INTRODUCCION A LA LÓGICA DE ENUNCIADOS

Carlos S. Chinea

01. Enunciados:

Lo fundamental en el lenguaje ordinario, la herramienta para manifestar las ideas, sentimientos, descripción de situaciones diversas, etc., es la oración simple declarativa, o enunciado.

Esto quiere decir que no consideraremos enunciados a oraciones simples que no sean declarativas, esto es, a oraciones interrogativas o exclamativas.

Entendemos por enunciado, pues, a un conjunto de palabras que muestran un sentido, donde distinguimos el sujeto y el predicado. Entendiendo por sujeto a uno o varios entes a los que se refiere o relaciona la propiedad que se manifiesta en el enunciado, y predicado es la propiedad que se declara, o que se refiere, al sujeto o sujetos.

La conexión de varios enunciados mediante conjunción, disyunción, implicación, bicondicional o negación, son también enunciados. Un enunciado es simple si no es posible expresarlo como la conexión de otros enunciados.

"La ley es efectiva", es un enunciado simple donde el sujeto es "*la ley*" y el predicado es "*es efectiva*". El predicado muestra una propiedad referida a un único sujeto, *"la ley"*. Se trata, pues, de un enunciado simple con predicado unitario.

Un enunciado puede expresar una propiedad referida a dos sujetos, a tres sujetos, etc. Se dirá que estos enunciados muestran predicados binarios, ternarios, etc.

Ejemplo de predicado binario:

"El euro tiene mayor valor que el dólar". Los sujetos son "*el euro*" y "*el dólar*". Se trata, por consiguiente, de un enunciado simple con predicado binario.

Ejemplo de predicado simple ternario:

"El valor del euro está entre el valor del dólar y el valor de la libra esterlina". Obviamente, los sujetos son *"dólar", "euro", "libra esterlina".* Tenemos aquí, por tanto, un enunciado simple con predicado ternario.

Simbolizaciones:

Si representamos con la letra P al predicado y con la letra S al sujeto, convendremos colocar un superíndice a la P del predicado para indicar si se trata de predicado unitario, binario, ternario, etc. Los sujetos los simbolizaremos colocándo subíndices.

Un ejemplo simbólico de predicado unitario: $P^1 S_1$

Un ejemplo simbólico de predicado binario: $P^2 S_1 S_2$

Un ejemplo simbólico de predicado ternario: $P^3 S_1 S_2 S_3$

02. Enunciados compuestos.

La conexión de varios enunciados simples constituyen también un enunciado, que llamaremos *enunciado compuesto*. Los dos o más enunciados simples que constituyen un enunciado compuesto se denominan sus *componentes*. La conexión de las componentes de un enunciado compuesto se realiza mediante partículas o conectores, que en resumen podemos considerar que son las siguientes:

02.1. Negación:

"no" (negación): simplemente niega lo que afirma un enunciado simple dado. La negación será verdadera si el enunciado negado es falso.

Si simbolizamos por p al enunciado simple dado, entonces $\neg p$ simbolizará la negación del enunciado p.

Valoraciones:

p	$\neg p$
V	F
F	V

(V significa *verdadero* y F significa *falso*)

Ejemplo: Si es $p=$"*mañana es domingo*", entonces simbolizaremos: $\neg p =$"*mañana no es domingo*".

02.2. Conjunción:

"y" (conjunción): establece la validez de dos enunciados simples. Será verdadero si ambos enunciados simples son verdaderos.

Si representamos con los símbolos p y q a dos enunciados simples, entonces el símbolo $p \wedge q$ representará la conjunción de ambos.

Valoraciones:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

(V significa *verdadero* y F significa *falso*)

Ejemplo: Sean p=*"la plata vale más que el bronce"*, y q=*"yo cobro en plata".* Entonces será $p \wedge q =$"la plata vale más que el bronce y yo cobro en plata".

02.3. Disyunción:

"o" (disyunción): establece la validez de uno al menos de dos enunciados simples dados. Será verdadero si al menos uno de los dos enunciados simples conectados son verdaderos.

Si representamos con los símbolos p y q a dos enunciados simples, entonces el símbolo $p \vee q$ representará la disyunción de ambos.

Valoraciones:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

(V significa *verdadero* y F significa *falso*)

Ejemplo: Si p=*"Andrés fue al cine"*, q=*"Andrés fue al fútbol"*, sería $p \vee q$ =*"Andrés fue al cine o Andrés fue al fútbol"*

02.4. Condicional:

"si … entonces" o bien, "implica" (condicional): establece la validez de un enunciado simple (consecuente) con la condición de que tenga validez otro enunciando simple (antecedente). Será verdadero si el antecedente es falso, o si siendo verdadero el antecedente es también verdadero el consecuente. Es decir, solamente será falso si siendo el antecedente verdadero el consecuente es falso.

La simbolización usual es $p \rightarrow q$, donde p representa al enunciado simple antecedente y q representa al enunciado simple consecuente.

Valoraciones:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

(V significa *verdadero* y F significa *falso*)

Ejemplo: Si es p="voy a la ópera", q="no veré el partido de baloncesto", entonces será: $p \rightarrow q =$"Si voy a la ópera entonces no veré el partido de baloncesto".

02.5. Bicondicional:

"… si y solo si …" o bien "… equivale a …" (bicondicional): establece la validez de los dos enunciados simples que lo constituyen, o bien, la falsedad de ambos enunciados simples. Será falso si uno de ellos es verdadero y el otro es falso, y será verdadero si ambos son verdaderos o ambos son falsos.

Para dos enunciados simples, p y q, la simbolización de esta forma de conexión sería $p \leftrightarrow q$.

Valoraciones:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

(V significa *verdadero* y F significa *falso*)

Ejemplo: p=”obtendrás el empleo”, q=”superas el examen de oposición”, entonces será: $p \leftrightarrow q =$”obtendrás el empleo si y solo si superas el examen de oposición”

03. Otros enunciados.

Los enunciados en los que el sujeto es plural, esto es, referido a varios entes presentan en general dos variantes importantes, tales son el caso de referirse a toda la clase de entes o bien a una parte propia de dicha clase. Así, podemos distinguir entre enunciados universales y enunciados particulares.

03.1. Enunciados universales:

Los enunciados universales son enunciados simples de sujeto plural donde se establece una declaración sobre el total de los entes que lo constituyen. Comienza en general con palabras como “todo …”, “todos …”, “toda …”, “todas …”, “para todo …”, “para toda …”.

Un enunciado universal será verdadero si es verdadero el enunciado que resulta de sustituir el sujeto plural por cada uno de los entes que lo constituyen.

El símbolo indicativo de este tipo de enunciados es $\forall$, y se denomina *cuantificador universal*

Ejemplo: Todo individuo nacido en Zaragoza ha nacido en España.

Lo simbolizaríamos, representando por $P_1^1 S$ = *Individuo S nacido en Zaragoza*, $P_2^1 S$ = *Individuo S nacido en España*.

Será: $$(\forall S)\left(S \in P_1^1 S \rightarrow S \in P_2^1 S\right)$$

Leeremos: “Todo individuo S, si S ha nacido en Zaragoza, entonces S ha nacido en España”. ($S \in P_1^1 S$ significa “S pertenece a la clase de los individuos nacidos en Zaragoza”, y $S \in P_2^1 S$ significa “S pertenece a la clase de los individuos nacidos en España”)

03.2. Enunciados particulares:

Los enunciados particulares son enunciados simples de sujeto plural donde se establece una declaración sobre alguno de los entes que lo constituyen. Comienza en general con palabras como “algún …”, “algunos …”, “alguna …”, “algunas …”, “existe un …”, “existe una …”.

Un enunciado particular será verdadero si es verdadero el enunciado que resulta de sustituir el sujeto plural por alguno de los entes que lo constituyen.

El símbolo indicativo de este tipo de enunciados es $\exists$, y se denomina *cuantificador existencial.*

Ejemplo: Algunos individuos nacidos en España han nacido en Zaragoza.

Lo simbolizaríamos, representando por $P_1^1 S$ = *Individuo S nacido en Zaragoza*, $P_2^1 S$ = *Individuo S nacido en España*.

Será: $$(\exists S)\left(S \in P_2^1 S \wedge S \in P_1^1 S\right)$$

Leeremos: "Algunos individuos S, han nacido en España y también han nacido en Zaragoza". ($S \in P_1^1 S$ significa "S pertenece a la clase de los individuos nacidos en Zaragoza", y $S \in P_2^1 S$ significa "S pertenece a la clase de los individuos nacidos en Éspaña")

04. Cuestiones básicas:

04.1. Diferencia entre la mención de un ente y el uso de la mención

En el lenguaje ordinario usamos palabras para mencionar objetos. Así, la palabra *automóvil* se refiere a un objeto con cuatro ruedas y motor. Pero ¿Cómo mencionamos la palabra automóvil?. En todo caso, con la mención "automóvil" nos estamos refiriendo al objeto físico de las cuatro ruedas y el motor, o bien nos estamos refiriendo a la palabra con la que describimos tal objeto físico?. El establecer una diferenciación clara entre la mención de un objeto y el uso de la mención nos evitaría caer en ciertas paradojas.

Para solucionar esta cuestión, podemos, por ejemplo, convenir que si una cierta palabra fue usada para mencionar una entidad, usaremos la misma palabra entre comillas para mencionar a la propia palabra. Así, entonces, *automóvil* es la palabra con la que mencionamos el ente físico de las cuatro ruedas y motor, y *"automóvil"* es la palabra con la que mencionamos a la propia palabra que describe tal ente físico.

Ejemplo:

- *Casa* es una edificación donde generalmente viven las personas.
- *"Casa" es una palabra de dos sílabas.*
- Si P menciona lo mismo que *Casa* entonces P es una edificación, que es distinto de "Casa".
- Si P menciona lo mismo que *"Casa"* entonces P es una palabra de dos sílabas, que es distinto de *Casa.*

04.2. El uso de la igualdad

Cuando mencionamos un mismo ente usando diferentes signos o palabras, podemos indicar que ambas menciones son iguales usando el signo de la igualdad, "=", entre ambas menciones.

Por ejemplo:

- Número natural mayor que 3 y menor que 5 = 4
- Capital de Argentina = Buenos Aires
- 3 + 5 = 2 + 6 = 8
- El autor del Aleph = Jorge Luis Borges

04.3. Metamatemática o metalógica

La creación de un lenguaje simbólico exige en primer lugar establecer un alfabeto de signos, un conjunto de signos, tal que con muchas de sus combinaciones podemos mencionar entes de cualquier naturaleza. Ningún otro signo distinto del conjunto que constituye el alfabeto puede entrar en el lenguaje simbólico.

Sin embargo, podemos idear un alfabeto distinto para simbolizar a los propios signos del alfabeto y a sus combinaciones del lenguaje simbólico creado. Estos otros signos, de este alfabeto distinto, se denominan *metasignos.*

Si con un lenguaje simbólico nos referimos a otro lenguaje simbólico, el primer lenguaje es el *metalenguaje* con el que simbolizamos al segundo, que es el *lenguaje objeto.*

Si con el lenguaje ordinario describimos el lenguaje simbólico, entonces, el lenguaje ordinario es el metalenguaje, y el simbólico es el lenguaje objeto.

Además, cuando usamos la lógica de un lenguaje para la demostración de propiedades dentro de la lógica de otro lenguaje, necesitaríamos distinguir dos lógicas. La primera es la *metalógica* y la segunda es la *lógica objeto.* Si con la lógica del lenguaje ordinario probamos propiedades del lenguaje simbólico, entonces la lógica del lenguaje ordinario es la *metalógica*, y la lógica del lenguaje simbólico es la *lógica objeto.*

05. Ejemplo de construcción de un alfabeto:

05.1. Signos y filas de signos:

Se trataría de construir una clase de signos que representasen constantes sujeto, variables sujeto, constantes predicado y símbolos lógicos de conexión. Podemos llamarlos, por ejemplo, de la manera que sigue

- Constantes Sujeto: $s_1, s_2, s_3, \ldots$
- Variables Sujeto: $x_1, x_2, x_3, \ldots$
- Constantes Predicado: $p^1, p^2, p^3, \ldots$
- Signos lógicos de conexión: $\neg$ (negación), $\wedge$ (conjunción), $\vee$ (disyunción), $\rightarrow$ (implicación), $\leftrightarrow$ (doble implicación), $\forall$ (cuantificador universal), $\exists$ (cuantificador existencial).

La concatenación de estos signos en un número finito es lo que denominamos *una fila de signos*. La clase de una fila de signos es el número de signos que la constituyen.

Así, por ejemplo:

Los signos del alfabeto son filas de clase 1.

Las expresión $p^2 s_1 s_2 \vee q$ es una fila de clase 5.

La fila $\exists q \wedge (\neg p) \forall p$ es de clase 7.

Si A y B son dos filas, llamamos fila concatenada AB a la fila resultante de colocar sucesivamente concatenados los signos de la fila A y después los de la fila B. Las filas A y B son subfilas de tal fila concatenada.

Cada uno de los signos de una fila es una subfila de clase *1*, cada pareja correlativa es una subfila de clase *2*, etc. En una fila de clase n existen n subfilas de clase *1*, *n-1* subfilas de clase *2*, *n-2* subfilas de clase *3*, etc. El total de subfilas propias que podrían extraerse desde una fila de signos de clase n es por tanto

$$n + (n-1) + \ldots + 2 = \frac{1}{2}(n+2)(n-1) \qquad [1]$$

Ejemplo:

En la fila de clase *5* dada por $p^2 s_1 s_2 \vee q$, existen las siguientes subfilas:

Cinco subfilas de clase 1: $p^2, s_1, s_2, \vee, q$
Cuatro subfilas de clase 2: $p^2 s_1, s_1 s_2, s_2 \vee, \vee q$
Tres subfilas de clase 3: $p^2 s_1 s_2, s_1 s_2 \vee, s_2 \vee q$
Dos subfilas de clase 4: $p^2 s_1 s_2 \vee, s_1 s_2 \vee q$

En total hay, por consiguiente, *14* subfilas, número que se corresponde con la aplicación al caso *n=5* en la fórmula [1].

05.2. Fórmulas:

Las *fórmulas* en un alfabeto de signos son aquellas filas que verifican ciertas condiciones referidas a los signos lógicos de conexión, a saber:

- La concatenación de una constante predicado n-aria, p^n, con n signos individuales, $a_1, \ldots, a_n$ (repetidos o no), es una fórmula:

$$p^n a_1 \ldots a_n$$

- La concatenación del signo lógico de igualdad, $=$, con dos signos individuales, a_1, a_2, es una fórmula:

$$a_1 = a_2$$

- La concatenación del signo lógico de negación, $\neg$, con una fórmula cualquiera P es también una fórmula:

$$\neg P$$

- La concatenación del signo de disyunción, $\vee$, con dos fórmulas cualesquiera, P y Q, es también una fórmula:

$$P \vee Q$$

- La concatenación del signo de conjunción, $\wedge$, con dos fórmulas cualesquiera, P y Q, es también una fórmula:

$$P \wedge Q$$

- La concatenación del signo lógico de cuantificación universal, $\forall$, con una variable sujeto, x, y una formula, P, es también una fórmula:

$$(\forall x)P$$

- La concatenación del signo lógico de cuantificación existencial, $\exists$, con una variable sujeto, x, y una formula, P, es también una fórmula:

$$(\exists x)P$$

- La concatenación del signo de implicación simple, $\rightarrow$, con dos fórmulas cualesquiera, P y Q, es también una fórmula:

$$P \rightarrow Q$$

- La concatenación del signo de implicación doble, $\leftrightarrow$, con dos fórmulas cualesquiera, P y Q, es también una fórmula:

$$P \leftrightarrow Q$$

Las fórmulas son, pues, filas de signos que verifican las anteriores condiciones. Cualquier fila de signos que no cumpla alguna de estas condiciones, no es una fórmula. La *clase de una fórmula* es la clase de la fila que la constituye. Aquellas subfilas de una fórmula que también son fórmulas, se denominan *subfórmulas* de la fórmula dada.

Bibliografía:

GONZALEZ CARLOMAN, A.; Lógica Axiomática, Servicio de Publicaciones
Universidad de Oviedo, España, 1978