Acerca de las matrices elementales y sus inversas

Matriz permutación:
Se denomina matriz permutación a una matriz cuadrada en la que en cada fila y columna hay un único elemento distinto de cero e igual a la unidad.
Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz elemental de primer género:
Una matriz elemental de primer género es un tipo especial de matriz cuadrada diagonal en la que todos los elementos de la diagonal principal son 1 excepto el de lugar i-ésimo, que es un número real $a \neq 0$. La representaremos por $D_i(a)$.
Ejemplos:

$$D_1(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ D_2(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$$D_1(5) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ D_2(-3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ D_3(\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \ldots$$

La matriz inversa de una matriz elemental de primer genero es también una matriz elemental de primer genero, donde el elemento i-ésimo de la inversa es el inverso del elemento i-ésimo de la matriz original. Es decir, $D_i(a)^{-1} = D_i(a^{-1})$.
Así, por ejemplo, en las matrices de orden 3: $D_2(a)^{-1} = D_2(a^{-1})$, pues

$$D_2(a).D_2(a^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a.a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Producto de una matriz elemental de primer género $D_i(a)$ por una matriz A cualquiera del mismo orden:
El resultado $D_i(a).A$ es una matriz que tiene las mismas filas de la matriz A salvo la i-ésima, que estará multiplicada por a. Si es el producto inverso, $A.D_i(a)$, será la columna i-ésima la que quede multiplicada por a.
Así, veamos un ejemplo:

$$D_2(-3).A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-3&0\\0&0&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}p_1&p_2&p_3\\q_1&q_2&q_3\\r_1&r_2&r_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_1&p_2&p_3\\-3.q_1&-3.q_2&-3.q_3\\r_1&r_2&r_3\end{pmatrix}$$

$$A.D_2(-3)=\begin{pmatrix}p_1&p_2&p_3\\q_1&q_2&q_3\\r_1&r_2&r_3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-3&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_1&-3.p_2&p_3\\q_1&-3.q_2&q_3\\r_1&-3.r_2&r_3\end{pmatrix}$$

Matriz elemental de segundo género:

Matriz elemental de segundo género P_{ij} es un tipo especial de matriz permutación. Es una matriz cuadrada cuyos elementos de la diagonal principal son iguales a la unidad, salvo los a_{ii} y a_{jj} que son cero, siendo $a_{ij}=a_{ji}=1$. Los demás elementos son todos nulos.

Ejemplos:

- De orden 3:

$$P_{23}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\ P_{13}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

- De orden 4:

$$P_{23}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ P_{12}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Estas matrices son inversibles y siempre la inversa coincide con la matriz original. Es decir, $P_{ij}^{-1}=P_{ij}$. Veamos dos ejemplos:

$$P_{23}.P_{23}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\rightarrow P_{23}^{-1}=P_{23}$$

$$P_{12}.P_{12}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\rightarrow P_{12}^{-1}=P_{12}$$

Producto de una matriz elemental de segundo género P_{ij} por una matriz A cualquiera del mismo orden:

El resultado $P_{ij}.A$ es una matriz que tiene las mismas filas de la matriz A salvo la i-ésima, y la j-sima, que aparecen intercambiadas. Si es el producto inverso, $A.P_{ij}$, serán las columnas i-ésima y j-sima las que aparezcan intercambiadas.

Ejemplos:

$$P_{12}.A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}p_1&p_2&p_3\\q_1&q_2&q_3\\r_1&r_2&r_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}q_1&q_2&q_3\\p_1&p_2&p_3\\r_1&r_2&r_3\end{pmatrix}$$

$$A.P_{12}=\begin{pmatrix}p_1&p_2&p_3\\q_1&q_2&q_3\\r_1&r_2&r_3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.=\begin{pmatrix}p_2&p_1&p_3\\q_2&q_1&q_3\\r_2&r_1&r_3\end{pmatrix}$$

Matriz elemental de tercer género:

Matriz elemental de tercer género $S_{ij}(a)$ es una matriz cuadrada en la que todos los elementos de la diagonal principal son la unidad, mientras que el resto de los elementos son nulos salvo el elemento a_{ij}, que es a.

Ejemplos:

- De orden 3:

$$S_{23}(\sqrt{2})=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\sqrt{2}\\0&0&1\end{pmatrix}, S_{13}(1/3)=\begin{pmatrix}1&0&1/3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

- De orden 4:

$$S_{13}(a)=\begin{pmatrix}1&0&a&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad S_{24}(-1)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

La matriz inversa de una matriz elemental de tercer género $S_{ij}(a)$ es también una matriz elemental de tercer género, en la que solamente cambia el signo del elemento a. O sea, $S_{ij}(a)^{-1}=S_{ij}(-a)$.

Ejemplo:

$$S_{23}(a).S_{23}(-a)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&a\\0&0&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-a\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\rightarrow S_{23}(a)^{-1}=S_{23}(-a)$$

Producto de una matriz elemental de tercer género $S_{ij}(a)$ por una matriz A cualquiera del mismo orden:

El resultado $S_{ij}(a).A$ es una matriz que tiene las mismas filas de la matriz A salvo la i-ésima que se sustituye por la suma de dicha fila i-esima con el producto de a por la fila j-sima.

El resultado $A.S_{ij}(a)$ es una matriz que tiene las mismas columnas de la matriz A salvo la j-ésima que se sustituye por la suma de dicha columna j-esima con el producto de a por la columna i-sima.

Ejemplo:

$$S_{23}(a).A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&a\\0&0&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}p_1&p_2&p_3\\q_1&q_2&q_3\\r_1&r_2&r_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_1&p_2&p_3\\q_1+a.r_1&q_2+a.r_2&q_3+ar_3\\r_1&r_2&r_3\end{pmatrix}$$

$$A.S_{31}(a)=\begin{pmatrix}p_1&p_2&p_3\\q_1&q_2&q_3\\r_1&r_2&r_3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\a&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_1+a.p_3&p_2&p_3\\q_1+a.q_3&q_2&q_3\\r_1+a.r_3&r_2&r_3\end{pmatrix}$$

La inversa de una matriz cuadrada inversible cualquiera, obtenida mediante un producto de matrices elementales del mismo orden:

Podemos reducir a la matriz identidad a una matriz cualquiera multiplicándola a la izquierda sucesivamente por matrices elementales, de cualquiera de los géneros vistos. Lo mismo se puede conseguir si se multiplica la matriz por matrices elementales a la derecha.

Si después de k productos por matrices elementales se tiene que la matriz A se convierte en la matriz identidad

$$E_k.E_{k-1}....E_2.E_1.A=I$$

con lo que, multiplicando a la derecha por la inversa A^{-1}, se tiene

$$E_k.E_{k-1}....E_2.E_1.A.A^{-1}=A^{-1}$$

O sea:

$$E_k.E_{k-1}....E_2.E_1=A^{-1}$$

Ejemplo:

Calculemos usando matrices elementales, la matriz inversa de

$$A=\begin{pmatrix}-1/2&5/2\\1/4&-3/4\end{pmatrix}$$

Multiplicamos por las matrices elementales $S_{12}(3),P_{12},D_2(4),S_{12}(2)$:

$$S_{12}(3).P_{12}.D_2(4).S_{12}(2).A=$$

$$=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1/2&5/2\\1/4&-3/4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

luego, la matriz inversa es

$$S_{12}(3).P_{12}.D_2(4).S_{12}(2)=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&10\\1&2\end{pmatrix}$$

comprobación:

$$\begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & 5/2 \\ 1/4 & -3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Puesto que la inversa de una matriz elemental es también una matriz elemental del mismo orden y tipo, se deduce que toda matriz inversible A puede expresarse mediante el producto de matrices elementales del mismo orden:

$$A^{-1} = E_k.E_{k-1}....E_2.E_1 \to A = \left(A^{-1}\right)^{-1} = (E_k.E_{k-1}....E_2.E_1)^{-1} = E_k^{-1}.E_{k-1}^{-1}....E_2^{-1}.E_1^{-1}$$