Mapas iterativos y caos. La invariancia de escala

Joaquín GONZÁLEZ ÁLVAREZ

Mapas Iterativos y Caos
El tratamiento de los sistemas dinámicos que varían continuamente con el tiempo, suele efectuarse a base de ecuaciones como:

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$
$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

sin embargo los sistemas dinámicos de variación discreta es posible resolverlos mediante mapas iterativos del tipo:

$$x_n + 1 = f(x_n)$$

los cuales se procesan como su nombre sugiere, comenzando con sustituir el valor de la variable en el segundo miembro (variable independiente) y el resultado de la operación tomarlo como nuevo valor de la variable independiente e ir reiterando el proceso el número de veces que sea necesario.

Un primer ejemplo de utilización de mapas iterativos, lo haremos con uno mediante el cual puede calcularse la raíz cuadrada de 2 con el número de cifras decimales que deseemos. El mapa en cuestión tiene la siguiente forma:

$$x_n + 1 = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$

Antes de comenzar el proceso, vamos a justificar el uso de dicho mapa para calcular $\sqrt{2}$.

Comenzamos por plantear una ecuación que tiene la misma forma que la del mapa pero sin subíndices:

$$x + 1 = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

la cual mediante pasos muy sencillos podemos transformar en la igualdad: $x = \sqrt{2}$ que nos justifica que la iteración del mapa antes presentado nos dará la raíz cuadrada de 2 con el número de cifras decimales que queramos.

Comencemos la iteración dando a la variable en el segundo miembro (variable independiente) el valor 1. El resultado es 1.5. Como antes indicamos, ese será el nuevo valor de la variable independiente y ahora el resultado será 1.4166....,. Se continuará la iteración y ya en la número 11 se tendrá el valor 1.4142....que es la aproximación que suele tomarse por lo general como valor de $\sqrt{2}$.

No obstante, el ejemplo que acabamos de ver no es del tipo mas utilizado como lo son los que se aplican al tratamiento de sistemas dinámicos de la física, la química, la biología, las ciencias sociales, la economía y otras especialidades.

Ejemplo paradigmático de mapa iterativo aplicado a sistemas dinámicos lo es sin dudas el mapa logístico, no sólo por su importancia práctica sino y sobre todo, por sus excepcionales y sorprendentes propiedades.

El mapa logístico tiene la siguiente expresión:

$$x_n + 1 = k.x_n(1 - x_n)$$

y se aplica principalmente a problemas de crecimiento poblacional de especies animales o de semejante índole.

Por x_{n+1} (variable dependiente) se representa la población en la etapa o generación n+1 de la especie que se trate, con x_n (variable independiente) se simboliza la población en la etapa n y con k la tasa de crecimiento que dependerá de las condiciones ambientales, climáticas, alimentarias, etc.

Veamos un ejemplo: Sea el caso en el cual se quiere investigar la población en millares de ejemplares, en las etapas que van a seguir (variable dependiente) conociendo la población en cada etapa anterior (variable independiente) y la tasa de crecimiento. Tomemos como valor inicial de la variable independiente 0.8 (quiere decir 0.8 millares de ejemplares), con una tasa de crecimiento de 2. Comenzamos la iteración en el mapa logístico. La primera da 0.32, la segunda 0.435, la tercera 0.5 y al tratar de seguir la iteración nos encontramos que continuará dando 0.5. Vemos aquí una de los sorprendentes hallazgos que se presentan en el mapa logístico y otros similares: la llegada a un valor estacionario, fijo o atractor como suele llamársele, el cual se caracteriza por ser igual para la variable independiente y para la variable dependiente, significando en la práctica que la población se mantiene invariable.

Si se va aumentando el valor de k se llega a uno en el cual los atractores serán dos, y así se va llegando a valores de k en los cuales comienza a duplicarse el número de atractores o ciclo de atractores. Por ejemplo al llegar k a 3,5 el ciclo será de cuatro atractores porque el anterior (que no hemos efectuado aquí) fue el de dos.

La separación o distancia entre los puntos (valores de k), de duplicación del ciclo se va haciendo cada vez menor, pero la relacón entre la distancia de separación entre dos ciclos consecutivos y la distancia análoga anterior, se mantiene constante. Esta es otra de las interesantes propiedades que presentan mapas iterativos como el logístico y que fue descubierta por Mitchell Feigenbaum por lo que en su honor dicha constante se denomina Constante de Feigenbaum.

El descubrimiento de Feigenbaum constituyó un hecho trascendental en la historia de las matemáticas y la constante que lleva su nombre alcanza una importancia similar a la de otras como π.

Singular importancia presenta el gráfico que resulta de tomar en el eje de abscisas los valores de k en cada punto de bifurcación y en el de ordenadas los valores de los atractores. De esta manera a la abscisa k=2, le corresponderá, como vimos, la ordenada 0.5. A partir del punto (2,0.5) se traza una línea paralela al eje de abscisas hasta llegar al punto de comienzo del ciclo de dos atractores. A cada uno de estos dos atractores se le hace corresponder una línea paralela al eje de abscisas que llegarán hasta el punto de la siguiente bifurcación. Se habrá conformado hasta ahí en el gráfico, la figura de una horquilla o Y paralela al eje de abscisas. Al llegar al valor de k de la siguiente duplicación, cada rama de la horquilla se bifurcará, y así sucesivamente se irán formando horquillas cada vez mas pequeñas y por el hallazgo de Feigenbaum, mas cercanas entre si.

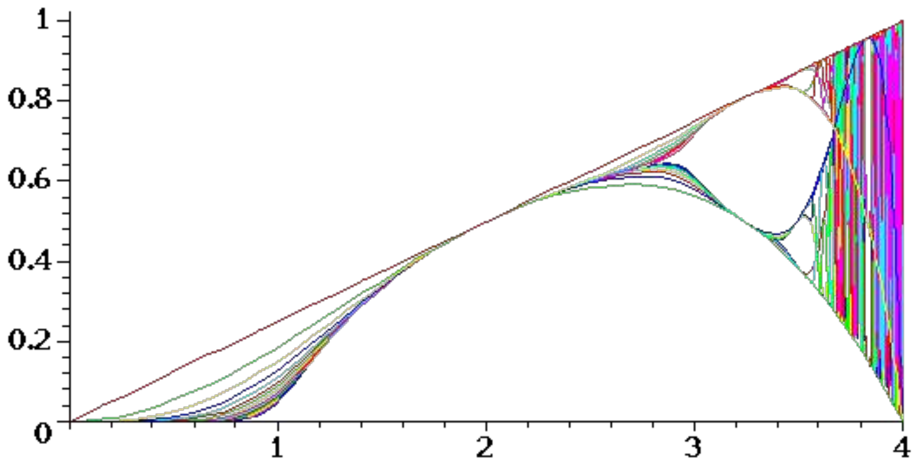


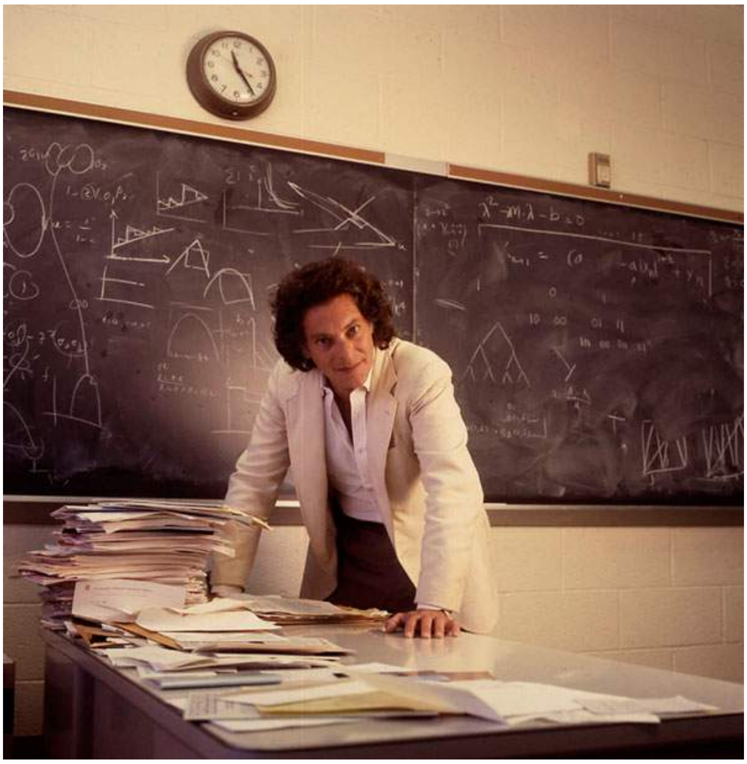
Diagrama de Feigenbaum

Al fijarnos en ese gráfico llamado Diagrama de Feigenbaum, nos damos cuenta de una mas de las sorprendentes propiedades de los mapas iterativos: la condición de fractal del gráfico y por ende del proceso de evolución iterativa de los procesos que los mapas representan. Es por esto último que tan relacionadas están las Teorías de los Fractales y del Caos del cual pasamos a tratar a continuación.

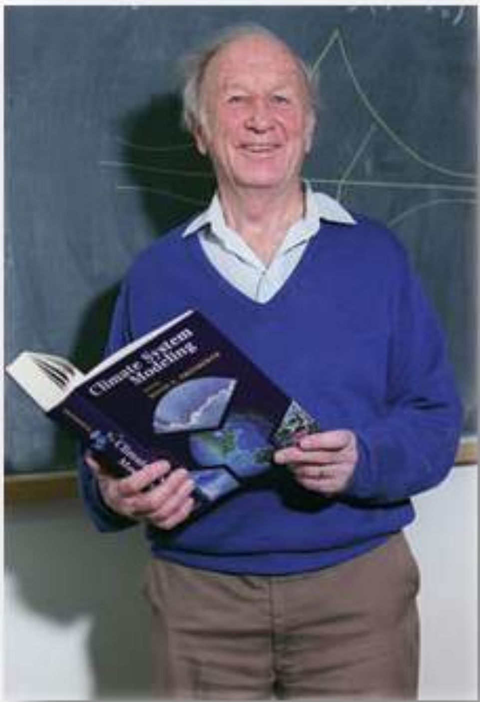
En efecto, al llegar k a un valor muy cercano a 4, ya no se presentan repeticiones, ciclos de atractores, el proceso ha perdido periodicidad y aparece también el hecho de que muy pequeñas variaciones del valor inicial de la variable independiente, genera notables variaciones de los valores que se obtienen. Esta situación de no periodicidad y gran sensibilidad a las variaciones de las condiciones iniciales constituye lo que ha dado en llamarse caos.

La fractalidad es decir, la aparición de orden en el aparente absoluto desorden del caos, no sólo se presenta en la ruta hacia el caos antes vista, sino también a las puertas del caos (muy próximo a k=4) y ya en plena situación de caos. En las cercanías del comienzo del caos, si los valores de los atractores se situaran como puntos en un eje de abscisas (o de ordenadas), quedarían dispuestos de tal forma que remedarían el fractal llamado Conjunto de Cantor el cual se construye a partir de un segmento de recta que se divide en tres partes iguales, se suprime la del centro y se sigue iterando este proceso en cada uno de los segmentos que van apareciento hasta que éstos semejan puntos. De nuevo en pleno caos aparecerá el fractal de Cantor en una configuración llamada atractor extraño que surge de la representación gráfica de las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales que aparecen en el primer párrafo de este trabajo, aplicadas a la situación de caos.

La aparición y desarrollo de la Teoría del Caos a mediados del pasado siglo XX, se debe a los trabajos del climatólogo Edward Lorenz. El comienzo de las investigaciones de Lorenz, fueron motivadas al notar que las predicciones del tiempo a partir de ciertos datos con determinado número de cifras decimales, diferían notablemente de las que se hacían tomando un número ligeramente mayor de éstas.

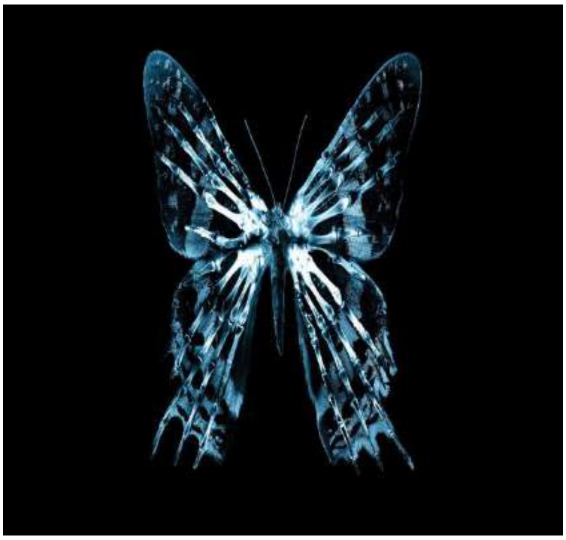


Mitchell Feigenbaum



Edward Norton Lorenz
(1917–2008)

Se ha popularizado sobre el caos, una metáfora, en nuestra opinión no muy adecuada, en la cual se expresa que "el leve aleteo de una mariposa en San Francisco puede sr capaz de provocar un huracán en Beiguin" (o algo por el estilo), la cual ha motivado que al caoa suela llamársele "Efecto Mariposa". El caso es que la Teoría del Caos ha pasado a constituir uno de los paradigmas de la ciencia de nuestros días.



Bibliografía

Peiten-Jurgens. Chaos and Fractals.
Strogatz. Nonlinear Dynamics and Chaos.
Zill. Differential Equations.

La Invariancia de Escala

Resumen
Se muestra un acercamiento al concepto de Invarianza de Escala, una propiedad que presentan los sistemas complejos en la cercanía de los puntos criticos o de transiciones de fase de segundo orden, característica frecuentemente olvidada en la literatura al respecto.

Abstract
An approach to the Scale Invariance, a feature of the complex systems in the neighborhood of critical points of second order phase transition, a frequently forgotten subject, is shown in the present paper.

Introducción
En los artículos, monografías, libros, etc. que tratan la Teoría de la Complejidad, aparecen como características definitorias de los Sistemas Complejos, la aparición de Propiedades Emergentes, esto es, las que surgen en el colectivo pero no

presentadas por los componentes aislados, así como la longitud en bits del programa informático correspondiente entre otras de menor peso. Sin embargo no suele hacerse alusión a una propiedad muy importante de dichos sistemas que se presentan en la cercanía de los puntos críticos o de transición de fase. Esa propiedad es la de Invariancia de Escala y para tener idea de en que consiste, tendremos que referirnos a las teorías del Fractal y de la Renormalización, así como al concepto de autosemejanza.

Desarrollo

Aunque fractales encontramos en la naturaleza y son los que nos van a interesar en lo que sigue, el concepto de Fractal es esencialmente geométrico. El Fractal es un ente geométrico el cual en su desarrollo espacial va repitiendo una misma forma, esto es, se repite autosemejantemente, y esto se realiza a una escala cada vez menor. Tal proceso permite que un "zoom" de una pequeña parte del fractal reproduzca la forma total del mismo. De manera que la forma reiterada va teniendo menor tamaño, pero hay algo que se mantiene constante y es la Dimensión Fractal o Dimensión de Hausdorff, la cual en los fractales es fraccionaria.

Ejemplos de fractales en la naturaleza lo constituyen las costas de los territorios. Una costa, vista desde muy alto, se muestra como una curva suave, pero en un acercamiento o zoom,, nos mostrará su compleja estructura fractal. La propiedad de autosemejanza permitirá observar a distintas escalas propiedades del objeto observado percibibles a determinada escala que en otras no lo son. La técnica para utilizar la autosemejanza para advertir propiedades a determinada escala que a otra no lo podemos hacer, se basa en la muy importante y no muy fácil de asimilar (ver Feynman 1988), Teoría de la Renormalización debida a Kenneth Wilson la que esencialmente se basa en la Invariancia de la Escala a la cual implícitamente ya hicimos mención al referirnos a la permanencia de la Dimensión Fractal en la iteración de la forma fundamental.

Como ya adelantamos, la Invarianza de la Escala se presenta como propiedad de los Sistemas Complejos en la proximidad de los puntos críticos o de transición de fase. Para explicar lo expuesto, tomaremos como ejemplo el proceso del sistema dinámico no lineal del crecimiento poblacional de una especie animal conociendo el número x de ejemplares en un momento dado y el valor r de la tasa de crecimiento, el cual irá variando de acuerdo a las condiciones que influyen sobre el proceso. El proceso se modela matemáticamente mediante un mapa iterativo conocido como Mapa Logístico, el cual lo presentamos así: $f=rx(1-x)$ donde f es el número de ejemplares que seguirá en la siguiente iteración a la que correspondió un número x de ejemplares de la especie animal en cuestión. Un valor de x tal que $x=f$, corresponde a lo que se denomina un punto fijo y si además se cumple que para un valor de r, $\partial f/\partial x=0$ donde x es la del punto fijo, a dicho punto se le llama superestable y el correspondiente valor de r se designa por Rn donde n es el número de renormalizaciones que se efectúen como explicaremos mas adelante.

Con un ejemplo numérico mostraremos como se emplea el mapa iterativo para seguir la evolución cuantitativa de una población. Si el número de ejemplares al inicio es de x= 0.8 millares y la tasa de crecimiento es de r=2, ponemos estos valores en el mapa obteniendo f=0.32. Este será la nueva x, la ponemos en el mapa y dará f=0.44. con esta nueva x volvemos al mapa y da 0.5. Tratamos de seguir iterando y nos vuelve a dar 0.5 y eso se repetiría claro está, eternamente. Indica que el crecimiento se ha estacionado en 0.5 millares de ejemplares. A un valor estacionario como 0.5 se le llama atractor. Si la tasa de crecimiento se hace igual a 3 y comenzamos la iteración con 0.699 millares y comenzamos a iterar nos dará primero 0.63. Al continuar nos vuelve a dar 0.699 y así, nos encontramos con dos atractores o ciclo de dos atractores. En realidad el atractor es el ciclo pero en aras de la brevedad suele llamársele atractores a sus componentes también.. Con una tasa de 3.4, al iterar nos encontraremos con un ciclo de cuatro atractores. Al aumentar la tasa a 3.5, el ciclo será de ocho atractores. De esta forma para ciertos valores de la tasa, el ciclo se irá duplicando. Para valores de la tasa de crecimiento 4 en adelante, se pierde toda periodicidad, no se producirán mas atractores, se habrá llegado a lo que se conoce como Caos. El valor de aproximadamente 4 para r marcará un punto crítico en el proceso que hemos analizado, un punto crítico, una transición de fase de segundo orden lejos del equilibrio, comparable al paso de un material de ser paramagnético a ferromagnético.

Para comprender mejor la Invariancia de la Escala en las condiciones expuestas para los Sistemas Complejos, lo cual es el tema que nos ocupa, necesitamos referirnos a un famoso diagrama perfeccionado por Mitchel Feigenbaum basado en la idea de Robert May. En el eje horizontal del diagrama se sitúan los valores de la tasa r para los cuales se producen las duplicaciones de ciclos. Esos valores de r toman el nombre de puntos de bifurcación. Se sitúan en el eje vertical del diagrama los valores x de la población a los cuales, cuando se necesite destacarlos, les corresponderá una línea horizontal que en el primer punto de bifurcación se desdoblará en dos, semejando una horquilla en la cual a cada rama le corresponderá un valor resultado de la iteración que le dio lugar. Así en el ejemplo anterior al valor de x=0.8 le corresponderá una línea horizontal (tronco de la horquilla) que al llegar al punto de bifurcación de abscisa r=3 se desdoblará en dos valores (ramas de la horquilla): 0.699 y 0.63, Esas ramas se prolongarán hasta el punto de bifurcación r=3.4, y cada una de ellas se prolongará hasta el puno de bifurcación r=3.5 y cada una de las cuatro ramas se bifurcarán y así seguirá un proceso de bifurcaciones que evidencia aumento en la medida de la Complejidad según se vaya acercando a r=4 en la frontera del Caos, dando lugar a la figura que en las publicaciones ilustran al Diagrama de Feigenbaum y que ha pasado a constituir un icono de la Teoría del Caos.

La frontera del Caos (r algo mayor que 4), constituye lo que hemos estado llamando punto crítico donde ocurre algo similar a una transición de fase no equilibrada. En la ruta hacia el Caos y a las puertas del mismo, se manifiesta un desarrollo de autosemejanza a escala constante (Invarianza de la Escala) de reducción que nos muestra un comportamiento fractal.

El fenómeno de périodicidad descrito, motivó a Mitchel Feigenbaum para buscar una matematización del proceso en cuestión. La "imagen" que se reitera en el proceso fractal en la ruta hacia el Caos, la conforma la horquilla. En su periodicidad encontró Feigenbaum dos relaciones invariantes. Una de ellas entre las distancias de cada punto de bifurcación con el que le antecedente y al que le sigue. La otra relación es entre la separación de las ramas de cada horquilla con esa separación en las horquillas que le siguen.

Para el tema que nos ocupa, esa relación entre separación de ramas de las horquillas es la que nos interesa. Feigenbaum encontró que para un número muy grande de iteraciones (gran acercamiento entre las r de bifurcación), esa relación a la cual llamó α, tiende a un valor cada vez mas próximo a 2.5029. Este valor constituye la escala de reducción invariante y ha venido a constituir una constante universal de la misma índole que π.

En lo anterior hemos recalcado lo muy grande del número de iteraciones para tomar cuenta de la existencia del factor de escala de reducción α, pudiera decirse factor de aproximación de las ramas. Sólo en esa gran aproximación imposible materialmente de observar pudo Feigenbaum demostrar la existencia de α y para ello se valió del ya citado recurso de la renormalización, reduciendo matemáticamente una iteración observable mediante el escalado $x \to x/\alpha$.

Si se designa por $f(x,r)$ la Ecuación Logística para cierto valor de x y por f2 la iteración de f que inicia la bifurcación, se cumplirá la siguiente igualdad: $f(x,R_0) = \alpha f^2(x/\alpha, R_1)$ para una primera normalización, y para n normalizaciones se cumplirá: $f(x,R_0) = \alpha^n f^{2n}(x/\alpha^n, R_n)$ que será una función universal, entendiéndose por ello que es independiente de la f original, la cual a las puertas del Caos sobrevive en función de x/α^n y así con n tendiendo a infinito. Esto es, a las puertas del Caos, se tiene: $g(x) = \alpha^n f^{2n}(x/\alpha^n, R_{n+1}) = \alpha g^2(x/\alpha)$ para n tendiendo a infinito (gran acercamiento entre las r de bifurcación), igualdad que se cumplirá si $\alpha = -2.5029$ para los valores de r a las puertas del Caos, constante que Feingenbaum calculó y demostró mediante la Teoría de la Renormalización.

Conclusiones

La propiedad de los Sistemas Complejos que hemos expuesto, la Invarianza de Escalado, no obstante su importancia, es un tema poco tratado en la literatura de divulgación de la Teoría de la Complejidad, y esto se debe en gran parte a la necesidad de utilizar la matemática para su explicación, lo cual significa un obstáculo para quienes se han acercado a tan importante teoría de interés multidisciplinario, sin poseer una formación académica en matemáticas. Dada la posibilidad, que mucho nos agradaría de que lo aquí expuesto sea utilizado también por quienes no cuentan con el suficiente background, e intentando atenuar en lo posible dicha dificultad, hemos preparado este trabajo utilizando una matemática muy elemental que pretende estar didácticamente dosificada

Bibliografía

Feynman, R. 1988. The Strange Theory of Light and Matter. Princeton University Press. Princeton.

Gleick, J. 1988. Caos. Pinguin Books. New York.

Peitgen, H. 2004. Chaos and Fractals. Springer. New York.

Strogatz, S. 2000. Non Linear Dynamics and Chaos. Perseus Books Publishing. Cambridge.

Joaquín GONZÁLEZ ÁLVAREZ

j.gonzalez.a@hotmail.com