Lugares geométricos complejos

Segunda parte

Curvas complejas de Agnesi [1]

"Defiende tu derecho a pensar, incluso pensar de manera errónea es mejor que no pensar" *Hipatía de Alejandría*

.Wilfredo Zuleta R.[2]

Este pequeño artículo está dedicado a encontrar los lugares geométricos generados al considerar la curva de Agnesi $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ considerada en el plano complejo $\mathbb{C}$ y sobre ella aplicar ciertas operaciones sobre los números. Como objetivo final es encontrar las ecuaciones paramétricas de estas curvas encontradas cuyas gráficas han sido elaboradas con el comando **Lugar Geométrico** del programa **GeoGebra [3].**

El primer paso a seguir es expresar la *curva de Agnesi en forma polar* (Ver figura 1)

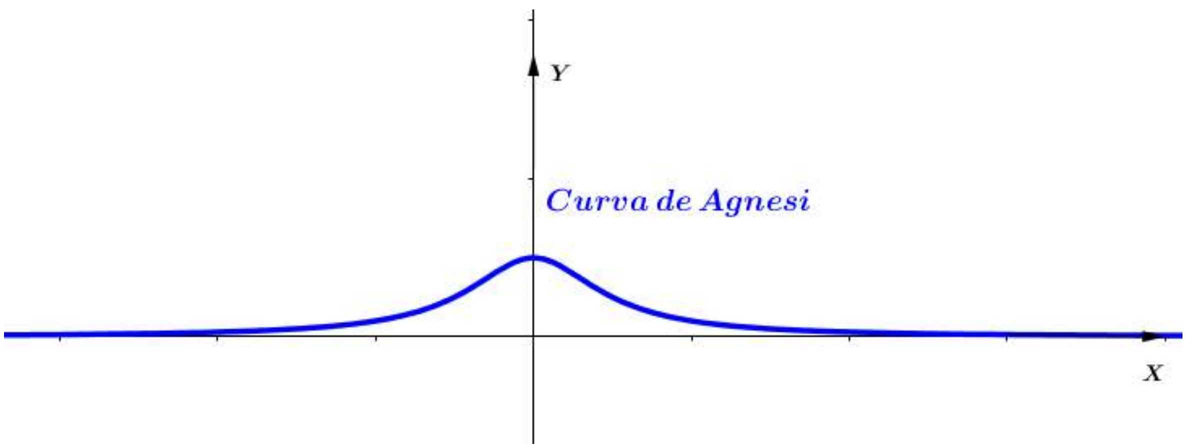


Figura 1

Dada la curva de Agnesi

$$y = \frac{1}{1+x^2} \qquad (1)$$

Para hacer eso tomemos $y = r sen\theta$, $x = r\cos\theta$ y reemplazamos en la ecuación (1) para obtener

---

[1] María Gaetana Agnesi . Lingüista, matemática y filósofa italiana nacida en Milán 16 de mayo de 1718. Muere en esta misma ciudad el 9 de enero de 1799.

[2] Profesor jubilado del NURR. Universidad De Los Andes. Trujillo-Venezuela. Email:wrzr2001us@hotmail.com

[3] GeoGebra 5.0.236.0-3D

$$r^3 sen\theta \cos^2\theta + rsen\theta - 1 = 0 \quad (2)$$

o

$$r^3 + \frac{r}{\cos^2\theta} - \frac{1}{sen\theta\cos^2\theta} = 0 \quad (3)$$
$$Para \;\; 0 < \theta < \pi \;\; (\theta \neq \frac{\pi}{2})$$

El polinomio en (3), que es de grado 3, posee al menos una raíz real. En nuestro caso, es la que nos interesa. La tarea es encontrar esta raíz.

Hagamos $p = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ y $q = -\dfrac{1}{\text{sen}\,\theta\cos^2\theta}$, así que tenemos el siguiente ecuación cúbica

$$r^3 + pr + q = 0 \quad (4)$$

Sea

$$r = r_1 + r_2 \quad (5)$$

De manera que

$$r^3 = (r_1 + r_2)^3 = r_1^3 + r_2^3 + 3r_1r_2(r_1 + r_2) = r_1^3 + r_2^3 + 3r_1r_2r \quad (5)$$

De (3), (4) y (5) obtenemos

$$r_1^3 + r_2^3 + (3r_1r_2 + p)r + q = 0 \quad (6)$$

Si en (6) hacemos $3r_1r_2 + p = 0$ entonces $r_1^3 + r_2^3 = -q$ y $r_1r_2 = -\dfrac{p}{3}$ o $r_1^3r_2^3 = \left(-\dfrac{p}{3}\right)^3$

Esto último nos indica que existe un polinomio de cierta variable, sea ésta z, que tiene por raíces r_1^3 y r_2^3, o sea que son raíces de la ecuación

$$z^2 + qz - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0 \quad (7)$$ [4]

Resolvemos la ecuación (7) que nos arroja las dos raíces que las obtenemos de la expresión

$$z = \frac{-q \pm \sqrt{\dfrac{27q^2 + 4p^3}{27}}}{2} \quad (8)$$

[4] Si r_1 y r_2 son raíces de polinomio $r^2 + pr + q$, entonces $r^2 + pr + q = (r - r_1)(r - r_2)$ y de aquí se tiene que $p = -(r_1 + r_2)$ y $q = r_1r_2$

Para los valores de p y q señalados anteriormente tenemos que $\frac{27q^2 + 4p^3}{27} > 0$, manera que las raíces la ecuación (7) son reales.

Sean éstas

$$z_1 = \frac{-q + \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{27}}}{2} \quad \text{y} \quad z_1 = \frac{-q - \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{27}}}{2}$$

$$r_1^3 = z_1 = \frac{-q + \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{27}}}{2} \quad \text{y} \quad r_2^3 = z_1 = \frac{-q - \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{27}}}{2}$$

Usando los cambios para p y q tenemos que

$$r_1 = \sqrt[3]{\frac{\frac{1}{sen\theta\cos^2\theta}\left(1 + \frac{1}{\cos\theta}\sqrt{\frac{27\cos^2\theta + 4sen^3\theta}{27}}\right)}{2}} \qquad (9)$$

y

$$r_2 = \sqrt[3]{\frac{\frac{1}{sen\theta\cos^2\theta}\left(1 - \frac{1}{\cos\theta}\sqrt{\frac{27\cos^2\theta + 4sen^3\theta}{27}}\right)}{2}} \qquad (10)$$

En definitiva, para obtener el valor de r, usamos (5), (9) y (10).

$$r = \sqrt[3]{\frac{\frac{1}{sen\theta\cos^2\theta}\left(1 + \frac{1}{\cos\theta}\sqrt{\frac{27\cos^2\theta + 4sen^3\theta}{27}}\right)}{2}} + \sqrt[3]{\frac{\frac{1}{sen\theta\cos^2\theta}\left(1 - \frac{1}{\cos\theta}\sqrt{\frac{27\cos^2\theta + 4sen^3\theta}{27}}\right)}{2}}$$

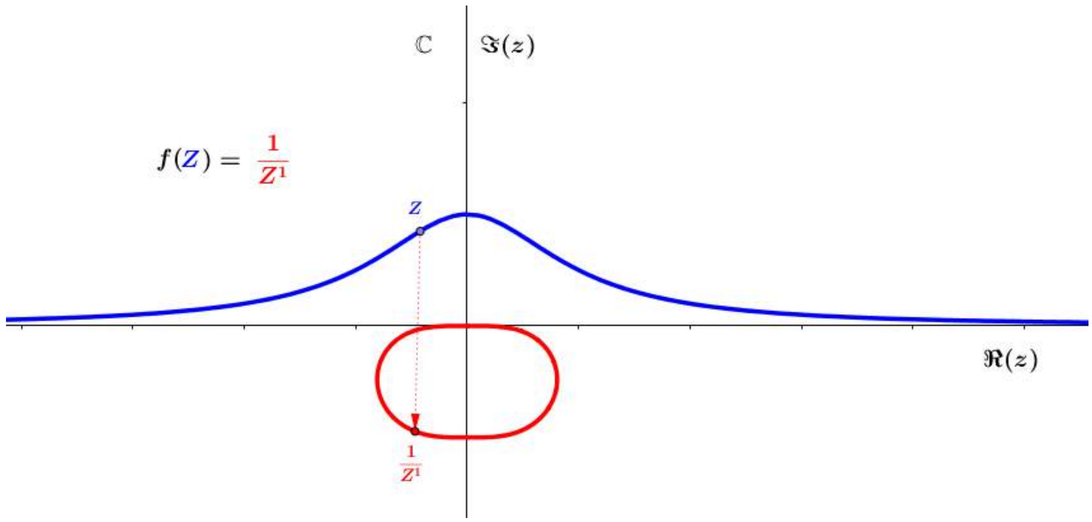
Con $0 < \theta < \pi \quad (\theta \neq \frac{\pi}{2})$

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$ entonces $r = 1$ (11)

La expresión (11) es la forma polar $r(\theta)$ de la curva de Agnesi $y = \frac{1}{1 + x^2}$.

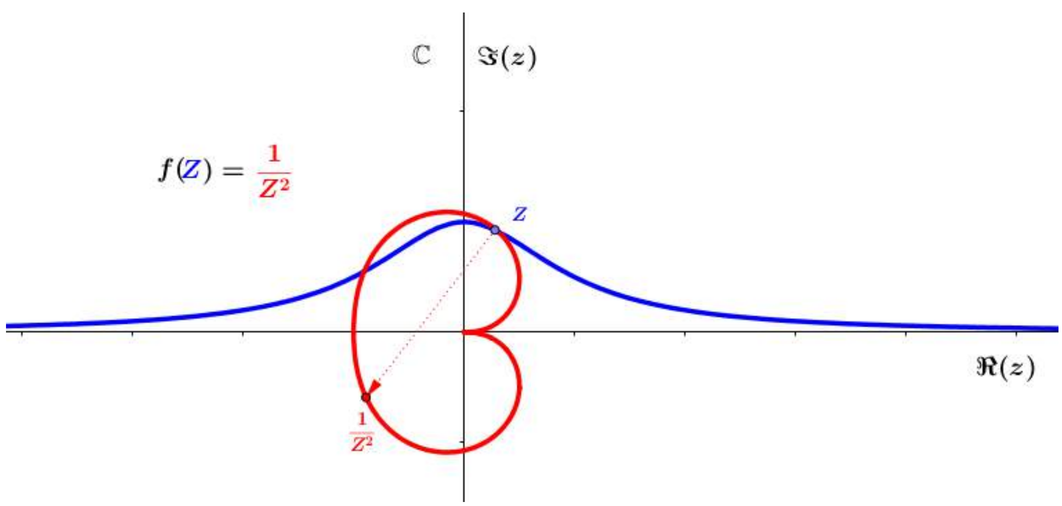
En vista de longitud de la esta expresión polar de la curva de Agnesi, usaremos $r(\theta)$ en reemplazo de la larga expresión (11), así que ya estamos en capacidad para obtener las formas paramétricas de estas curvas complejas, cuyas gráficas obtendremos con el mencionado comando del GeoGebra.

1. **Curvas complejas generadas por la operación recíproca potencial.**
   $n \in \bullet$



Las ecuaciones paramétricas de la curva imagen (en rojo) vienen dada por

$$x(\theta) = \frac{1}{r(\theta)}\cos\theta$$
$$y(\theta) = -\frac{1}{r(\theta)}\operatorname{sen}\theta$$
$$0 < \theta < \pi$$
$$r(\pi/2) = 1$$



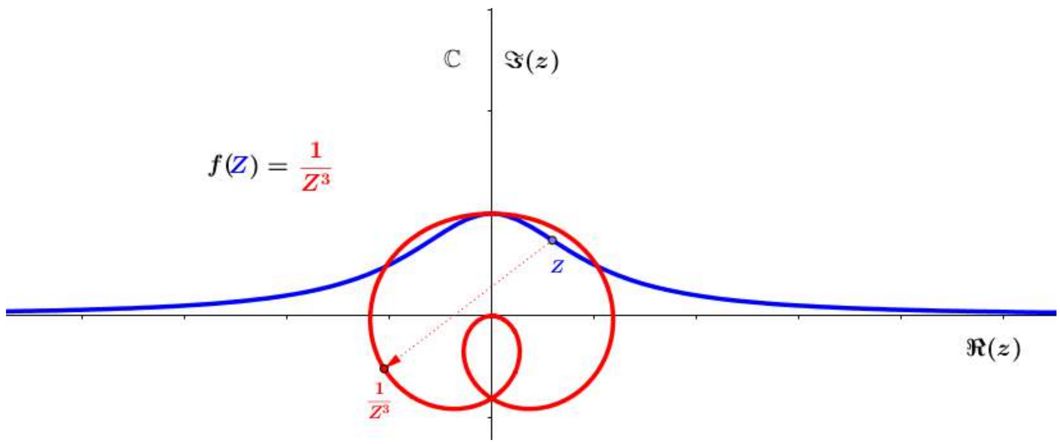
Ecuaciones paramétricas

$$x(\theta) = \frac{1}{(r(\theta))^2}\cos(2\theta)$$

$$y(\theta) = -\frac{1}{(r(\theta))^2}\operatorname{sen}(2\theta)$$

$$0 < \theta < \pi$$

$$r(\pi / 2) = 1$$



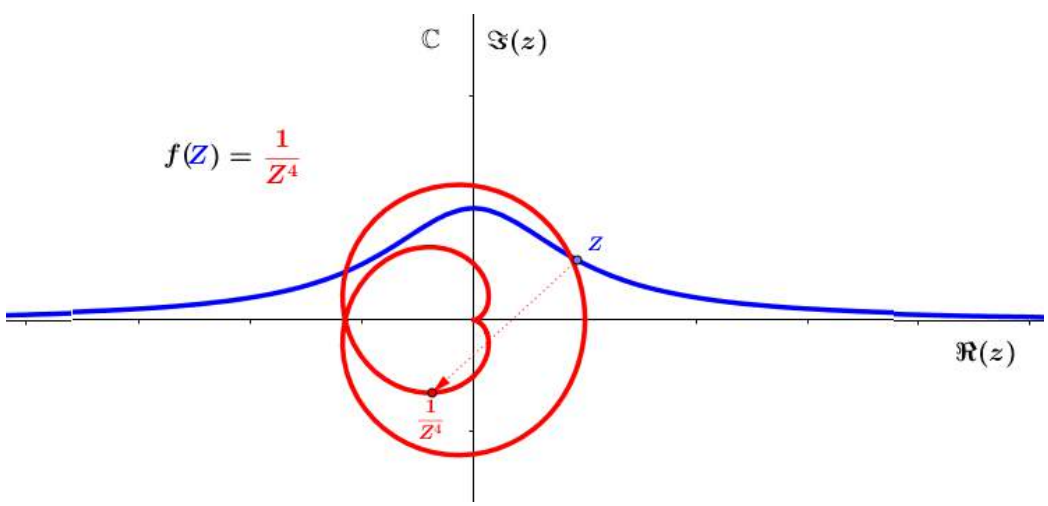
Ecuaciones paramétricas

$$x(\theta) = \frac{1}{(r(\theta))^3}\cos(3\theta)$$

$$y(\theta) = -\frac{1}{(r(\theta))^3}\operatorname{sen}(3\theta)$$

$$0 < \theta < \pi$$

$$r(\pi / 2) = 1$$



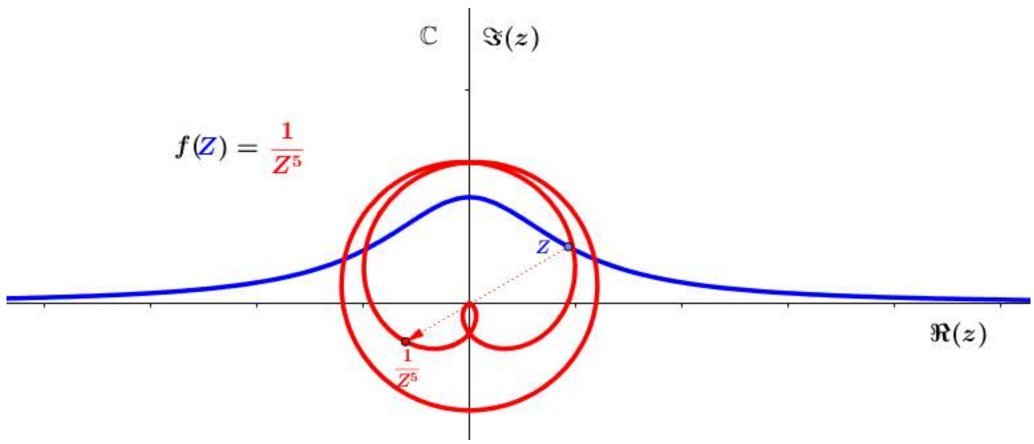
Ecuaciones paramétricas

$$x(\theta) = \frac{1}{(r(\theta))^4}\cos(4\theta)$$

$$y(\theta) = -\frac{1}{(r(\theta))^4}\operatorname{sen}(4\theta)$$

$$0 < \theta < \pi$$

$$r(\pi / 2) = 1$$



Ecuaciones paramétricas

$$x(\theta) = \frac{1}{(r(\theta))^5}\cos(5\theta)$$

$$y(\theta) = -\frac{1}{(r(\theta))^5}\operatorname{sen}(5\theta)$$

$$0 < \theta < \pi$$

$$r(\pi / 2) = 1$$

El lector podrá observar que en general, las ecuaciones paramétricas de dichas curvas vienen dadas por

Ecuaciones paramétricas

$$x(\theta) = \frac{1}{(r(\theta))^n}\cos(n\,\theta)$$

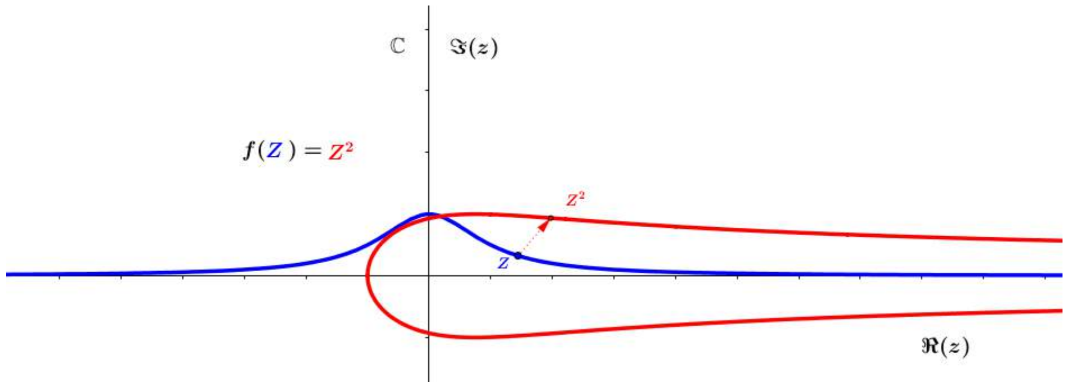
$$y(\theta) = -\frac{1}{(r(\theta))^n}\operatorname{sen}(n\,\theta)$$

$$0 < \theta < \pi$$

$$r(\pi / 2) = 1$$

Para valores de n mayores a los empleados en los casos que se acaban de mostrar se obtiene unas curvas muy interesantes y de aspectos más enrevesados.

2. **Curvas complejas generadas por la operación potencia de un complejo.**
   $n \in \bullet$



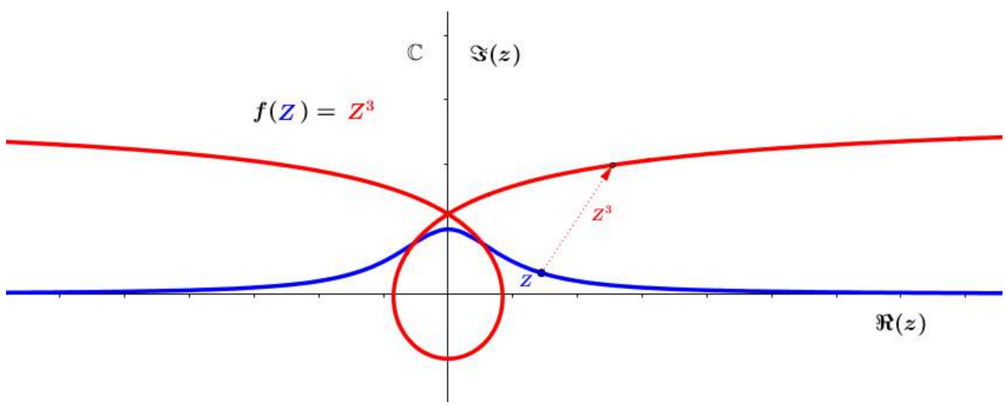
Ecuaciones paramétricas

$x(\theta) = (r(\theta))^2 \cos(2\theta)$

$y(\theta) = (r(\theta))^2 \text{sen}(2\theta)$

$0 < \theta < \pi$

$r(\pi / 2) = 1$



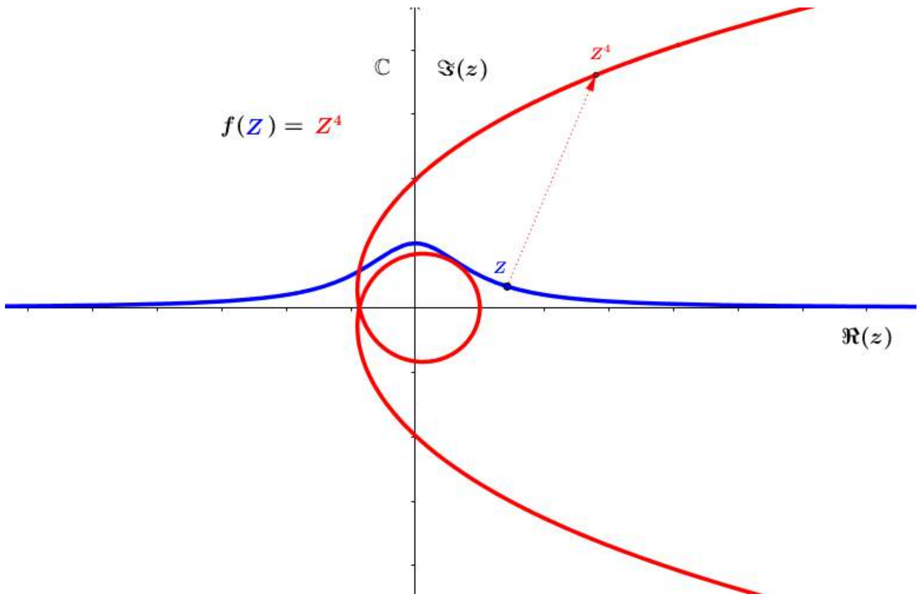
Ecuaciones paramétricas

$x(\theta) = (r(\theta))^3 \cos(3\theta)$

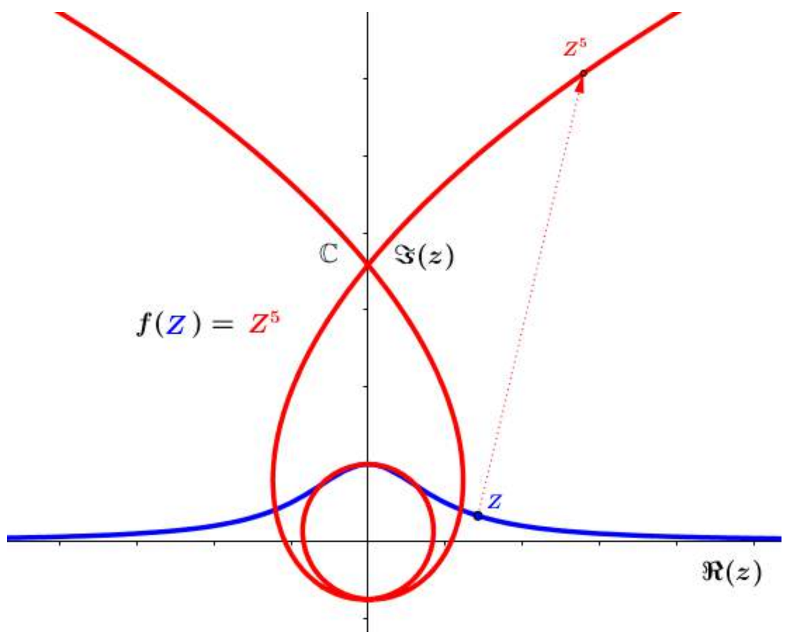
$y(\theta) = (r(\theta))^3 \text{sen}(3\theta)$

$0 < \theta < \pi$

$r(\pi / 2) = 1$



Ecuaciones paramétricas
$x(\theta) = (r(\theta))^4 \cos(4\theta)$
$y(\theta) = (r(\theta))^4 \operatorname{sen}(4\theta)$
$0 < \theta < \pi$
$r(\pi / 2) = 1$



Ecuaciones paramétricas
$x(\theta) = (r(\theta))^5 \cos(5\theta)$
$y(\theta) = (r(\theta))^5 \operatorname{sen}(5\theta)$
$0 < \theta < \pi$
$r(\pi / 2) = 1$

Como es de esperarse, para un número natural n cualquiera tenemos que

Ecuaciones paramétricas

$x(\theta) = (r(\theta))^n \cos(n\theta)$

$y(\theta) = (r(\theta))^n \operatorname{sen}(n\theta)$

$0 < \theta < \pi$

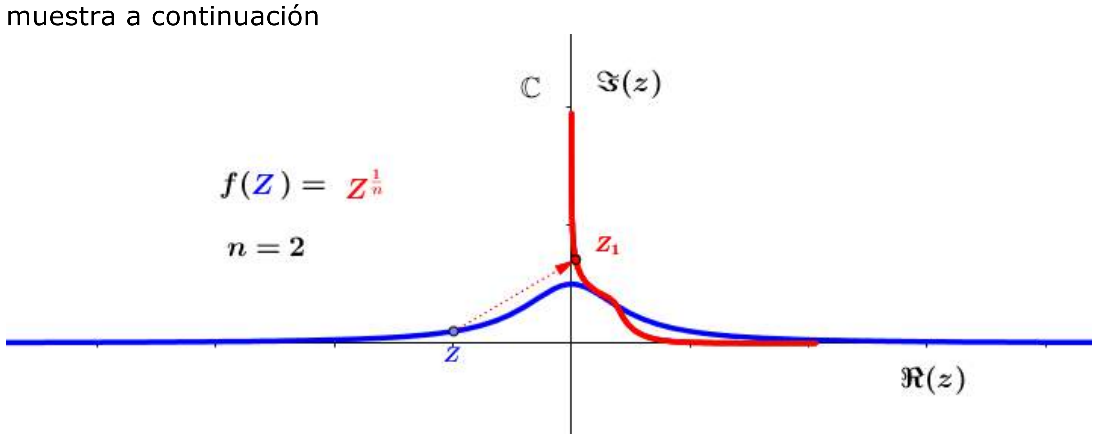
$r(\pi / 2) = 1$

3. **Curvas complejas generadas por la raíz n-ésima de un complejo.**

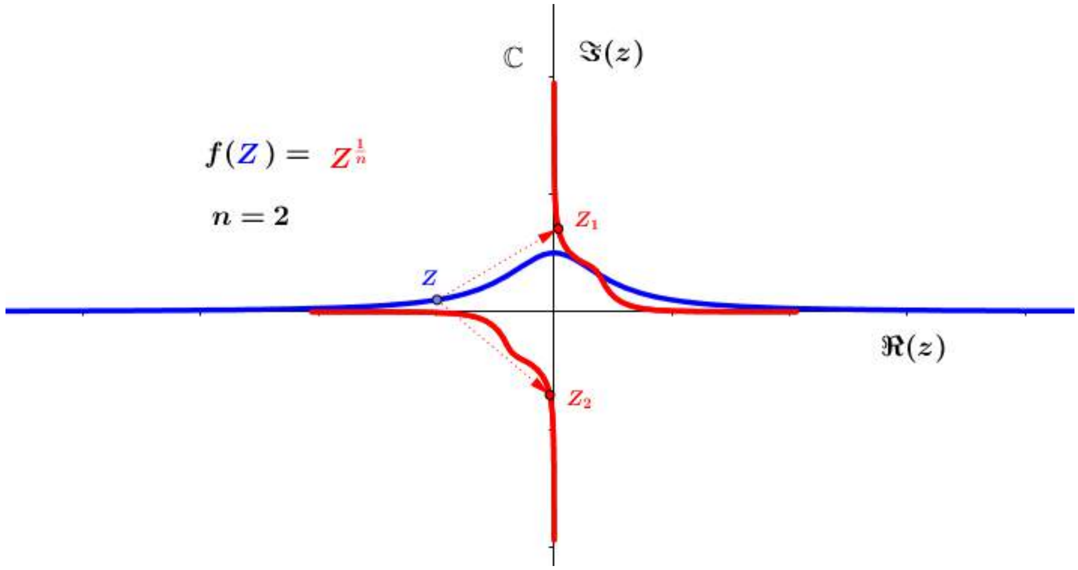
a. Caso: Raíz cuadrada

Teniendo en cuenta que cada número complejo tiene dos raíces cuadradas, entonces en este caso, cada una de dichas raíces genera un lugar geométrico y en su conjunto estos dos lugares geométricos es la imagen compleja de la curva de Agnesi correspondiente a la raíz cuadrada.

La primera raíz (cuando k=0) genera el siguiente lugar geométrico que se muestra a continuación



La segunda raíz (cuando k=1) genera el lugar geométrico que aparece en el tercer cuadrante en la siguiente figura. Las dos raíces en su conjunto es la imagen de la curva de Agnesi a través de la función raíz cuadrada $f(z) = z^{\frac{1}{2}}$



Las correspondientes ecuaciones para estas curvas son

Ecuaciones paramétricas

$$x(\theta) = r(\theta)^{\frac{1}{2}}\cos(\frac{\theta}{2})$$

$$y(\theta) = r(\theta)^{\frac{1}{2}}\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})$$

$$0 < \theta < \pi$$

$$r(\pi / 2) = 1$$

Ecuaciones paramétricas

$$x(\theta) = r(\theta)^{\frac{1}{2}}\cos(\frac{\theta + 2\pi}{2}) = -r(\theta)^{\frac{1}{2}}\cos(\frac{\theta}{2})$$

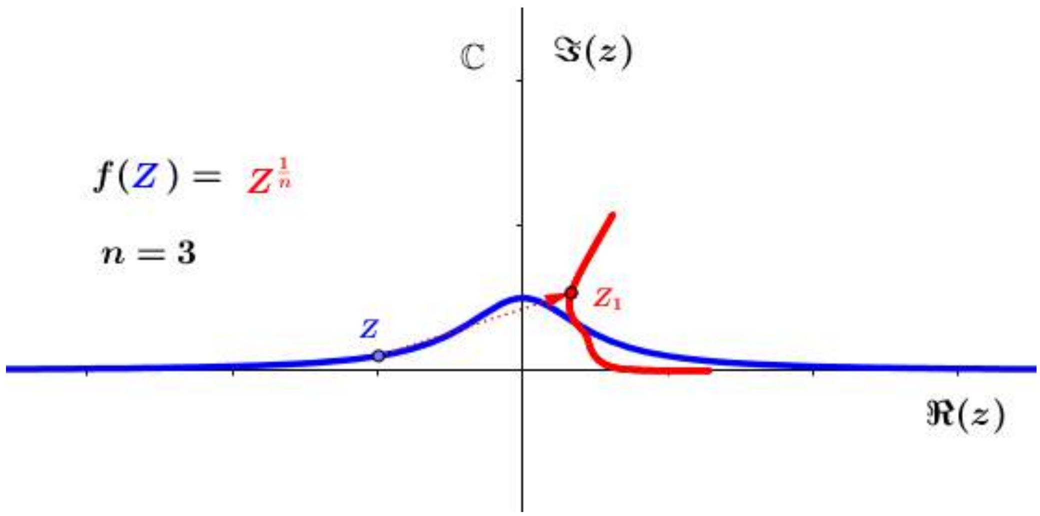
$$y(\theta) = r(\theta)^{\frac{1}{2}}\operatorname{sen}(\frac{\theta + 2\pi}{2}) = -r(\theta)^{\frac{1}{2}}\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})$$

$$0 < \theta < \pi$$

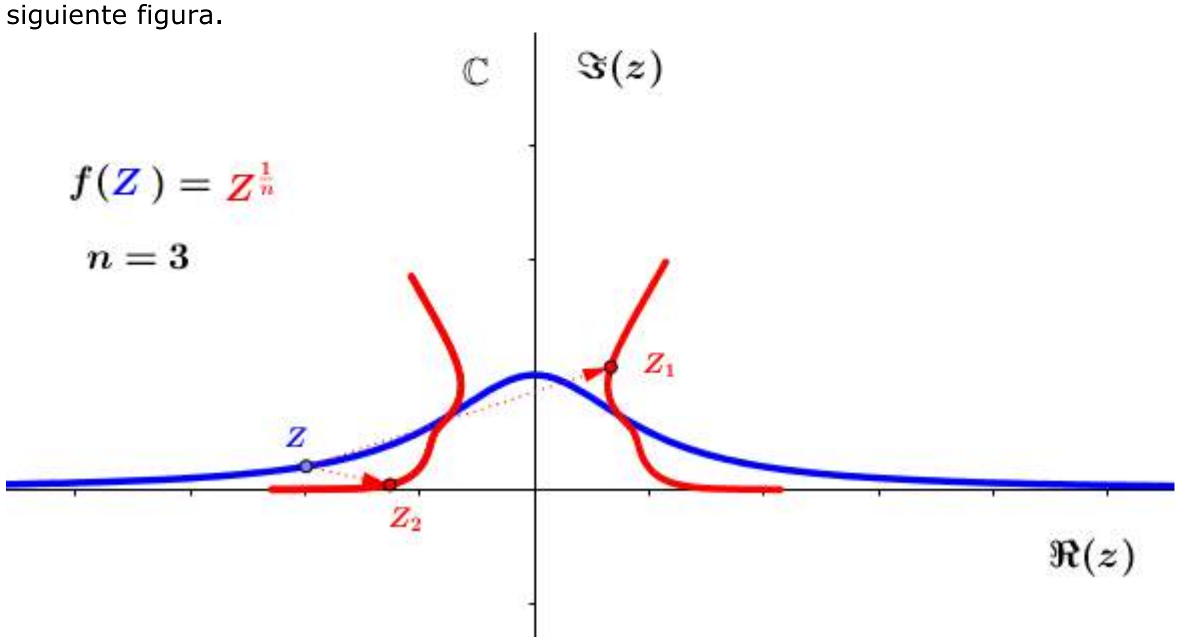
$$r(\pi / 2) = 1$$

b. Caso: Raíz cúbica

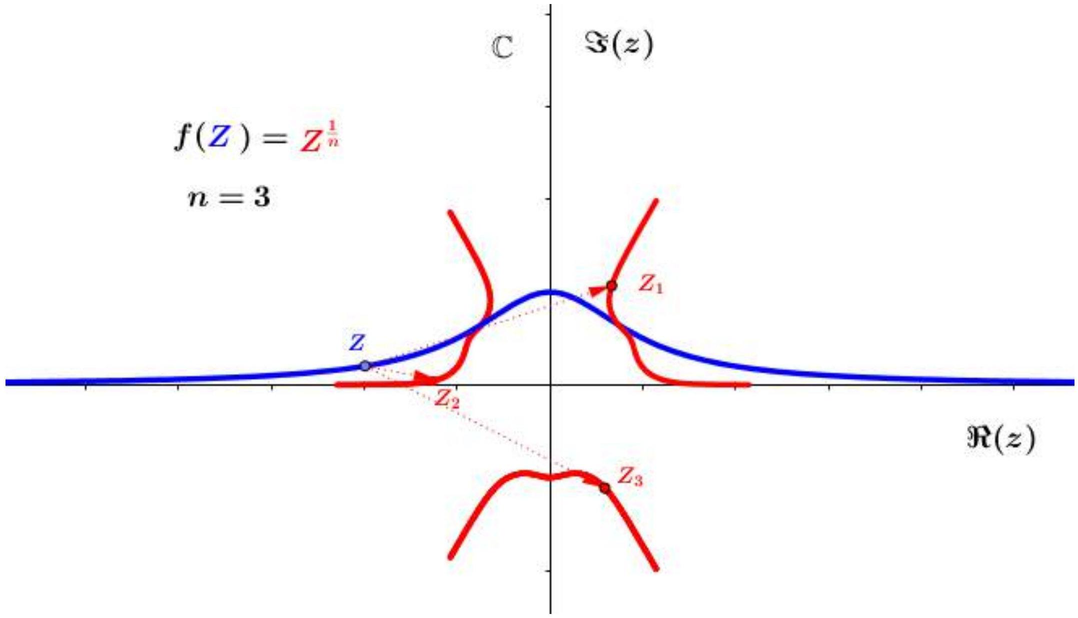
La primera raíz cúbica (k=0) genera el siguiente lugar geométrico



La segunda raíz cúbica (cuando k=1) ubicada en el segundo cuadrante de la siguiente figura.



La tercera raíz cúbica (cuando k=2) ubicada por debajo del eje real, se muestra a continuación



Estas tres curvas (en rojo) representan la imagen de la curva de Agnesi bajo la función $f(z) = z^{\frac{1}{3}}$ y cuyas respectivas ecuaciones paramétricas vienen dadas por

Ecuaciones paramétricas

$$x(\theta) = r(\theta)^{\frac{1}{3}} \cos(\frac{\theta}{3})$$

$$y(\theta) = r(\theta)^{\frac{1}{3}} \operatorname{sen}(\frac{\theta}{3})$$

$$0 < \theta < \pi$$

$$r(\pi / 2) = 1$$

Ecuaciones paramétricas

$$x(\theta) = r(\theta)^{\frac{1}{3}} \cos(\frac{\theta + 2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} r(\theta)^{\frac{1}{3}} \left[\cos(\frac{\theta}{3}) + \sqrt{3} \operatorname{sen}(\frac{\theta}{3})\right]$$

$$y(\theta) = (r(\theta))^{\frac{1}{3}} \operatorname{sen}(\frac{\theta + 2\pi}{3}) = \frac{1}{2} r(\theta)^{\frac{1}{3}} \left[\sqrt{3} \cos(\frac{\theta}{3}) - \operatorname{sen}(\frac{\theta}{3})\right]$$

$$0 < \theta < \pi$$

$$r(\pi / 2) = 1$$

Ecuaciones paramétricas

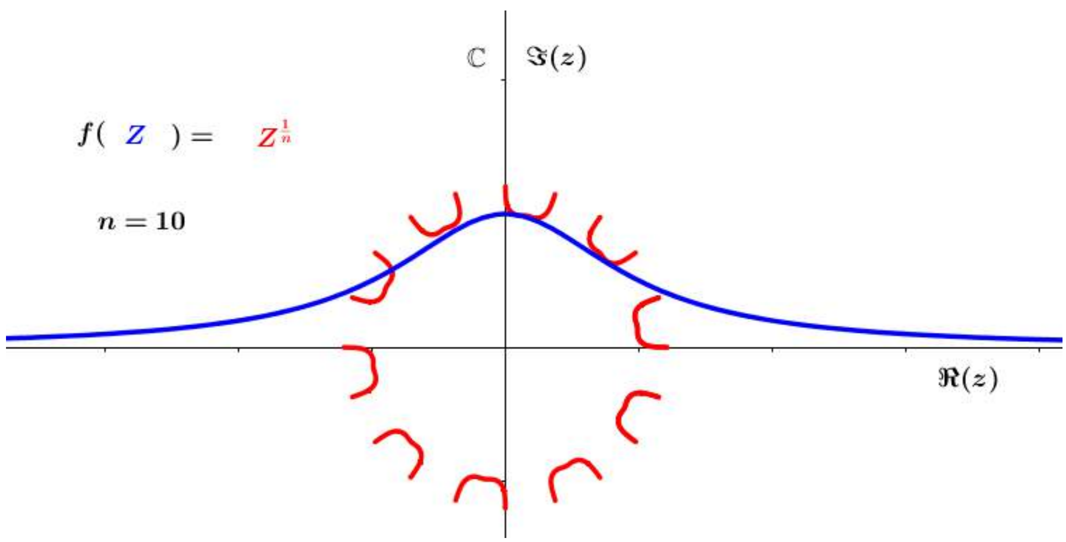
$$x(\theta) = r(\theta)^{\frac{1}{3}} \cos(\frac{\theta + 2\pi}{3}) = \frac{1}{2} r(\theta)^{\frac{1}{3}} \left[\sqrt{3} \operatorname{sen}(\frac{\theta}{3}) - \cos(\frac{\theta}{3}) \right]$$

$$y(\theta) = (r(\theta))^{\frac{1}{3}} \operatorname{sen}(\frac{\theta + 2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} r(\theta)^{\frac{1}{3}} \left[\sqrt{3} \cos(\frac{\theta}{3}) + \operatorname{sen}(\frac{\theta}{3}) \right]$$

$$0 < \theta < \pi$$

$$r(\pi / 2) = 1$$

Para raíces décimas, el conjunto de todos los lugares geométricos generados por las diez raíces tienen el aspecto que aparece a continuación



Las correspondientes ecuaciones paramétricas se pueden encontrar con la siguiente expresión

Ecuaciones paramétricas

$$x(\theta) = r(\theta)^{\frac{1}{n}} \cos(\frac{\theta + 2k\pi}{n})$$

$$y(\theta) = r(\theta)^{\frac{1}{n}} \operatorname{sen}(\frac{\theta + 2k\pi}{n})$$

$$0 < \theta < \pi$$

$$r(\pi / 2) = 1$$