores son iguales:

$$\vec{t}.\vec{s}=\vec{t}'.\vec{s}'$$

$$\vec{t}\,'\vec{s}\,'=(\vec{t}-2(\vec{t}.\vec{n}).\vec{n}).(\vec{s}-2(\vec{s}.\vec{n}).\vec{n})=\vec{t}.\vec{s}-2(\vec{n}.\vec{s}),(\vec{n}.\vec{t})-2(\vec{n}.\vec{s}),(\vec{n}.\vec{t})+4(\vec{n}.\vec{s}),(\vec{n}.\vec{t})=\vec{t}.\vec{s}$$

Así, pues, se conservan los ángulos.

5) Para comprobar que se conservan las distancias, vemos que $d(X,Y)=d(X',Y')$

$$d^2(X',Y')=|\vec{x}'-\vec{y}'|^2=|\vec{x}-2(\vec{n}.\vec{x}+d).\vec{n}-\vec{y}-2(\vec{n}.\vec{y}+d).\vec{n}|^2=|\vec{x}-\vec{y}+2.((\vec{y}-\vec{x}).\vec{n}).\vec{n}|^2=$$
$$=\left|\vec{x}-\vec{y}+2.(\vec{y}-\vec{x}).\vec{n}^2\right|^2=|\vec{x}-\vec{y}+2.(\vec{y}-\vec{x})|^2=|\vec{y}-\vec{x}|^2=d^2(X,Y)$$

6) Es inmediato, por definición de simetría especular.

Teorema 2.1.2:
El producto de dos simetrías especulares de planos paralelos es equivalente a una traslación cuyo vector tiene por módulo el doble de la distancia entre ambos planos.

Demostración:

Sea $X'=S_{p1}(X)$, $X''=S_{p2}(X')$, es decir, sea $X''=(S_{p1}oS_{p2})(X)$, donde son los planos de simetría:

$$P_1:\vec{n}.\vec{x}+d_1=0$$
$$P_2:\vec{n}.\vec{x}+d_2=0$$

y las ecuaciones de la simetría especular son

$$\vec{x}'=\vec{x}-2.(\vec{n}.\vec{x}+d_1).\vec{n}$$
$$\vec{x}''=\vec{x}'-2.(\vec{n}.\vec{x}'+d_2).\vec{n}$$

si, por simplificar, consideramos que uno de los planos, por ejemplo P_1, pasa por el origen, esto es $\vec{n}.\vec{x}=0$ (*d_1=0*), nos indicaría que d_2, distancia del plano P_2 al origen, es también la distancia entre ambos planos.

Se tiene:

$$\vec{x}''=\vec{x}'-2.(\vec{n}.\vec{x}'+d_2).\vec{n}=(\vec{x}-2.(\vec{n}.\vec{x}).\vec{n})-2.(\vec{n}.(\vec{x}-2.(\vec{n}.\vec{x}).\vec{n})+d_2).\vec{n}=$$
$$=\vec{x}-2.(\vec{n}.\vec{x}).\vec{n}-2.(n\vec{x}).\vec{n}+4.(\vec{n}.\vec{x}).\vec{n}-2d_2.\vec{n}=\vec{x}-2d_2.\vec{n}$$

O sea $\vec{x}''=\vec{x}-2d_2.\vec{n}$, que corresponde a una traslación de vector $2d_2\vec{n}$, donde $\vec{n}$ es vector unitario, por lo que su módulo es $2d_2$, doble de la distancia entre ambos planos.

Análogamente, toda traslación T_a, de vector $\vec{a}$, tal que $T_a(X)=X'$, es la composición de dos simetrías especulares de planos paralelos distantes $|\vec{a}|/2$.

2.2. Propiedades de las traslaciones

Teorema 2.2.1:
Las traslaciones verifican las siguientes propiedades

1) Transforman rectas en rectas paralelas y planos en planos paralelos.
2) Conservan los ángulos.
3) Son Isometrías.
4) Conservan el sentido de las figuras.
5) No existe un punto concreto que sea invariante, salvo que el vector de traslación sea nulo.
6) Globalmente una recta o un plano paralelo al vector de traslación es invariante.
7) El conjunto de las traslaciones es un grupo conmutativo.

Demostración:

1) Es consecuencia inmediata de la definición, pues la recta imagen de otra recta tiene el mismo vector director y el plano imagen de otro plano tiene el mismo vector normal, ya que si se trata de una traslación de vector $\vec{M}$ ($\vec{x}'=\vec{x}+\vec{M}$):

   Imagen de una recta: $\vec{x}=\vec{a}+\lambda\vec{t} \rightarrow \vec{x}'=\vec{x}+\vec{M}=(\vec{a}+\vec{M})+\lambda\vec{t}$

   .

   Imagen de un plano: $\vec{A}.\vec{x}+C=0 \rightarrow \vec{A}(\vec{x}'-\vec{M})+C=0 \rightarrow \vec{A}.\vec{x}'+(C-\vec{A}.\vec{M})=0$

2) Puesto que una traslación es la composición de dos simetrías especulares de planos paralelos, si se conservan los ángulos en cada simetría especular, se conservarán finalmente en la traslación.
3) Lo mismo, pues si se conservan las distancias en cada simetría especular se conservan las distancias en las traslaciones, al ser siempre producto de dos simetrías especulares.
4) Conservan el sentido de las figuras, si una traslación es el producto de dos simetrías especulares, y sabiendo que cada simetría invierte el sentido de las figuras, esto indica que una traslación invierte dos veces, por lo que finalmente se mantiene el sentido de las figuras.
5) Es obvio, de la definición.
6) Inmediato, de la definición.
7) Efectivamente, llamando *T* al conjunto de todas las traslaciones, se tiene

   a) $\forall T_a, T_b \in T, T_a \circ T_b = T_{a+b} \in T$ (ley interna)

   b) $\forall T_a, T_b \in T, T_a \circ T_b = T_{a+b} = T_{b+a} = T_a \circ T_b$ (conmutativa)

   c) $\forall T_a \in T, \exists T_o \in T, T_o \circ T_a = T_a \in T$ (el. Neutro)

   d) $\forall T_a \in T, \exists T_{-a} \in T, T_{-a} \circ T_a = T_a + T_{-a} = T_0$ (el. Simétrico)

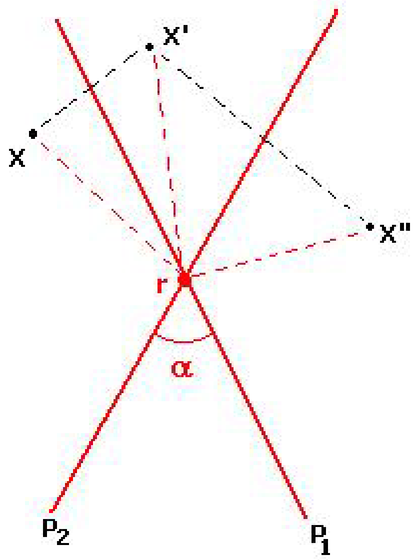
   e) $\forall T_a, T_b, T_c \in T, (T_a \circ T_b) \circ T_c = T_a \circ (T_b \circ T_c) \in T$ (asociatividad)

2.3. Propiedades de los giros

Teorema 2.3.1:
El producto de dos simetrías especulares de planos P_1 y P_2, que se cortan en una recta r, es una giro de eje r y ángulo doble del diedro definido por ambos planos. O sea:

$$diedro(P_1, P_2) = \alpha \rightarrow S_{p_1} \circ S_{p_2} = G_{(r,2\alpha)}$$

Demostración:



De la figura, se tiene

$$dist(Xr) = dist(X'r) = dist(X''r)$$
$$ang(XrP_1) = ang(X'rP_2)$$
$$ang(X'rP_1) = ang(P_2rX'')$$

$$ang(XrP_1) + ang(X'rP_2) = ang(P_1rP_2) = \alpha$$

$$ang(P_1rX') + ang(P_2rX'') = ang(P_1rP_2) = \alpha$$

Por tanto, el ángulo que forman Xr y rX”, que corresponde al giro equivalente, es:

$$ang(XrP_1) + ang(X'rP_2) + ang(P_1rX') + ang(P_2rX'') =$$
$$= 2.ang(P_1rP_2) = 2\alpha$$

En definitiva:

$$diedro(P_1, P_2) = \alpha \rightarrow S_{p_1} \circ S_{p_2} = G_{(r,2\alpha)}$$

Teorema 2.3.2:
Los giros verifican las siguientes propiedades

1) Transforman rectas en rectas y planos en planos.
2) Conservan los ángulos.
3) Son Isometrías.
4) Conservan el sentido de las figuras.
5) Son invariantes en un giro, a) los puntos del eje de giro, b) los planos perpendiculares al eje de giro, c) las esferas centradas e un punto del eje de giro.
6) El conjunto de todos los giros del mismo eje constituyen un grupo conmutativo.

Demostración:

1) Puesto que las simetrías especulares cumplen esta propiedad, el giro, que es producto de dos simetrías especulares, por el teorema anterior, también la verifica.
2) Lo mismo, pues también es verificada esta propiedad por las simetrías especulares.

3) Igualmente, las simetrías especulares conservan las distancias, luego también las distancias se conservan en un giro.
4) Efectivamente, pues las simetrías especulares invierten el sentido de las figuras, y al ser el giro un producto de dos simetrías especulares, el sentido de las figuras finalmente se conserva en el giro.
5) Es obvio, desde la definición de giro.
6) Veamos que se verifican las condiciones de grupo conmutativo. Sea G_r el conjunto de todos los giros de eje r:

   a) $\forall G_{(r,\alpha)}, G_{(r,\beta)} \in G_r, G_{(r,\alpha)} \circ G_{(r,\beta)} = G_{(r,\alpha+\beta)} \in G_r$ (ley interna)

   b) $\forall G_{(r,\alpha)}, G_{(r,\beta)} \in G_r, G_{(r,\alpha)} \circ G_{(r,\beta)} = G_{(r,\alpha+\beta)} = G_{(r,\beta+\alpha)} = G_{(r,\beta)}, G_{(r,\alpha)}$ (conmu.)

   c) $\forall G_{(r,\alpha)} \in G_r, \exists G_{(r,0)} \in G_r / G_{(r,\alpha)} \circ G_{(r,0)} = G_{(r,0)} \circ G_{(r,\alpha)} = G_{(r,\alpha)}$ (el. Neutro)

   d) $\forall G_{(r,\alpha)} \in G_r, \exists G_{(r,-\alpha)} \in G_r / G_{(r,\alpha)} \circ G_{(r,-\alpha)} = G_{(r,0)}$ (ele. Simétrico)

   e) $\forall G_{(r,\alpha)}, G_{(r,\beta)}, G_{(r,\gamma)} \in G_r, G_{(r,\alpha)} \circ (G_{(r,\beta)} \circ G_{(r,\gamma)}) = G_{(r,\alpha+(\beta+\gamma))} = G_{(r,(\alpha+\beta)+\gamma)} =$
   $= (G_{(r,\alpha)} \circ G_{(r,\beta)}) \circ G_{(r,\gamma)}$
   (asociatividad)

2.4. Propiedades de las simetrías axiales

Teorema 2.4.1:
El producto de dos simetrías especulares de planos entre sí perpendiculares que se cortan en una recta r es equivalente a una simetría axial de eje r.

Demostración:

Consideremos P_1 y P_2, los planos de las simetrías especulares que se cortan perpendicularmente. Del teorema 2.3.1., el producto de ambas simetrías es un giro de 180º. Puesto que un giro de 180º es una simetría axial, se tiene que

$$diedro(P_1, P_2) = 90º \rightarrow S_{p_1} \circ S_{p_2} = G_{(r,180º)} = S_r$$

Todo eje r puede ser considerado la intersección de dos planos entre sí perpendiculares, por lo que dada una simetría axial, Sr, siempre hay dos simetrías especulares cuya composición es equivalente a la simetría axial dada.

Teorema 2.4.2:
Las simetrías axiales verifican:
a) Todas las propiedades de los giros (Teorema 2.3.2).
b) Son involuciones.
c) Son invariantes para una simetría axial, a) los puntos del eje de simetría, b) los planos normales al eje y los planos que contienen al eje, c) las rectas normales al eje.

Demostración:

a) Obviamente, pues una simetría axial de eje r es, en realidad, un giro de eje r y ángulo de 180°.
b) $S_r[S_r(X)] = (S_r \circ S_r)(X) = [G_{(r,180)} \circ G_{(r,180)}](x) = G_{(r,0)}(X) = X$

c) Es inmediato, desde la definición de simetría axial.

Teorema 2.4.3:

1) Si dos rectas, r_1 y r_2, son paralelas, el producto de las simetrías axiales con respecto a ellas como ejes, es una traslación de vector perpendicular a ambas y módulo el doble de la distancia entre ambas rectas.
2) Si dos rectas, r_1 y r_2, se cortan en un punto M, el producto de las simetrías axiales con respecto a ellas como ejes, es un giro de eje la recta r perpendicular a ambas por el punto M y ángulo el doble del que forman ambas rectas.
3) Si dos rectas, r_1 y r_2, se cruzan, el producto de las simetrías axiales con respecto ellas como ejes, es el producto de una traslación por un giro (o de un giro por una traslación).

Demostración:

1) Sea P el plano que contiene a ambas rectas paralelas, r_1 y r_2, y sean P_1 y P_2 los planos perpendiculares a P por r_1 y r_2, respectivamente. Por el teorema 2.4.1:

$$S_{r_1} = S_{P_1} \circ S_P$$
$$S_{r_2} = S_P \circ S_{P_2}$$

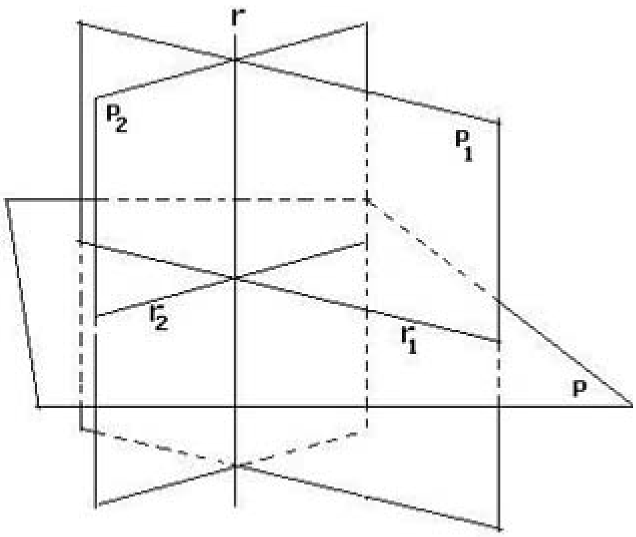
por consiguiente:

$$S_{r_1} \circ S_{r_2} = S_{P_1} \circ S_P \circ S_P \circ S_{P_2} = S_{P_1} \circ S_{P_2} = T_a$$

(pues el producto de dos simetrías especulares de planos paralelos es una traslación)

Si es *d* la distancia entre ambas rectas también será las distancia entre los planos paralelos P1 y P2, por lo que el vector de traslación verifica $|a| = 2d$ (teorema 2.1.2)

2) Sea P el plano que contiene a ambas rectas, y sean P_1 y P_2 planos perpendiculares a P, por r_1 y r_2, respectivamente.



Por el teorema 2.4.1, es

$$S_{r_1} = S_{P_1} \circ S_P$$
$$S_{r_2} = S_P \circ S_{P_2}$$

Por tanto:

$$S_{r_1} \circ S_{r_2} = S_{P_1} \circ S_P \circ S_P \circ S_{P_2} = S_{P_1} \circ S_{P_2}$$

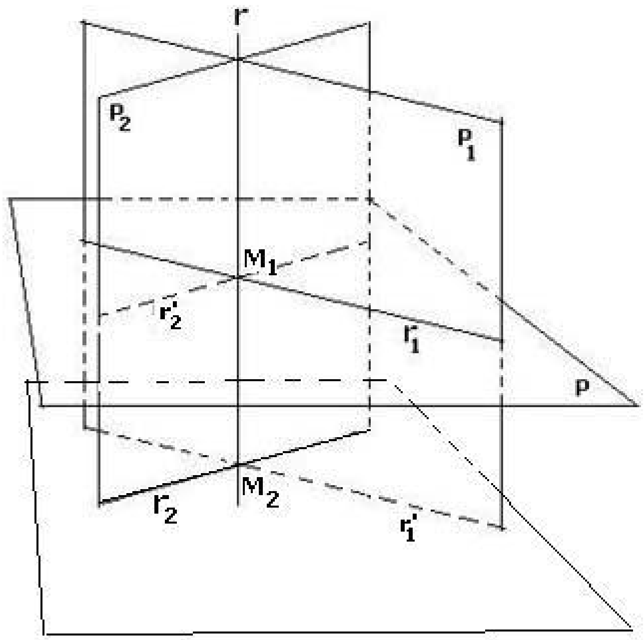
Y por el teorema 2.3.1 es

$$S_{P_1} \circ S_{P_2} = G_{(r_1, 2\alpha)}$$

Por tanto

$$S_{r_1} \circ S_{r_2} = G_{(r_1, 2\alpha)}$$

3) Consideremos la recta r como perpendicular común a r_1 y r_2, y sean los puntos M_1 y M_2 en donde corta r a ambas rectas. Llamemos r'_1 a la recta paralela a r_1 por M_2 y r'_2 a la recta paralela a r_2 por M_1



Se pueden realizar cualquiera de estas dos operaciones:

a)Una simetría axial con respecto a r_1, S_{r1}, por una simetría axial con respecto a r'_2, S'_{r2}, y finalmente una simetría axial respecto a r_2, S_{r2}.

b) Una simetría axial con respecto a r_1, S_1, por una simetría axial con respecto a r'_1, S'_{r1}, por, finalmente, una simetría axial con respecto a r_2, S_{r2}.

En el primer caso, como r_1 y r'_2 se cortan en M1, el producto de ambas simetrías axiales es un giro de eje la recta r, perpendicular común a ambas rectas:

$$S_{r_1} \circ S'_{r_2} = G_{(r,2\alpha)}$$

Y finalmente, la composición con la simetría axial respecto a r_2, S_{r2}, es, realmente, una traslación, T_a, de vector a paralelo a la recta r, perpendicular común a ambas rectas. Por tanto:

$$S_{r_1} \circ S'_{r_2} \circ S_{r_2} = G_{(r,2\alpha)} \circ T_a$$

En el segundo caso, como r_1 y r'_1 son paralelos, el producto de ambas simetrías axiales es una traslación, T_a, de vector a paralelo al eje r perpendicular común:

$$S_{r_1} \circ S'_{r_1} = T_a$$

Y finalmente, la composición con la simetría axial respecto a r_2 representa un giro de eje r. En definitiva:

$$S_{r_1} \circ S'_{r_1} \circ S_{r_2} = T_a \circ G_{(r,2\alpha)}$$

Teorema 2.4.4:

1) El producto de dos giros de ejes paralelos es:
   a) otro giro respecto a un eje paralelo a ambos si la suma de los dos ángulos de giro no es múltiplo de $2k\pi$.
   b) Una traslación si la suma de los dos ángulos de giro es múltiplo de $2k\pi$, siendo el vector de traslación perpendicular a ambos ejes y de módulo el doble de la distancia entre ambos.
2) El producto de dos giros cuyos ejes se cortan es otro giro cuyo eje pasa por la intersección de los ejes dados.
3) El producto de dos giros cuyos ejes se cruzan es igual al producto de dos simetrías axiales cuyos ejes se cruzan.

Demostración:

1) Sea P el plano que contiene a r_1 y r_2, y sean P1 y P2 dos planos que cortan a P en r1 y r2 respectivamente. Por el teorema 2.3.1 se tiene que

$$G_{(r_1,\alpha)} = S_p \circ S_{p_1}$$
$$G_{(r_2,\beta)} = S_{p_2} \circ S_p$$

de donde:

$$G_{(r_2,\beta)} G_{(r_1,\alpha)} = S_{p_2} \circ S_p \circ S_p \circ S_{p_1} = S_{p_2} \circ S_{p_1}$$

a) Si $\alpha + \beta \neq 2k\pi$, indicará que se trata de un giro, de eje la intersección de ambos planos y amplitud $\alpha + \beta$, puesto que el diedro P_1P_2 es suma de los diedros PP_2 y P_1P.
b) Si $\alpha + \beta = 2k\pi$ indicaría que ambos planos P_1 y P_2 son paralelos pues ambos diedros sumarían un múltiplo de 180º.

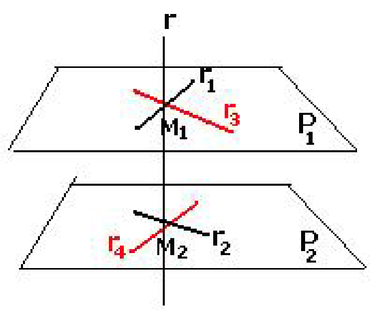
2) Si las dos rectas r_1 y r_2 se cortan, sean los giros respectivos

$$G_{(r_1,\alpha)} = S_p \circ S_{p_1}$$
$$G_{(r_2,\beta)} = S_{p_2} \circ S_p$$

$$G_{(r_2,\beta)} G_{(r_1,\alpha)} = S_{p_2} \circ S_p \circ S_p \circ S_{p_1} = S_{p_2} \circ S_{p_1} = G_{(r,2\gamma)}$$

donde es r la recta intersección de los planos P_1 y P_2 .

3) Si ambas rectas r_1 y r_2 se cruzan, sean los planos paralelos P1 y P2 que contienen respectivamente a r1 y a r2 y sea r la perpendicular común, con M1 el punto de corte de r1 con r, y M2 el punto de corte de r2 con r. Si es r3 una recta del plano P1 perpendicular a r1 por M1 y es r4 una recta perpendicular a r2 por M2, se tendrá, aplicando el teorema 2.4.3_2):



$$S_r \circ S_{r_3} = G_{(r_1,\alpha)}$$
$$S_{r_4} \circ S_r = G_{(r_2,\beta)}$$

$$S_{r_4} \circ S_r \circ S_r \circ S_{r_3} = G_{(r_2,\beta)} \circ G_{(r_1,\alpha)} \Rightarrow S_{r_4} \circ S_{r_3} = G_{(r_2,\beta)} \circ G_{(r_1,\alpha)}$$

2.5. El Grupo $MD(E_3)$ de los Movimientos Directos

Teorema 2.5.1:
El conjunto cuyos elementos son simetrías axiales o productos finitos de simetrías axiales, es un grupo, que denominamos Grupo de los Movimientos Directos del espacio E_3, $MD(E_3)$, y cuyos elementos tienen la siguientes propiedades

1) Transforman rectas en rectas y planos en planos.
2) Conservan los ángulos.
3) Conservan las distancias (son Isometrías).
4) Conservan el sentido de las figuras.

Demostración:

Tengamos en cuenta que, por las propiedades vistas en los anteriores teoremas, las traslaciones, los giros y las simetrías axiales quedan dentro del conjunto $MD(E_3)$, incluido el caso de giro por traslación que aparece en el caso de dos rectas que se cruzan (teorema 2.4.3_3)). Se trata, en definitiva de un grupo, por ser también grupo el conjunto de las traslaciones, de los giros y de las simetrías axiales.

1) Obviamente, pues se trata de una de las propiedades de las simetrías axiales.
2) Lo mismo.
3) Lo mismo.
4) También las simetrías axiales conservan el sentido de las figuras, y, por consiguiente, también su producto.

2.6. El grupo MH de los movimientos helicoidales

Teorema 2.6.1:
Si llamamos Movimiento Helicoidal al producto de un giro por una traslación de vector paralelo al eje de giro, se verifican las siguientes proposiciones:

1) Una transformación es movimiento helicoidal si y solo si es producto de dos simetrías axiales.
2) Todo producto de traslación por giro, o giro por traslación, es movimiento helicoidal, cualquiera que sea la dirección del vector de traslación.
3) El conjunto MH de los movimientos helicoidales en el espacio tridimensional es un grupo.
4) El grupo MH de los movimientos helicoidales coincide con el grupo MD de los movimientos directos.

Demostración:

1) En realidad, si dos rectas se cortan, el producto de simetrías axiales respecto de ambas es un giro, que puede considerarse un movimiento helicoidal de vector de desplazamiento nulo.

   Asimismo, si dos rectas son paralelas, el productos de simetrías axiales respecto de ambas es una traslación, que puede considerarse también un movimiento helicoidal de ángulo de giro nulo.

   Finalmente, si las dos rectas se cruzan, sean r_1 y r_2, entonces podemos considerar otra recta r_3 que corte a r_1 en la perpendicular común y que sea paralela a r_2. Por el teorema 2.4.3. existen simetrías axiales Sr_1 y Sr_3 tales que su composición es un giro de ángulo doble del que forman las dos rectas, y existen las Sr_3 y Sr_2 tales que su composición es una traslación de vector paralelo a la perpendicular común y módulo doble de la distancia entre ambas rectas:

$$S_{r_1} \circ S_{r_3} = G_{(r,2a)}$$
$$S_{r_3} \circ S_{r_2} = T_d$$

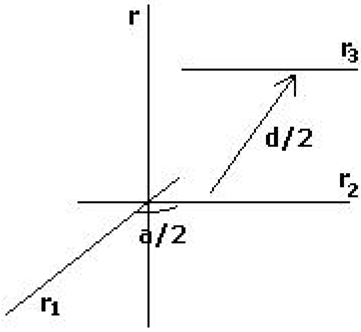
Por tanto, el movimiento helicoidal $H = G_{(r,2a)} \circ T_d$ puede expresarse por:

$$H = G_{(r,2a)} \circ T_d = S_{r_1} \circ S_{r_3} \circ S_{r_3} \circ S_{r_2} = S_{r_1} \circ S_{r_2}$$

Al revés, si se tiene el producto de dos simetrías axiales con respecto a dos rectas que se cruzan, r_1 y r_2, siempre es posible encontrar una recta r_3 paralela a una de ellas y que corte a la otra en el punto de su intersección con la perpendicular común, cumpliéndose obviamente que

$$S_{r_1} \circ S_{r_2} = S_{r_1} \circ S_{r_3} \circ S_{r_3} \circ S_{r_2} = G_{(r,2a)} \circ T_d = H$$

2) Efectivamente, pues, considerando dos rectas, r_1 y r_2 que se cortan y una recta cualquiera r_3 paralela a una de ellas, por ejemplo a r_2, se tiene:



$$G_{(r,a)} = S_{r_2} \circ S_{r_1}$$
$$T_2 = S_{r_3} \circ S_{r_2}$$

$$T_d \circ G_{(r,a)} = S_{r_3} \circ S_{r_2} \circ S_{r_2} \circ S_{r_1} = S_{r_3} \circ S_{r_1}$$

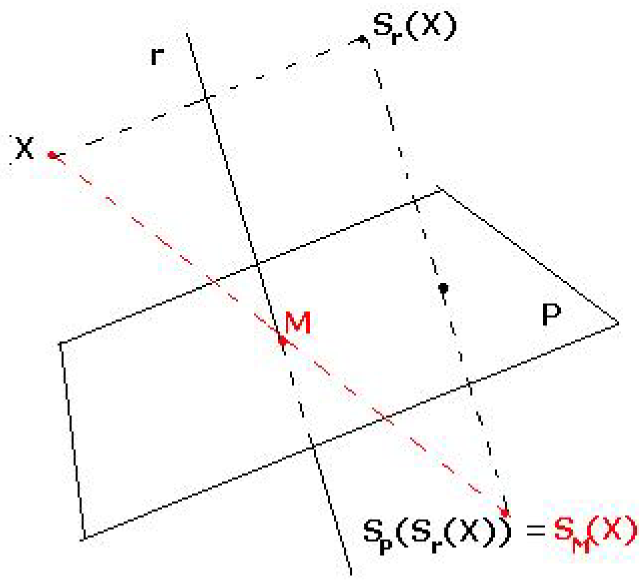
no siendo necesario, pues, que el vector de traslación sea paralelo a la perpendicular común.

3) Todo movimiento helicoidal es producto de simetrías axiales, y, al revés, todo producto de dos simetrías axiales es movimiento helicoidal. Siendo grupo el conjunto de las simetrías axiales, grupo MD de los movimientos directos, también es grupo el conjunto MH de los movimientos helicoidales.
4) Obvio por lo anterior.

2.7. Propiedades de las simetrías centrales

Teorema 2.7.1:
Toda simetría central de centro M es el producto de una simetría especular respecto a un plano P que pase por M y una simetría axial respecto a un eje r perpendicular a P y que pase por M.

Demostración:



Sean las ecuaciones de la recta y del plano de las simetrías:

r: $\vec{x} = \vec{m} + \lambda\vec{n}$

P: $\vec{n}.\vec{x} + d = (\vec{x} - \vec{m}).\vec{n} = 0$

y las ecuaciones vectoriales de los movimientos de simetría:

S. especular respecto del plano P:

$\vec{x}' = \vec{x} - 2.(\vec{n}.\vec{x} + d).\vec{n}$, o bien:

$\vec{x}' = \vec{x} - 2.((\vec{x} - \vec{m}).\vec{n}).\vec{n}$, que podemos expresar por:

$$\vec{x}' = \vec{x} - 2.(-\vec{m}\vec{n} + \vec{n}.\vec{x}).\vec{n}$$

Veamos ahora la ecuación vectorial de la simetría axial respecto de r:

$$\vec{x}' = -\vec{x} + 2.\vec{m} + 2\left((\vec{x} - \vec{m}).\vec{n}\right).\vec{n} = -\vec{x} + 2.\vec{m} + 2\left(-\vec{m}.\vec{n} + \vec{n}.\vec{x}\right).\vec{n}$$

Finalmente, la ecuación vectorial de la simetría central:

$$\vec{x}' = -\vec{x} + 2\vec{m}$$

Hagamos el producto de la simetría especular por la simetría axial:

$$\vec{x}' = \vec{x} - 2.(-\vec{m}\vec{n} + \vec{n}.\vec{x}).\vec{n}$$
$$\vec{x}'' = -\vec{x}' + 2.\vec{m} + 2\left(-\vec{m}.\vec{n} + \vec{n}.\vec{x}'\right).\vec{n}$$

$$\vec{x}'' = -\left(\vec{x} - 2.(-\vec{m}\vec{n} + \vec{n}.\vec{x}).\vec{n}\right) + 2\vec{m} + 2(-\vec{m}.\vec{n} + \vec{n}(\vec{x} - 2.(-\vec{m}\vec{n} + \vec{n}.\vec{x}).\vec{n})).\vec{n} =$$
$$= -\vec{x} - 2.(\vec{m}.\vec{n}).\vec{n} + 2.(\vec{n}.\vec{x}).\vec{n} + 2.\vec{m} - 2.(\vec{m}.\vec{n}).\vec{n} + 2.(\vec{n}.\vec{x}).\vec{n} + 4.(\vec{m}.\vec{n}).\vec{n} - 4.(\vec{n}.\vec{x}).\vec{n} = -\vec{x} + 2\vec{m}$$

resulta por tanto, la ecuación vectorial de la simetría central. Se obtiene fácilmente, repitiendo prácticamente lo anterior, el mismo resultado si hacemos el producto al revés, esto es, la simetría axial por la simetría especular.

Teorema 2.7.2:
Las simetrías centrales verifican las siguientes propiedades:

1) Son involuciones.
2) Invierten el sentido de las figuras.
3) Transforman rectas en rectas paralelas y planos en planos paralelos.
4) Conservan los ángulos.
5) Son isometrías.
6) Son invariantes en una simetría especular a) El punto que es centro de la simetría, b) las rectas y planos que pasen por el centro de simetría, las esferas centradas en el centro de simetría.
7) Dados dos puntos M y N, se verifica que el producto de las simetrías centrales respecto a ambos es una traslación de vector el doble del vector que definen los puntos M y N.

Demostración:

1) Es obvio, por el teorema 2.7.1 anterior, ya que tanto las simetrías axiales como las especulares son involuciones.
2) Al ser una simetría central producto de una especular por una axial, y sabiendo que las especulares invierten el sentido de las figuras pero no las simetrías axiales, el balance es que las simetrías axiales si invierten el sentido de las figuras.
3) Veamos la transformación de la recta r: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{n}$ en una simetría central:

$$\vec{x}' = 2\vec{m} - \vec{x} = 2\vec{m} - (\vec{a} + \lambda\vec{n}) = (2\vec{m} - \vec{a}) - \lambda\vec{n}$$

Análogamente, veamos como se transforma el plano P: $\vec{u}.\vec{x} + d = 0$:

$$\vec{x} = 2.\vec{m} - \vec{x}' \rightarrow \vec{u}.(2.\vec{m} - \vec{x}') + d = 0 \rightarrow u.\vec{x}' - (2\vec{u}.\vec{m} + d) = 0$$

4) Obvio, pues también conservan los ángulos las simetrías axiales y especulares.
5) Lo mismo, por la misma razón.
6) Resulta evidente, de la definición de simetría central.
7) Hallemos el simétrico de la composición de ambas simetrías respecto a N y a M, de vectores de posición respectivos $\vec{n}, \vec{m}$:

$$\vec{x}' = 2m - \vec{x}, \qquad \vec{x}'' = 2n - \vec{x}', \text{ sustituyendo: } \vec{x}'' = 2(\vec{n} - \vec{m}) + \vec{x}$$

2. 8. El grupo de los movimientos del espacio

Teorema 2.8.1:
El conjunto cuyos elementos son simetrías especulares o productos finitos de simetrías especulares, es un grupo, que denominamos Grupo de los Movimientos del Espacio E_3, $M(E_3)$, y cuyos elementos tienen la siguientes propiedades

1) Transforman rectas en rectas y planos en planos.
2) Conservan los ángulos.
3) Conservan las distancias (son Isometrías).
4) Cada movimiento del grupo conserva o invierte el sentido de las figuras según sea el producto de un número par o impar de simetrías especulares, respectivamente.

Demostración:

De los resultados obtenidos hasta aquí vemos que todos los movimientos se reducen a productos finitos de simetrías especulares:

a) Las traslaciones: teorema 2.1.2.
b) Los giros: teorema 2.3.1.
c) Las simetrías axiales: teorema 2.4.1.
d) Las simetrías centrales: teorema 2.7.1.

La estructura de grupo, por tanto, es evidente en el grupo de todos los movimientos del espacio. En todos se transforman rectas en rectas y planos en planos, se conservan los ángulos y las distancias, y solamente una simetría especular o un producto impar de simetrías especulares invierte el espacio.

Teorema 2.8.2:

1) El conjunto de los movimientos que conservan el sentido de las figuras coincide con el grupo MD de los movimientos directos.
2) Todo movimiento es o bien un movimiento helicoidal o bien el producto de un movimiento helicoidal por una simetría especular o viceversa.

Demostración:

1) El conjunto A de los movimientos que conservan el sentido de las figuras, esto es, que se pueden expresar como el producto de un número par de simetrías especulares

$$A = \left\{ \prod_{j=1}^{2n} S_{P_j} \,/\, n \in N \right\}$$

Sabemos que todo elemento de $MD(E_3)$ es un movimiento helicoidal (teorema 2.6.1.), por tanto es producto de dos simetrías axiales, o bien, de cuatro simetrías especulares. Entonces:

$$MD(E_3) \subseteq A$$

Por otra parte, todo elemento de A puede descomponerse en pares de simetrías especulares y sabemos que tal producto es, o bien un giro (teorema 2.3.1.), o bien una traslación (teorema 2.4.1.). Luego, todo elemento de A es producto de giros y traslaciones. De donde

$$A \subseteq MD(E_3)$$

En definitiva:

$$A = MD(E_3)$$

2) Los movimientos del grupo $M(E_3)$ de los movimientos del espacio son productos finitos de simetrías especulares

$$M(E_3) = \left\{ \prod_{k=1}^{n} S_{P_k} \,/\, n \in N \right\}$$

Si $n=2m$ (par) entonces $M(E_3) \subset MD(E_3)$ y será un movimiento helicoidal.

Si $n=2m+1$ (impar) entonces las 2m primeras simetrías constituyen un movimiento helicoidal, por lo que el total resulta que es un movimiento helicoidal por una simetría especular.

2.9. Consideraciones finales

Hemos visto hasta aquí el grupo de los movimientos en el espacio ordinario está constituido por simetrías (especulares, axiales, centrales), giros y traslaciones, todos ellos reducibles a un número par o impar de simetrías especulares.

Todos los movimientos convierten rectas en rectas y planos en planos, y solo los que son producto de un número impar de simetrías especulares invierten el espacio.

Todos ellos conservan los ángulos y las distancias.

Otras transformaciones en el espacio ordinario, como las homotecias, no conservan las distancias, es decir, no podemos catalogarlos como movimientos, puesto que al aplicarlos varían las dimensiones de las figuras.

Veamos a continuación, como ilustración de lo dicho, las propiedades básicas de las homotecias, que fueron definidas en el apartado 1.6 de estas notas.

Teorema 2.9.1:
Las homotecias presentan las propiedades siguientes:
1) Transforman rectas paralelas en planos paralelos.
2) Conservan los ángulos.
3) Cambian o conservan el sentido de las figuras según que la razón de homotecia sea negativa o positiva, respectivamente.
4) Multiplican las distancias por el módulo de la razón de homotecia.
5) Son invariantes en una homotecia, a) el centro M de la homotecia, b) los planos y rectas que pasen por M.
6)

Demostración:

1) Sea la recta de ecuación vectorial $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{v}$. Su imagen mediante una homotecia de centro M, de vector de posición $\vec{m}$, es:

$$\vec{x}' = \vec{m} + k(\vec{x} - \vec{m}) = \vec{m} + k\left(\vec{a} + \lambda\vec{v} - \vec{m}\right) = \left(\vec{m} + k(\vec{a} - \vec{m})\right) + k\lambda\vec{v}$$

que es una recta paralela a la anterior.

Sea el plano de ecuación vectorial $\vec{n}.\vec{x} + d = 0$. Sustituyamos

$$\vec{x}' = \vec{m} + k(\vec{x} - \vec{m}) \rightarrow \vec{x} = \vec{m} + \frac{\vec{x}' - \vec{m}}{k}$$ .Se tiene que

$$\vec{n}.\left(\vec{m} + \frac{\vec{x}' - \vec{m}}{k}\right) + d = 0 \rightarrow \vec{n}.\vec{x}' + \vec{n}.\vec{m}.(k-1) + kd = 0$$

que es un plano paralelo al anterior

2) Obviamente, se conservan los ángulos, pues se transforman rectas en rectas paralelas y planos en planos paralelos.

3) Si las imágenes de los puntos X,Y,Z,W son los puntos X’,Y’,Z’,W’, se tiene, usando vectores de posición:

$$\left[\vec{y}'-\vec{x}',\vec{z}'-\vec{x}',\vec{w}'-\vec{x}'\right]=k^3\left[\vec{y}-\vec{x},\vec{z}-\vec{x},\vec{w}-\vec{x}\right]$$

por lo que habrá cambio de sentido del espacio, es decir, inversión de figuras, si K<0, manteniéndose el mismo sentido de las figuras cuando la razón de homotecia, k, es positiva.

4) Si la imagen homotética del par de puntos (X,Y) es el par (X',Y'), entonces la distancia entre ambos, usando los correspondientes vectores de posición, verifica:

$$d(\vec{x}',\vec{y})=\left|\vec{y}'-\vec{x}'\right|=|k|\left|\vec{y}-\vec{x}\right|=|k|.d(\vec{x},\vec{y})$$

5) Evidente, por la definición.

Teorema 2.9.2:

1) El producto de dos homotecias de igual centro conmuta y es igual a otra homotecia del mismo centro y razón el producto de las razones.
2) El producto de dos homotecias de distinto centro y distinta razón es otra homotecia cuya razón es el producto de las razones.

Demostración:

1) Sean las homotecias de centro M y razones k_1 y k_2:

$$\vec{x}'=\vec{m}+k_1(\vec{x}-\vec{m})$$
$$\vec{x}''=\vec{m}+k_2(\vec{x}'-\vec{m})$$

Se tiene: $\vec{x}''=\vec{m}+k_2(\vec{x}'-\vec{m})=\vec{m}+k_2(\vec{m}+k_1(\vec{x}-m)-\vec{m})=\vec{m}+k_1k_2(\vec{x}-\vec{m})$

Que es una homotecia del mismo centro M y razón el producto de ambas razones. Es claro que conmutan:

$$\vec{x}''=\vec{m}+k_1(\vec{x}'-\vec{m})=\vec{m}+k_1(\vec{m}+k_2(\vec{x}-m)-\vec{m})=\vec{m}+k_1k_2(\vec{x}-\vec{m})$$

En definitiva, $H_{(M,k_1)}\circ H_{(M,k_2)}=H_{(M,k_2)}\circ H_{(M,k_1)}=H_{(M,k_1k_2)}$

2) Sea ahora las homotecias de centro M y N, y razones k_1 y k_2 respectivas:

$$\vec{x}'=\vec{m}+k_1(\vec{x}-\vec{m})$$
$$\vec{x}''=\vec{n}+k_2(\vec{x}'-\vec{n})$$

Se tiene:

$$\vec{x}''=\vec{n}+k_2(\vec{x}'-\vec{n})=\vec{m}+k_2(\vec{m}+k_1(\vec{x}-\vec{m})-\vec{n})=\vec{n}+k_2(\vec{m}-\vec{n})+k_1k_2(\vec{x}-\vec{m})$$

En definitiva: $\vec{x}''=\vec{n}+k_2(\vec{m}-\vec{n})+k_1k_2(\vec{x}-\vec{m})$ (a)

Para que sea una homotecia ha de tener una expresión de la forma:

$$\vec{x}''=\vec{q}+k_1k_2(\vec{x}-\vec{q})$$

por lo que identificando ambas expresiones, tendremos que ha de ser:

$$\vec{q} = \frac{\vec{n} + k_2(\vec{m} - \vec{n}) - k_1 k_2 \vec{m}}{1 - k_1 k_2}$$

que existe siempre que $k_1 k_2 \neq 1$.

Si fuera $k_1 k_2 = 1$, sustituyendo en la expresión de la composición de homotecias (a), se tiene:

$$\vec{x}" = \vec{n} + k_2(\vec{m} - \vec{n}) + (\vec{x} - \vec{m}) \to \vec{x}" = (1 - k_2)(\vec{n} - \vec{m}) + \vec{x}$$

que es una traslación de vector $\vec{d} = (1 - k_1).(\vec{n} - \vec{m})$

Por consiguiente, podemos afirmar que el producto de dos homotecias de distinto centro y distintas razones es

a) Una homotecia de distinto centro y razón el producto de ambas razones, si este producto es distinto de la unidad.
b) Una traslación, si el producto de ambas razones fuera la unidad.

El conjunto de las homotecias y traslaciones es cerrado, esto es, siempre el producto de homotecias es homotecia o traslación, el producto de traslaciones es traslación y el producto de homotecia por traslación es expresable como el producto de traslación por homotecia. Teniendo en cuenta que toda traslación puede expresarse como producto de simetrías especulares, se tiene así un grupo cuyos elementos son productos finitos de simetrías especulares u homotecias o ambas:

$$S(E_3) = \left\{ \prod_{j=1}^{n} \Phi_j \, / \, n \in N \right\}$$

Que se denomina Grupo de las Semejanzas del espacio ordinario.

Las semejanzas conservan los ángulos, obviamente, pues las homotecias y las traslaciones los conservan, como ya se ha visto antes, ya que transforman rectas en rectas y planos en planos.

Sin embargo, el grupo de las semejanzas no es conmutativo, pues el producto de una simetría especular por una homotecia no presenta conmutatividad:

$$H_{(r,k)} \circ S_P \neq S_P \circ H_{(r,k)} \quad \text{en general}$$

El grupo $M(E_3)$ de los movimientos en el espacio ordinario, cuyos elementos son productos finitos de simetrías especulares, queda, por tanto, contenido en el grupo de las semejanzas del espacio ordinario.

$$M(E_3) \subset S(E_3)$$

Por lo visto anteriormente, es inmediato que toda homotecia puede descomponerse en el producto de homotecias o de homotecia por traslación, esto es, de homotecia por un numero finito de simetrías especulares. Esto nos indica que en realidad las semejanzas son homotecias por movimientos del espacio ordinario.

El grupo $S(E_3)$ de las semejanzas del espacio ordinario está formado por la composición de homotecias con movimientos del espacio.

3. Bibliografía:

P. Puig Adam. "Curso de Geometría Métrica". Tomo I. Fundamentos. Gómez Puig Ediciones. Madrid. 1980.
C. Alsina, R. Pérez y C. Ruiz: Simetría Dinámica. Col. Matemáticas: Cultura y Aprendizaje. Vol. 13. Ed. Síntesis, Madrid, 1989.
T. L. Heath: The thirteen books of Euclid's Elements, Dover Publications, 1956.
A. V. Pogorélov: Geometría elemental, Editorial MIR, Moscú, 1974.
I. M. Yaglom: Geometric Transformations II, Mathematical Association of America, 1968.

Carlos S. Chinea
casanchi@terra.es