Sobre la matemática de la afinación musical

0. Introducción:

Los pitagóricos estudiaron la naturaleza del sonido musical, descubriendo que existía relación numérica entre tonos que resultaban armoniosos, lo que permitiría deducir que las razones de números enteros podían utilizarse para la medición de los sonidos musicales.

Descubrieron que la producción de sonidos por la vibración de una cuerda podía relacionarse numéricamente con la producción de otros sonidos obtenidos con fracciones de la misma cuerda. Esto fortalecería la idea pitagórica de que existía una relación armoniosa entre la matemática y los fenómenos perceptibles.

Encontraron que los sonidos producidos por la mitad, la cuarta parte, los dos tercios, etc., de una cuerda resultaban armoniosos con el sonido emitido por la vibración de la cuerda completa. Se descubriría posteriormente que esto se debe a la estructura física de la misma vibración de la cuerda, pues la cuerda vibra en una sola onda, en dos ondas, en tres ondas, en cuatro ondas, etc., que corresponde a mitades, tercios, cuartos, etc., produciendo secuencias de armónicos que son fracciones de la longitud total de la cuerda.

Intentaremos mostrar aquí como se puede fundamentar matemáticamente la afinación musical de un conjunto de sonidos, la octava, tal como fue diseñada en la escuela pitagórica.

1. La octava:

1.1. Definición de la octava

La frecuencia f de la nota de sonido que emite la vibración de una cuerda h de longitud L viene dada por

$$f = \frac{v}{L}$$

donde es v la velocidad del sonido emitido en la vibración.

La nota de sonido emitida por una fracción de la cuerda h, de longitud L/k, tiene una frecuencia mayor que la frecuencia del sonido correspondiente a la longitud total de la cuerda

$$f_k = \frac{v}{L/k} = k\frac{v}{L} = kf$$

Para distintas fracciones de la cuerda se van encontrando sonidos cuya frecuencia es inversamente proporcional a la longitud del trozo de cuerda usado para la vibración.

Una *Octava* es cualquier conjunto de sonidos emitidos por la vibración de un conjunto de distintas fracciones de una cuerda comprendidas entre la longitud total L y la mitad de dicha longitud total, $L/2$. Es decir, es cualquier conjunto de sonidos cuyas frecuencias están comprendidas entre dos valores, f y $2f$. Si un sonido tiene frecuencia f_0 y otro tiene frecuencia $2.f_0$, diremos que el primero es *una octava* más grave (mas bajo) que el segundo, o que éste es *una octava* más agudo (más alto) que el primero.

1.2. La equivalencia entre octavas
La octava, pues, es, matemáticamente, un conjunto finito de números reales, $k_1.f$, $k_2.f$, ...,$k_n.f$, comprendidos en el intervalo semiabierto $[f, 2f)$:

$$f<= k_1.f<k_2.f< \ldots <k_n.f<2f$$

que definen las frecuencias de los sonidos en relación con la frecuencia f de partida.

A su vez, el intervalo $[2f, 4f)$ comprende los sonidos de frecuencias dadas por $2k_1.f$, $2k_2.f$, ...,$2k_n.f$, con relación a la frecuencia $2f$, y así, sucesivamente, para las siguientes octavas.

Los sonidos que difieren en una o varias octavas son equivalentes y se acostumbran a denominar del mismo modo. Así, podemos considerar el conjunto de los números reales positivos dividido en intervalos de una octava:

$$R^+=\ldots U[(1/2)f, f)U[f, 2f)U[2f, 4f)U[4f, 8f)U\ldots$$

Un sonido de frecuencia $k.f$ en la octava $[f, 2f)$ tiene su equivalente en el sonido de frecuencia $2^n k.f$ en la octava $[2^n f,2^{n+1}f)$. Es decir, dos sonidos son equivalentes si sus frecuencias, f_1 y f_2, están en la proporción de una potencia natural de 2: $f_1=2^n.f_2$. Tal relación es, efectivamente de equivalencia, pues es simétrica, reflexiva y transitiva:

$$f_1 \varphi f_2 \leftrightarrow \exists n \in N / f_1 = 2^n f_2$$

El conjunto cociente, R^+/φ, de R^+ por tal relación de equivalencia φ es un único intervalo, $[f,2f)$, o bien, si se prefiere, el intervalo $[1,2)$, pues los valores dependerían de f, necesitándose un sonido patrón por el que se multiplicarían los valores k_1, k_2, ... para obtener las frecuencias de los sonidos de la octava.

Para obtener las frecuencias de los sonidos no tenemos más que elegir números comprendidos en el intervalo $[1, 2)$ y multiplicarlos por la frecuencia inicial f tomada como patrón.

2. Afinación:

2.1. Afinar una octava
Afinar es el proceso de elección de números reales del intervalo $[1,2)$ a fin de definir una escala de notas dentro de la octava.

En realidad consiste en definir particiones de una cuerda, de longitudes comprendidas entre la longitud total L y su mitad $L/2$, a fin de que el factor de la frecuencia del sonido de la vibración esté comprendida en el intervalo $[1,2)$.

Así, supongamos que se hace una afinación de la octava obteniendo un total de n notas cuyas frecuencias en orden creciente son:

$$\{f_0, f_1, ..., f_k, ..., f_n\}$$

siendo f_n la frecuencia de la primera nota de la octava siguiente.

2.2. Afinar en progresión geométrica
Los números f_k que definen las frecuencias de las notas elegidas en el proceso de afinación de la octava dependen del criterio utilizado para hacer la afinación. Cuando se eligen de forma que están en progresión geométrica, de la nota más grave a la más aguda, es muy sencillo obtener la razón de la progresión

Supongamos que afinamos la escala eligiendo n notas en progresión geométrica de razón r, $f_k = r^k.f_0, k = 1,...,n-1$:

$$\{f_0, f_1, ..., f_k, ..., f_{n-1}, f_n\} \to \{f_0, r.f_0, ..., r^k f_0, ..., r^{n-1}.f_0, r^n f_0\}$$

Y la frecuencia f_k de una determinada nota puede escribirse en función de la frecuencia f_h de una nota anterior mediante $f_k = r^{k-h}.f_h$

Puesto que cualquier nota de frecuencia f_k en la octava tiene una frecuencia doble, $2.f_k$ en la octava siguiente, y existiendo en total n notas entre ambas, podemos escribir, en definitiva, que

$$2.f_k = r^n f_k \to 2 = r^n \to r = \sqrt[n]{2}$$

Por consiguiente las frecuencias de las notas de la afinación, en función de la frecuencia de la nota inicial, f_0, serían:

$$\left\{f_0, \sqrt[n]{2}.f_0, ..., \left(\sqrt[n]{2}\right)^k f_0, ..., \left(\sqrt[n]{2}\right)^{n-1}.f_0, \left(\sqrt[n]{2}\right)^n f_0\right\}$$

siendo la última de estas notas, $\left(\sqrt[n]{2}\right)^n f_0 = 2f_0$ la primera de las notas de la octava siguiente.

3. Criterio de afinación pitagórico:

3.1. Definición del criterio pitagórico
El primero de los criterios de afinación conocidos, de los pitagóricos, se basa en la idea siguiente:

"Los sonidos afinados se obtienen por la división de una cuerda en tres partes, y cada una de estas partes en otras tres, y así sucesivamente, …"

Se tiene, entonces, que si la longitud de una cuerda se divide en $3, 3^2, ..., 3^n$, … partes, los sonidos afinados que resultan al pulsar cada una de las partes tendrá una frecuencia de $3f, 3^2f, ..., 3^nf, ...$, respectivamente.

Del mismo modo, si la longitud de la cuerda se multiplicara por 3, 3^2, ..., 3^n, ... , los sonidos afinados que resultarían al pulsar cada una de las cuerdas así obtenidas tendrían frecuencias de $(1/3)f, (1/3^2)f, ...,(1/3^n)f,...$

Se tienen, por tanto, las sucesiones de frecuencias tanto para la división de la cuerda como para el caso de multiplicación sucesiva por potencias de 3:

Frecuencias de los sonidos que se obtienen al dividir la cuerda:

$$\{3^k f\}_{k\geq 0}$$

Frecuencias de los sonidos que se obtienen al multiplicar la cuerda:

$$\left\{\frac{1}{3^k} f\right\}_{k\geq 0}$$

Para poder estudiar las notas que se obtengan al dividir una cuerda de esta forma, hemos de reducir estas sucesiones de modo que sus puntos se encuentren dentro del intervalo $[1,2)$ de estudio, lo que obtenemos dividiendo cada una de las potencias 3, 3^2, ..., 3^n, ... , por potencias adecuadas de 2 de modo que cada cociente se encuentre dentro del intervalo $[1,2)$, de la forma:

$$\frac{3}{2}, \frac{3^2}{2^3}, ..., \frac{3^6}{2^9}, ...$$

donde el exponente entero k al que debe elevarse 2 se obtiene imponiendo la condición de que el cociente quede comprendido en el interior del intervalo $[1,2)$:

$$1 \leq \frac{3^n}{2^k} < 2$$

por lo que:

$$\log_2 1 \leq \log_2\left(\frac{3^n}{2^k}\right) < \log_2 2 \rightarrow 0 \leq \log_2(3^n) - k < 1 \rightarrow \begin{cases} k \leq \log_2(3^n) \\ k > \log_2(3^n) - 1 \end{cases}$$

Esto quiere decir que entero k es necesariamente la parte entera de $\log_2(3^n)$, por lo que los términos de la sucesión de frecuencias de los sonidos afinados se normalizarían en el intervalo $[1,2)$ de la forma:

$$\left\{\frac{3^n}{2^{E[\log_2(3^n)]}} f\right\}_{n\geq 0}$$

donde hemos representado por $E[\log_2(3^n)]$ a la parte entera del logaritmo $\log_2(3^n)$.

Análogamente, para normalizar en dicho intervalo las frecuencias

$$\left\{\frac{1}{3^n} f\right\}_{n\geq 0}$$

obtendríamos la sucesión

$$\left\{\frac{2^{E[\log_2(3^{-n})]}}{3^{-n}} f\right\}_{n\geq 0}$$

El sistema básico de afinación pitagórica divide a la octava en siete notas fundamentales, que se denominan hoy con el nombre propuesto por el benedictino Guido D'Arezzo (991-1058), que en orden creciente de frecuencias, fueron *do, re, mi, fa, sol, la, si, DO*, correspondiendo esta última al *do* de la octava siguiente. Para obtener la relación matemática entre ellas puede usarse el sencillo algoritmo que se describe a continuación.

3.2. Algoritmo para obtener la relación entre frecuencias:
Se colocan cuatro filas con las nombres de las siete notas en cada fila y se marcan a partir de la nota *fa*, en saltos de cuatro notas:

do	re	mi	**fa**	sol	la	si
do	re	mi	fa	**sol**	la	si
do	**re**	mi	fa	sol	**la**	si
do	re	**mi**	fa	sol	la	**si**

Para obtener el número fraccionario que define la proporción entre la frecuencia γ de una nota y la frecuencia f de la nota do, contaremos el número de saltos de cuatro notas necesario para alcanzar la nota do marcada, ya sea hacia la izquierda o bien hacia la derecha.
Si son n saltos a la izquierda, entonces la frecuencia γ de la nota será $\gamma = 3^n f$, que, para llevarla al interior de la escala habría que dividir por la potencia correspondiente de 2:

$$\gamma = \frac{3^n}{2^{E\left[\log_2 3^n\right]}} f$$

Si son n saltos a la derecha, entonces la frecuencia γ de la nota será $\gamma = (1/3^n) f$, que, para llevarla al interior de la escala habría que dividir por la potencia correspondiente de 2:

$$\gamma = \frac{1/3^n}{1/2^{E\left[\log_2 3^{n+1}\right]}} f$$

Veamos como obtenemos las notas de la escala aplicando este algoritmo:

<u>Nota re</u>: Vemos que hemos de dar 2 saltos a la izquierda para alcanzar la nota do:

$$\gamma_{re} = \frac{3^2}{2^{E\left[\log_2 3^2\right]}} f = \frac{3^2}{2^3} f = \frac{9}{8} f$$

<u>Nota mi</u>: Se han de dar 4 saltos a la izquierda:

$$\gamma_{mi} = \frac{3^4}{2^{E\left[\log_2 3^4\right]}} f = \frac{3^4}{2^6} f = \frac{81}{64} f$$

<u>Nota fa</u>: Se ha de dar un solo salto a la derecha:

$$\gamma_{fa} = \frac{1/3^1}{1/2^{E\left[\log_2 3^{1+1}\right]}} f = \frac{1/3}{1/2^2} f = \frac{4}{3} f$$

<u>Nota sol</u>: Un solo salto a la izquierda:

$$\gamma_{sol} = \frac{3^1}{2^{E\left[\log_2 3^1\right]}} f = \frac{3}{2} f$$

Nota la: Se han de efectuar 3 saltos a la izquierda:

$$\gamma_{la} = \frac{3^3}{2^{E\left[\log_2 3^3\right]}} f = \frac{3^3}{2^4} f = \frac{27}{16} f$$

Nota si: Serán 5 saltos a la izquierda:

$$\gamma_{si} = \frac{3^5}{2^{E\left[\log_2 3^5\right]}} f = \frac{3^5}{2^7} f = \frac{243}{128} f$$

Con el afinamiento pitagórico se obtienen, en definitiva, los siguientes valores para las factores de las frecuencias de las notas fundamentales de la octava, ordenados de menor a mayor:

do: $\frac{3^0}{2^0} = 1$

re: $\frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8} = 1{,}125$

mi: $\frac{3^4}{2^6} = \frac{81}{64} = 1{,}265625$

fa: $\frac{4}{3} = 1{,}333333$

sol: $\frac{3}{2} = 1{,}5$

la: $\frac{3^3}{2^4} = \frac{27}{16} = 1{,}6875$

si: $\frac{3^5}{2^7} = \frac{243}{128} = 1{,}8984375$

Si se hace corresponder a la nota inicial, *do*, una frecuencia f, las frecuencias de las restantes notas de la octava que se obtienen mediante el afinamiento pitagórico serán:

$$\{f,\ 1.125f,\ 1.265625f,\ 1.333333f,\ 1.5f,\ 1.6875f,\ 1.8984375f,\ 2f\}$$

Frecuencias de las siete notas fundamentales obtenidas mediante el algoritmo pitagórico:

Nota	Frecuencia
do	f_0
re	1.125.f_0
mi	1.265625. f_0
fa	1.3333. f_0
sol	1.5 f_0
la	1.16875. f_0
si	1.8984375. f_0
DO	2 f_0

3.3. Razones entre las frecuencias. Tonos y semitonos:
Si llamamos *tono (T)* a la proporción 9/8:

$$T = \frac{9}{8} = 1.125$$

y *semitono (S)* a su raíz cuadrada:

$$S = \sqrt{9/8} = 1.060660$$

observamos que las notas fundamentales de la afinación pitagórica pueden expresarse como proporcionales en un tono o en un semitono:

Frecuencia de do: f_0

Frecuencia de re: $f_{re} = T.f_0$

Frecuencia de mi: $f_{mi} = T^2.f_0 = T.f_{re}$

Frecuencia de fa: $f_{fa} = S.T^2.f_0 = S.f_{mi}$

Frecuencia de sol: $f_{sol} = S.T^3.f_0 = T.f_{fa}$

Frecuencia de la: $f_{la} = S.T^4.f_0 = T.f_{sol}$

Frecuencia de si: $f_{si} = S.T^5.f_0 = T.f_{la}$

Frecuencia de DO: $f_{DO} = S^2.T^5.f_0 = S.f_{si}$ (primera nota de la siguiente octava)

Las notas fundamentales, en función de tonos y semitonos, se expresan entonces por:

$$\left\{ f_{do} \_T\_ f_{re} \_T\_ f_{mi} \_S\_ f_{fa} \_T\_ f_{sol} \_T\_ f_{la} \_T\_ f_{si} \_S\_ f_{DO} \right\}$$

Es decir, la octava está compuesta de siete notas fundamentales separadas por 5 tonos y dos semitonos.

3.4. La intercalación de notas alteradas:
Puesto que todas las notas fundamentales obtenidas desde el algoritmo pitagórico no están separadas por proporciones iguales, ya que hay dos pares de ellas, mi-fa y si-DO, que están solo en la proporción de un semitono, se procura la inserción de notas intermedias entre los restantes cinco pares separados por un tono a fin de que en conjunto, resulten doce notas donde cada una de ellas está separada de la siguiente por un semitono.

Así, se intercala una nota entre do y re, que se denomina *do sostenido*, o bien, *re bemol*. Asimismo se intercala una nota entre *re* y *mi* que se llamaría *re sostenido* o *mi bemol*, otra nota se intercalaría entre *fa* y *sol*, que sería el *fa sostenido* o bien *sol bemol*, asimismo, una cuarta nota habría de intercalarse entre *sol* y *la*, que se llamaría *sol sostenido* o *la bemol,* y finalmente, una quinta nota se habría de intercalar entre *la* y *si*, que sería el *la sostenido* o bien el *si bemol*.

Se acostumbra a representar con el símbolo # a los sostenidos y con b a los bemoles. El total de las notas fundamentales y alteradas se puede resumir en el cuadro siguiente:

Notas	Proporción con la nota anterior	Proporción con la frecuencia de do
do	-	-
do$^{\#}$ *(re*^{b}*)*	*S.do*	*S.so*
re	*S.do*$^{\#}$	S^2*.do*
re$^{\#}$ *(mi*^{b}*)*	*S.re*	S^3*.do*
mi	*S.re*$^{\#}$	S^4*.do*
fa	*S.mi*	S^5*.do*
fa$^{\#}$ *(sol*^{b}*)*	*S.fa*	S^6*.do*
sol	*S.fa*$^{\#}$	S^7*.do*
sol$^{\#}$ *(la*^{b}*)*	*S.sol*	*S8.do*
la	*S.sol*$^{\#}$	S^9*.do*
la$^{\#}$ *(si*^{b}*)*	*S.la*	S^{10}*.do*
si	*S.la*$^{\#}$	S^{11}*.do*
DO	*S.si*	S^{12}*.do=2.do*

Y resultan:

Nota	Frecuencia
do	f_0
do# (re^{b})	1.060660.f_0
re	1.125.f_0
Re# (mi^{b})	1.1932425.f_0
mi	1.265625. f_0
fa	1.3333. f_0
fa# (solb)	1.414212.f_0
sol	1.5 f_0
sol# (lab)	1.59099.f_0
la	1.6875. f_0
la# (sib)	1.78986.f_0
si	1.8984375. f_0
DO	2 f_0

4. Criterio de afinación temperada:

Difundido principalmente por Johan Sebastián Bach (1685-1750).

Consiste en dividir la octava en doce puntos (en doce notas musicales) cuyas frecuencias se encuentran en progresión geométrica, es decir, si son las doce notas

$$\{N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8, N_9, N_{10}, N_{11}, N_{12}, N_{13}\}$$

donde se ha incluido la nota treceava N_{13} como primera nota de la octava siguiente, cumpliéndose que dada nota N_k está relacionada con otra nota N_h anterior mediante la expresión

$$f_k = r^{k-h} f_h$$

como sabemos que la si frecuencia de una nota N_k cualquiera es f_k entonces la frecuencia de la misma nota en la octava siguiente $N_k^{'}$ es el doble, $f_k^{'} = 2.f_k$, esto nos permite determinar todas las frecuencias de la octava cuando se conoce la frecuencia de una sola de ellas, ya que habiendo doce notas entre N_k y $N_k^{'}$., se verifica que $f_k^{'} = r^{12} f_k$, con lo que $2f_k = r^{12} f_k \to 2 = r^{12} \to r = \sqrt[12]{2} \cong 1.05946...$

El número irracional r se le denomina un *semitono*, y a su cuadrado se le llama un *tono.* Se acostumbra a decir que cada una de las doce notas está separada de la anterior por un semitono, y también es un semitono lo que separa a la última nota de la primera nota de la siguiente octava.

De las doce notas de la división anterior, siete de ellas reciben los nombres clásicos de *do, re, mi, fa, sol, la, si*, y las otras cinco se denominan *notas alteradas, do#,re#, fa#,sol#,la#,* de la siguiente manera:

$$\{do, do\#, re, re\#, mi, fa, fa\#, sol, sol\#, la, la\#, si, DO\}$$

Por lo visto anteriormente, si fijamos la frecuencia de una de ellas podemos determinar la frecuencia de cada una de las restantes notas. Se tiene, incluyendo la nota DO, primera de la siguiente octava:

$$\Big\{f, \sqrt[12]{2}f, (\sqrt[12]{2})^2 f, (\sqrt[12]{2})^3 f, (\sqrt[12]{2})^4 f, (\sqrt[12]{2})^5 f, (\sqrt[12]{2})^6 f, (\sqrt[12]{2})^7 f, (\sqrt[12]{2})^8 f, (\sqrt[12]{2})^9 f,$$
$$(\sqrt[12]{2})^{10} f, (\sqrt[12]{2})^{11} f, (\sqrt[12]{2})^{12} f\Big\}$$

es decir:

$$\{f, 1.05946f, 1.1224f, 1.1892f, 1.2599f, 1.3348f, 1.4142f, 1.4983f, 1.5874f, 1.6817f,$$
$$(1.7817f, 1.8877f, 2f\}$$

En definitiva:

Nota	Frecuencia
do	f_0
do# (re^b)	$1.05946.f_0$
re	$1.1224.f_0$
Re# (mi^b)	$1.1892.f_0$
mi	$1.2599.\ f_0$
fa	$1.3348.\ f_0$
fa# (solb)	$1.4142.f_0$
sol	$1.4983\ f_0$
sol# (lab)	$1.5874.f_0$
la	$1.6817.\ f_0$
la# (sib)	$1.7817.f_0$
si	$1.8877.\ f_0$
DO	$2\ f_0$

donde observamos que las frecuencias de todas las notas coinciden con bastante aproximación con las frecuencias obtenidas mediante el algoritmo pitagórico.

5. Criterio de afinación de Holder:
Ideado por william Holder (1616-1698), que lo expuso en su obra *Treatise on the Natural Grounds and Principles of Harmony,* en 1694.

Es también un criterio de afinación de progresión geométrica, donde la octava se divide en 53 notas (llamadas *comas de Holder*), por lo que la razón de la progresión es ahora dada por $r = \sqrt[53]{2} = 1.0131$.

Con esta afinación se observa que cada tono pitagórico contiene 9 comas de Holder, puesto que

$$\left(\sqrt[53]{2}\right)^9 = 1.0131^9 \cong 1.125$$

Asimismo, cada semitono del sistema de Pitágoras comprende 4 comas de Holder:

$$\left(\sqrt[53]{2}\right)^4 = 1.0131^4 \cong 1.06066$$

haciendo, pues coincidir ciertas comas de Holder con las notas del sistema pitagórico, se encuentra el total de las 53 notas o comas, ya que si la secuencia de tonos y semitonos pitagórica es

T-T-S-T-T-T-S

esto se corresponde con los números de comas:

9+9+4+9+9+9+4=53

6. La asignación de una frecuencia patrón en Hertzios:
6.1. Una frecuencia patrón en hertzios:
En 1939, una conferencia internacional recomendó que la nota *la* del piano se afinara a *440 Hz*. Este fue el patrón tomado por la ISO (Organización internacional de normalización) en 1955 y reafirmado en el año 1976, sirviendo como la frecuencia de sonido de referencia para la afinación de los instrumentos musicales de todo tipo.

6.2. Las frecuencias en hertzios de las doce notas en el criterio pitagórico:
Puesto que la nota *la* depende de la frecuencia f de la nota *do* por la relación

$$f_{la} = 1.6875.f$$

resulta de inmediato el valor de f y de las frecuencias de las restantes notas

$$1.6875.f = 440 \rightarrow f = 440/1.6875 = 260.74074\,Hz$$

y ya las frecuencias de todas las notas de la octava son inmediatas:

Nota	Frecuencia	Frecuencia en Hertzios
do	f_0	*260.74074 Hz*
do$^{\#}$ (re^{b})	1.060660.f_0	*276.55727 Hz*
re	1.125.f_0	*293.33333 Hz*
Re$^{\#}$ (mi^{b})	1.1932425.f_0	*311.12693 Hz*
mi	1.265625. f_0	*330.00000 Hz*
fa	1.3333. f_0	*347.64562 Hz*
fa$^{\#}$ (sol^{b})	1.414212.f_0	*368.74268 Hz*
sol	1.5 f_0	*391.11111 Hz*
sol$^{\#}$ (la^{b})	1.59099.f_0	*414.83591 Hz*
la	1.6875. f_0	*440.00000 Hz*
la$^{\#}$ (si^{b})	1.78986.f_0	*466.68942 Hz*
si	1.8984375. f_0	*495.00000 Hz*
DO	2 f_0	*521.48148 Hz*

6.3. Las frecuencias en hertzios de las doce notas en la afinación temperada:
Realizando el mismo cálculo que en el criterio pitagórico, resulta

$$f_{la} = 1.6817.f$$

resultando el valor de f y las frecuencias de las restantes notas

$$1.6817.f = 440 \rightarrow f = 440/1.6817 = 261.64000\,Hz$$

Nota	Frecuencia	Frecuencia en Hertzios
do	f_0	*261.64000 Hz*
do# (re^{b})	1.05946.f_0	*277.19712 Hz*
re	1.1224.f_0	*293.66474 Hz*
Re# (mi^{b})	1.1892.f_0	*311.14229 Hz*
mi	1.2599. f_0	*329.64024 Hz*
fa	1.3348. f_0	*349.23708 Hz*
fa# (sol^{b})	1.4142.f_0	*370.01129 Hz*
sol	1.4983 f_0	*392.01522 Hz*
sol# (la^{b})	1.5874.f_0	*415.32734 Hz*
la	1.6817. f_0	*440.00000 Hz*
la# (si^{b})	1.7817.f_0	*466.16400 Hz*
si	1.8877. f_0	*493.89784 Hz*
DO	2 f_0	*523.28001 Hz*

6. Bibliografía:

Stewart, I., Matemáticas de la escala musical, Investigación y Ciencia, Barcelona, 1996.
Liern, V., Métodos numéricos de la música, Epsilon, Sevilla, 1994
Wikipedia_la Enciclopedia libre, Afinación, Afinación pitagórica, La coma de Holder.