Los mosaicos de Penrose por poliominós

Pablo González Sequeiros

1. Introducción

Un *mosaico* o *teselación* del plano es una descomposición de éste en regiones llamadas *teselas*, que generalmente son polígonos dispuestos lado con lado. Estas teselas se obtienen por traslación (o en general empleando cualquier movimiento rígido) a partir de un conjunto de teselas modelo o *prototeselas*. El ejemplo sencillo en el que pensar es el de un mosaico del plano por polígonos regulares, construido a partir de una única prototesela.

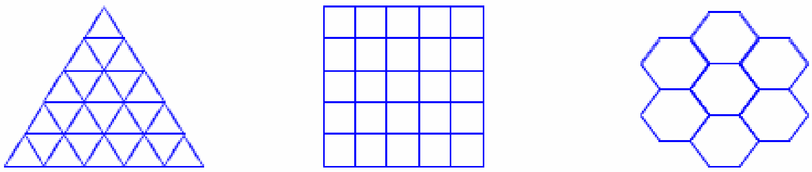

Figura 1. Mosaicos regulares por triángulos, cuadrados y hexágonos.

Para este tipo de mosaicos, no es difícil encontrar traslaciones que los conservan (todos ellos coinciden, por ejemplo, con sus trasladados por determinados vectores horizontales); se trata de mosaicos *periódicos*. Por el contrario, hay mosaicos que no coinciden con ninguno de sus trasladados, cualquiera que sea la traslación que se les aplique. Se denominan *aperiódicos* y del mismo modo se denominan aquellos conjuntos de prototeselas que fuerzan la aperiodicidad, es decir, aquellos con los cuales solamente se pueden construir mosaicos aperiódicos.

El interés matemático por este último tipo de mosaicos proviene de su aplicación en problemas computacionales (ver Wang). Wang buscaba un algoritmo que decidiese si un conjunto particular de teselas puede teselar el plano o no. Probó que la existencia de tal algoritmo equivale a la inexistencia de conjuntos aperiódicos de teselas. Conjeturó entonces que no existían tales conjuntos; pero en 1966 su alumno R. Berger encontró un contraejemplo con 20.426 prototeselas. Con el tiempo se irían descubriendo nuevos e interesantes conjuntos aperiódicos (ver [3]).

En la actualidad, los mosaicos aperiódicos son relevantes en el estudio de cierto tipo de aleaciones metálicas denominadas *cuasi-cristales*, pues constituyen un modelo para los patrones de difracción de éstos.

Por otra parte, los poliominós (del inglés *polyomino*, denominación empleada en primera ocasión por S.W. Golomb en [2]) son figuras compuestas por cuadrados congruentes pegados lado con lado, de manera que llamamos *monominó* al compuesto por un cuadrado, *dominó* a uno formado por dos, y así sucesivamente hablamos de *triominó*, *tetrominó*, *pentominó*, etc.[1] En relación con los mosaicos, es importante apreciar que no todo conjunto de poliominós tesela el plano, es decir, no se puede recubrir éste a partir de un conjunto arbitrario de poliominós.

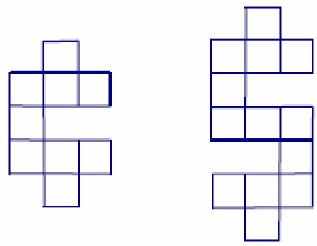

Figura 2. Ejemplo de un conjunto de poliominós que no tesela el plano [1].

2. Los poliominós de Penrose

En [5], R. Penrose aborda la complicada tarea de la comprensión científica de la mente humana. Su primer propósito (al que dedica la primera parte de la obra) es mostrar que *"mediante el uso de nuestra consciencia estamos capacitados para ejecutar acciones que están más allá de cualquier tipo de actividad computacional"*, contradiciendo así la corriente que sostiene que *"nuestra mentalidad consciente podría ser completamente entendida en términos de modelos computacionales"*, como si de un ordenador se tratara. A lo largo de su argumento, como un caso de problema matemático no computacional, prueba que *"existen modelos de universo completamente deterministas, con reglas precisas de evolución, que son imposibles de simular computacionalmente"*. Su idea es considerar un *universo de juguete* que evoluciona en tiempo discreto (t =1, 2, 3…), de manera que en el instante n el modelo estará determinado en función de un problema equivalente al problema de Wang, y como hemos dicho se sabe que no existe un algoritmo para resolverlo. En concreto, los diferentes estados de este universo vienen dados en función de posibles conjuntos finitos de poliominós numerados, $S(n)$, de manera que el estado del universo de juguete en el instante n en tiempo t, pasará al instante n+1 en tiempo t+1 si el conjunto de poliominós $S(n)$ tesela el plano, o a n+2 en caso contrario. Es en la descripción de este caso donde presenta a modo de ejemplo un conjunto de tres poliominós ideados a partir de un conjunto aperiódico de teselas descrito por R. Ammann (véase [3], página 555).

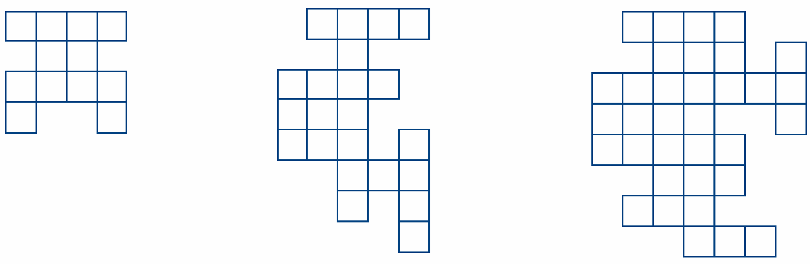

Figura 3. Los tres poliominós de Penrose, a los que nos referiremos por A, B y C.

En [4] mostramos un procedimiento que permite construir y codificar todos los mosaicos que se pueden elaborar a partir de estos tres poliominós, al estilo de la descripción hecha por R. Robinson para los mosaicos de Penrose por dardos y cometas (que puede verse en [3]).

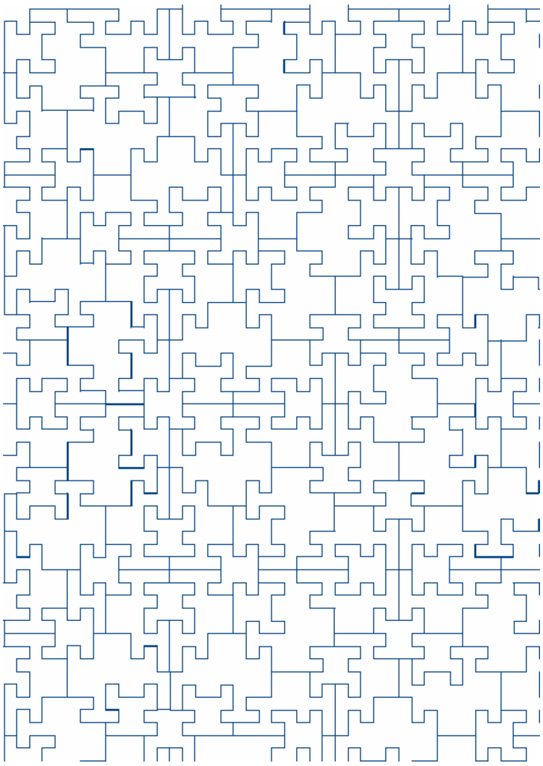

Figura 4. Mosaico de Penrose por poliominós.

3. Construcción de los mosaicos de Penrose por poliominós

En primer lugar, es preciso aclarar que si pretendemos teselar el plano empleando únicamente traslaciones (sin necesidad de giros y simetrías), el conjunto aperiódico a considerar estará compuesto por 20 prototeselas: las de la Figura 3, junto con sus imágenes por una simetría y las imágenes por los giros de 90º, 180º y 270º de todas ellas. Por otra parte, las teselas de tipo A van a actuar únicamente a modo de "grapa", pues cualquier mosaico estará determinado por la disposición de las de tipo B y C. En este sentido, podemos decir que el conjunto de teselas se reduce a las de tipo B y C.

La característica fundamental de este conjunto de teselas reside en que al combinarlas para teselar el plano (sea cual sea la forma en que esto se haga) se conforman dos motivos, que llamaremos *teselas infladas*, que constituyen con las de tipo A un conjunto de prototeselas equivalente al de partida. Es decir, si consideramos estos dos motivos como teselas y los substituimos por B y C, el nuevo conjunto tiene las mismas propiedades y está sujeto a idénticas reglas de combinación que el de las tres teselas iniciales. Dicho de otro modo, podríamos substituir un conjunto por otro y seguiríamos obteniendo los mismos mosaicos.

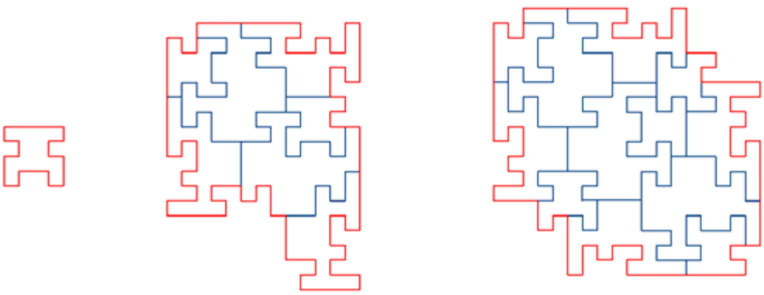

Figura 5. Los poliominós inflados, equivalentes a A, B y C.

Del mismo modo, los poliominós inflados se combinan de manera recurrente, obteniéndose nuevas teselas infladas (hablaríamos de las teselas infladas de la segunda etapa) que contienen a las anteriores y que constituyen nuevamente un conjunto de prototeselas equivalente a éstas, y por lo tanto equivalente a los poliominós iniciales.

Por recurrencia, cualquier mosaico de Penrose por poliominós se puede construir por medio de este proceso de *inflación*. Para ello empezaríamos colocando en el origen del plano una tesela de tipo B o C y a continuación la iríamos *inflando* para cubrir el plano. De esta manera el mosaico estará determinado por la elección que hagamos en cada etapa de la siguiente tesela inflada (es decir, de la posición que ocupa la n-ésima tesela inflada con relación a la siguiente). Por ejemplo, si elegimos comenzar por una tesela de tipo C, la siguiente tesela inflada puede seguir siendo de tipo C o podría ser de tipo B. Teniendo en cuenta como son los poliominós inflados (véase la Figura 5), en el primer caso tenemos dos posibilidades para *inflar*, en función de cuál va a ser la colocación de la primera tesela en relación a la segunda, mientras que en segundo tendríamos tres. De este tipo sería la casuística que tendríamos en cada etapa.

4. Codificación de los mosaicos de Penrose por poliominós

Por otro lado, esta construcción nos permite además *codificar* los mosaicos, es decir, enumerar todos los posibles por medio de un listado, o lo que es lo mismo, identificar o nombrar cada uno de ellos con una etiqueta. La idea entonces es asignar a cada mosaico de Penrose por poliominós una etiqueta o código (que va a ser en este caso una sucesión de 0's y 1's) en función de cómo ha sido construido:

1. El código comenzará con un 0 si la tesela en la que está centrado (la que contiene al origen del plano) es de tipo C, o un 1 si es de tipo B.
2. El siguiente fragmento de código indica cómo está incluida esta tesela en la tesela inflada que la contiene según el siguiente esquema:

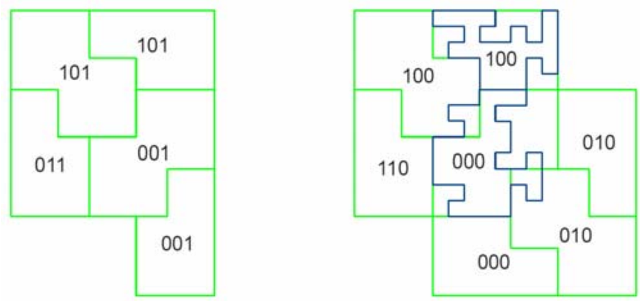

Figura 6.

Nótese que la tercera de las entradas de cada uno de estos *minicódigos* indica si la próxima tesela inflada será de tipo B o C. Obsérvese además que, en el caso del esquema de tipo C, no hay ambigüedad posible si tomamos como referencia la orientación de la pieza central, pues ni los poliominós inflados ni los de partida presentan simetrías.

3. Como el proceso es recurrente, el mismo esquema permite indicar cómo se incluye la n-ésima tesela inflada en la (n+1)-ésima que la contiene.

De esta manera, el conjunto de los mosaicos de Penrose por poliominós está codificado mediante sucesiones binarias $\{x_n\}$ sometidas a las siguientes restricciones:

$$x_{3n} = 1 \Rightarrow x_{3n+1}x_{3n+2}x_{3n+3} \neq 111$$

$$x_{3n} = 0 \Rightarrow x_{3n+1}x_{3n+2}x_{3n+3} \neq \begin{cases} 111 \\ 011 \\ 110 \end{cases}$$

En otros términos, una sucesión de este tipo determina un mosaico de Penrose por poliominós obtenido como unión de una sucesión creciente de motivos. Además, el cambio de ciertos códigos al inicio de la sucesión se traduce en el cambio de origen en el mosaico.

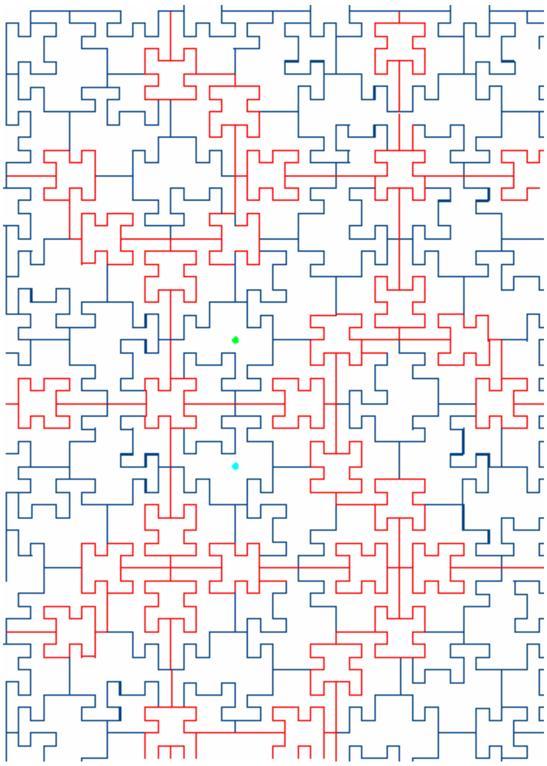

Figura 7. Detalle de la primera inflación. Obsérvese que los códigos de los mosaicos centrados en los puntos azul y verde comenzarían, respectivamente, por 0101000 y 0010000.

Referencias

[1] ^ F. Ardila, R.P. Stanley: Tilings. [Disponible en *arXiv:math/0501170v3*].

[2] ^ S.W. Golomb: Checker Boards and Polyominoes. *Amer. Math. Monthly* 61 (1954), 675-682.

[3] a b c B. Grünbaum, G.C. Shephard: *Tilings and Patterns*. W.H. Freeman & Co., New York, 1987.

[4] ^ P. González Sequeiros: *A dinámica dos mosaicos euclideanos*. Publicaciones del Departamento de Geometría y Topología USC, 111 (2007).[Disponible en http://mat.uab.es/~ret/contenido/DEA_pgs.pdf].

[5] ^ R. Penrose: *Las sombras de la mente*. Editorial Crítica, Barcelona, 1996.

---

[1] En contra de lo que algunos parecen pensar, la palabra *dominó* (del francés *domino*, que vendría del verbo *dominare* o del sustantivo *dominus*) carece de prefijo. Por eso, lo habitual en la literatura anglosajona es usar el juego de palabras *polyomino.* En coherencia con lo uno y lo otro, las denominaciones correctas de los diferentes poliominós serían: *monominó*, *dominó*, *triominó, tetr(a)ominó, pent(a)ominó, hex(a)ominó,...*

Pablo González Sequeiros
pablo.gonzalez.sequeiros@usc.es