

## LÓGICA MATEMÁTICA

**Sobre la lógica de conectores**

Los símbolos de conexión de enunciados verbales, o conectores, tienen una importancia capital en la formalización del sistema de la lógica proposicional. En estas notas estudiamos las reglas que se verifican en el uso de los conectores, estableciendo las más simples propiedades en el desarrollo de la formalización del sistema. Aunque no en su totalidad, seguimos en esquema la idea de la obra "Introducción a la Lógica Matemática" del profesor Antonio González Carloman.

**01. Formalización del sistema de la lógica proposicional**

a) Signos del cálculo:

a.1) Variables:

- proposicionales ( $p, q, r, \dots$ ), que representan enunciados verbales
- predicativas ( $P, Q, R, \dots$ ), que representan predicados concretos.

a.2) Signos constantes, o conectores ( $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \dots$ ), que sirven para conectar las variables proposicionales.

b) Reglas de Formación:

b.1) Las fórmulas son las combinaciones de signos elementales.

b.2) Cada variable proposicional es también una fórmula.

b.3) El enlace mediante conectores proposicionales de cualesquiera fórmulas es también una fórmula.

c) Reglas de Transformación:

c.1) La Regla de Sustitución:

- De una fórmula que contenga variables proposicionales puede siempre derivarse otra fórmula sustituyendo uniformemente las variables con nuevas fórmulas.

c.2) La Regla de Separación:

- Dos fórmulas que tengan la forma  $F_1$  y  $F_1 \rightarrow F_2$  derivan siempre la fórmula  $F_2$  (si se verifica  $F_1$  y  $F_1$  implica  $F_2$ , entonces se verifica  $F_2$ ):

$$\left. \begin{array}{l} F_1 \\ F_1 \rightarrow F_2 \end{array} \right\} \rightarrow F_2$$

d) Los Axiomas:

Consideremos los cuatro axiomas que fueron expuestos por Russell y Whitehead en los "Principia Mathematica":

$$\text{Ax 1: } p \vee p \rightarrow p$$

$$\text{Ax 2: } p \rightarrow p \vee q$$

$$\text{Ax 3: } p \vee q \rightarrow q \vee p$$

$$\text{Ax 4: } (p \rightarrow q) \rightarrow [(r \vee p) \rightarrow (r \vee q)]$$

## 02. Las tablas de verdad de los axiomas de Russell-Whitehead:

Como se observa, en los cuatro axiomas indicados solo figuran los conectores "disyunción" y "implica".

Estas son las cuatro proposiciones que sirvieron de base en los Principia, es decir, las proposiciones inicialmente declaradas con valor de certeza para todo valor de certeza o falsedad de las variables que en ellas intervienen. Al declarar su valor de certeza, al considerarlas tautologías, en realidad se declaran las tablas siguientes:

| $p$ | $p \vee p$ | $p \vee p \rightarrow p$ |
|-----|------------|--------------------------|
| $c$ | $c$        | $c$                      |
| $f$ | $f$        | $c$                      |

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ | $p \rightarrow p \vee q$ |
|-----|-----|------------|--------------------------|
| $c$ | $c$ | $c$        | $c$                      |
| $c$ | $f$ | $c$        | $c$                      |
| $f$ | $c$ | $c$        | $c$                      |
| $f$ | $f$ | $f$        | $c$                      |

| $p$            | $q$            | $p \vee q$ | $q \vee p$ | $p \vee q \rightarrow q \vee p$ |
|----------------|----------------|------------|------------|---------------------------------|
| $\overline{c}$ | $\overline{c}$ | $c$        | $c$        | $c$                             |
| $c$            | $f$            | $c$        | $c$        | $c$                             |
| $f$            | $c$            | $c$        | $c$        | $c$                             |
| $f$            | $f$            | $f$        | $f$        | $c$                             |

| $p$            | $q$            | $r$            | $p \rightarrow q$ | $r \vee p$ | $r \vee q$ | $r \vee p \rightarrow r \vee q$ | $(p \rightarrow q) \rightarrow [(r \vee p) \rightarrow (r \vee q)]$ |
|----------------|----------------|----------------|-------------------|------------|------------|---------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| $\overline{c}$ | $\overline{c}$ | $\overline{c}$ | $c$               | $c$        | $c$        | $c$                             | $c$                                                                 |
| $c$            | $c$            | $f$            | $c$               | $c$        | $c$        | $c$                             | $c$                                                                 |
| $c$            | $f$            | $c$            | $f$               | $c$        | $c$        | $c$                             | $c$                                                                 |
| $c$            | $f$            | $f$            | $f$               | $c$        | $f$        | $f$                             | $c$                                                                 |
| $f$            | $c$            | $c$            | $c$               | $c$        | $c$        | $c$                             | $c$                                                                 |
| $f$            | $c$            | $f$            | $c$               | $f$        | $c$        | $c$                             | $c$                                                                 |
| $f$            | $f$            | $c$            | $c$               | $c$        | $c$        | $c$                             | $c$                                                                 |
| $f$            | $f$            | $f$            | $c$               | $f$        | $f$        | $c$                             | $c$                                                                 |

En estas tablas se observa que una fórmula falsa o insatisfacible implica tanto una proposición cierta como una proposición falsa, esto es, es inconsistente. Por tanto, si el antecedente es falso el consecuente puede ser una fórmula falsa o una fórmula cierta. La tabla correspondiente a la implicación sería:

| $p$            | $q$            | $p \rightarrow q$ |
|----------------|----------------|-------------------|
| $\overline{c}$ | $\overline{c}$ | $c$               |
| $c$            | $f$            | $f$               |
| $f$            | $c$            | $c$               |
| $f$            | $f$            | $c$               |

Asimismo, la disyunción solamente será falsa si ambas fórmulas lo son:

| $p$            | $q$            | $p \vee q$ |
|----------------|----------------|------------|
| $\overline{c}$ | $\overline{c}$ | $c$        |
| $c$            | $f$            | $c$        |
| $f$            | $c$            | $c$        |
| $f$            | $f$            | $f$        |

Y la negación de una fórmula será falsa cuando la fórmula sea cierta:

| $p$            | $\neg p$ |
|----------------|----------|
| $\overline{c}$ | $f$      |
| $f$            | $c$      |

Desde estos cuatro axiomas, podemos justificar cualesquiera otras fórmulas de validez universal encontrando sus correspondientes tablas de verdad, que han de ser ciertas para todas las opciones posibles de las proposiciones constituyentes, o bien, podemos hacer la justificación mediante razonamiento directo desde los axiomas o desde otras fórmulas ya previamente justificadas.

Mostramos en el siguiente apartado, 02, ejemplos de justificación de fórmulas mediante tablas de verdad, y, en 03, otros ejemplos de justificación mediante razonamiento directo.

### 03. Algunos ejemplos de fórmulas básicas universalmente válidas con conectores justificadas mediante tablas de verdad:

Podemos comprobar la verificación de una fórmula dada estableciendo su verificación para cualesquiera que sean las proposiciones que la constituyen. Esto es, obteniendo su tabla de verdad desde las tablas de verdad de los axiomas de Russell-Whitehead.

Veamos de este modo la certeza de algunos ejemplos de fórmulas elementales

#### 03.1 La tautología elemental

$$p \vee (\neg p)$$

*"Se verifica la proposición  $p$  o bien se verifica su negación"*

|           |           |                 |
|-----------|-----------|-----------------|
| $p$       | $\neg p$  | $p \vee \neg p$ |
| $\bar{c}$ | $\bar{f}$ | $\bar{c}$       |
| $f$       | $c$       | $c$             |

#### 03.2 Absorción de disyunción respecto a conjunción

$$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$$

*"La verificación de la proposición  $p$  o bien la verificación de la conjunción de  $p$  y  $q$ , es equivalente a la verificación de la proposición  $p$ "*

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $p \vee (p \wedge q)$ | $p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$ |
|-----|-----|--------------|-----------------------|-----------------------------------------|
| $c$ | $c$ | $c$          | $c$                   | $c$                                     |
| $c$ | $f$ | $f$          | $c$                   | $c$                                     |
| $f$ | $c$ | $f$          | $f$                   | $c$                                     |
| $f$ | $f$ | $f$          | $f$                   | $c$                                     |

### 03.3 Absorción de conjunción respecto a disyunción

$$p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p$$

"La verificación de la proposición  $p$  y la verificación de la disyunción de  $p$  y  $q$ , es equivalente a la verificación de la proposición  $p$ "

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ | $p \wedge (p \vee q)$ | $p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p$ |
|-----|-----|------------|-----------------------|-----------------------------------------|
| $c$ | $c$ | $c$        | $c$                   | $c$                                     |
| $c$ | $f$ | $c$        | $c$                   | $c$                                     |
| $f$ | $c$ | $f$        | $f$                   | $c$                                     |
| $f$ | $f$ | $f$        | $f$                   | $c$                                     |

### 03.4 Distributividad de la disyunción respecto a la conjunción

$$p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

"La disyunción es distributiva con respecto a la conjunción"

| $p$ | $q$ | $r$ | $q \wedge r$ | $p \vee q$ | $p \vee r$ | $p \vee (q \wedge r)$ | $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ | $p \vee (q \wedge r) \rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ |
|-----|-----|-----|--------------|------------|------------|-----------------------|--------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| $c$ | $c$ | $c$ | $c$          | $c$        | $c$        | $c$                   | $c$                            | $c$                                                            |
| $c$ | $c$ | $f$ | $f$          | $c$        | $c$        | $c$                   | $c$                            | $c$                                                            |
| $c$ | $f$ | $c$ | $f$          | $c$        | $c$        | $c$                   | $c$                            | $c$                                                            |
| $c$ | $f$ | $f$ | $f$          | $c$        | $c$        | $c$                   | $c$                            | $c$                                                            |
| $f$ | $c$ | $c$ | $c$          | $c$        | $c$        | $c$                   | $c$                            | $c$                                                            |
| $f$ | $c$ | $f$ | $f$          | $c$        | $f$        | $f$                   | $f$                            | $c$                                                            |
| $f$ | $f$ | $c$ | $f$          | $f$        | $c$        | $f$                   | $f$                            | $c$                                                            |
| $f$ | $f$ | $f$ | $f$          | $f$        | $f$        | $f$                   | $f$                            | $c$                                                            |

### 03.5 Distributividad de la conjunción respecto a la disyunción

$$p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

"La conjunción es distributiva con respecto a la disyunción"

| $p$       | $q$       | $r$       | $q \vee r$ | $p \wedge q$ | $p \wedge r$ | $p \wedge (q \vee r)$ | $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ | $p \wedge (q \vee r) \rightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ |
|-----------|-----------|-----------|------------|--------------|--------------|-----------------------|----------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| $\bar{c}$ | $\bar{c}$ | $\bar{c}$ | $\bar{c}$  | $\bar{c}$    | $\bar{c}$    | $\bar{c}$             | $\bar{c}$                        | $\bar{c}$                                                        |
| $c$       | $c$       | $f$       | $c$        | $c$          | $f$          | $c$                   | $c$                              | $c$                                                              |
| $c$       | $f$       | $c$       | $c$        | $f$          | $c$          | $c$                   | $c$                              | $c$                                                              |
| $c$       | $f$       | $f$       | $f$        | $f$          | $f$          | $f$                   | $f$                              | $c$                                                              |
| $f$       | $c$       | $c$       | $c$        | $f$          | $f$          | $f$                   | $f$                              | $c$                                                              |
| $f$       | $c$       | $f$       | $c$        | $f$          | $f$          | $f$                   | $f$                              | $c$                                                              |
| $f$       | $f$       | $c$       | $c$        | $f$          | $f$          | $f$                   | $f$                              | $c$                                                              |
| $f$       | $f$       | $f$       | $f$        | $f$          | $f$          | $f$                   | $f$                              | $c$                                                              |

### 03.6 Propiedad de abreviación

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$$

"La implicación es equivalente a la disyunción de la negación del antecedente con el consecuente"

| $p$       | $q$       | $p \rightarrow q$ | $\neg p$ | $\neg p \vee q$ | $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ |
|-----------|-----------|-------------------|----------|-----------------|-----------------------------------------------------|
| $\bar{c}$ | $\bar{c}$ | $\bar{c}$         | $f$      | $c$             | $c$                                                 |
| $c$       | $f$       | $f$               | $f$      | $f$             | $c$                                                 |
| $f$       | $c$       | $c$               | $c$      | $c$             | $c$                                                 |
| $f$       | $f$       | $c$               | $c$      | $c$             | $c$                                                 |

## 04. Ejemplos de fórmulas básicas universalmente válidas con conectores justificadas por razonamiento directo:

En las siguientes fórmulas empleamos el razonamiento directo a partir de las formulas anteriores para justificar que son también universalmente válidas:

### 04.01 Transitividad de la equivalencia

$$[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)] \rightarrow (p \leftrightarrow r)$$

"Si  $p$  es equivalente a  $q$  y  $q$  es equivalente a  $r$ , entonces  $p$  es equivalente a  $r$ "

La prueba consiste simplemente en sustituir en la primera implicación la  $q$  por su equivalente,  $r$ .

#### 04.02 Idempotencia de la conjunción y la disyunción

$$p \wedge p \Leftrightarrow p \quad p \vee p \Leftrightarrow p$$

*"Tanto la conjunción como la disyunción son idempotentes"*

Prueba: aplicamos dos veces las propiedades 03.2 y 03.3, de absorción de la conjunción respecto a la disyunción y viceversa:

$$\begin{aligned} p \vee p &\Leftrightarrow p \vee (p \wedge (p \vee q)) \Leftrightarrow p \\ p \wedge p &\Leftrightarrow p \wedge (p \vee (p \wedge q)) \Leftrightarrow p \end{aligned}$$

#### 04.3 Disyunción de la contradicción y conjunción de la tautología elemental

$$p \vee (p \wedge (\neg p)) \Leftrightarrow p \quad p \wedge (p \vee (\neg p)) \Leftrightarrow p$$

*"La disyunción de  $p$  con la contradicción es equivalente a  $p$ . Asimismo, la conjunción de  $p$  con la tautología elemental es equivalente a  $p$ "*

Prueba: usar también aquí la propiedad de absorción mostrada en 03.2 y 03.3:

$$p \vee (p \wedge (\neg p)) \Leftrightarrow p \quad p \wedge (p \vee (\neg p)) \Leftrightarrow p$$

#### 04.04 Conmutatividad de la conjunción

$$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$$

*"Es equivalente que se verifique  $p$  y  $q$  a que se verifique  $q$  y  $p$ "*

Para probarlo basta considerar que la verificación de la conjunción es lo mismo que la no verificación de la disyunción de las negaciones, y que la disyunción conmuta por el axioma 3 de Russell-Whitehead:

$$p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow \neg(\neg q \vee \neg p) \Leftrightarrow q \wedge p$$

#### 04.05 Involución de la negación

$$p \leftrightarrow \neg(\neg p)$$

*"La negación de la negación de p equivale a p"*

Para hacer la prueba empleamos la propiedad 04.3 de disyunción de p con la contradicción, para luego usar la propiedad distributiva de la disyunción con respecto a la conjunción obteniéndose la conjunción de la tautología elemental con otra formula, y finalmente aplicamos la propiedad distributiva de la disyunción con respecto a la conjunción quedando la disyunción de la tautología elemental con la negación de la negación de p, por lo que usando de nuevo 04.3 y terminamos.

$$\begin{aligned} p &\leftrightarrow p \vee (\neg p \wedge \neg(\neg p)) \leftrightarrow (p \vee \neg p) \wedge (p \vee \neg(\neg p)) \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow (\neg p \vee \neg(\neg p)) \wedge (p \vee \neg(\neg p)) \leftrightarrow (\neg p \wedge p) \vee \neg(\neg p) \leftrightarrow \neg(\neg p) \end{aligned}$$

#### 04.06 Complementación en conjuncion

$$\neg(p \wedge (\neg p))$$

*"Se verifica la negación de la conjunción de p con su negación, o bien, la negación de la contradicción"*

Se puede probar que equivale a la tautología elemental usando dos veces la involución de la negación:

$$\neg(p \wedge \neg p) \leftrightarrow \neg[\neg(\neg p \vee \neg(\neg p))] \leftrightarrow (\neg p \vee p) \leftrightarrow (p \vee \neg p)$$

#### 04.7. Ley de De Morgan para la conjuncion

$$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$$

*"La negación de la conjunción equivale a la disyunción de las negaciones"*

Prueba usando la involución de la negación:

$$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg[\neg((\neg p) \vee (\neg q))] \leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$$

#### 04.08 Ley de De Morgan para la disyunción

$$\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$$

*"La negación de la disyunción equivale a la conjunción de las negaciones"*



La prueba es del todo análoga al caso anterior:

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg[\neg((\neg p) \wedge (\neg q))] \Leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$$

#### 04.09 Disyunción por medio de negación y conjunción

$$p \vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

*"La disyunción es equivalente a la negación de la conjunción de las negaciones"*

Prueba: bastará con usar la propiedad de idempotencia de la negación y luego la ley de De Morgan de la disyunción:

$$p \vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p) \vee \neg(\neg q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

#### 04.10 Equivalencia entre la tautología elemental y la negación de la contradicción

$$p \vee (\neg p) \Leftrightarrow \neg(p \wedge (\neg p))$$

*"La negación de la contradicción es equivalente a la tautología elemental"*

Prueba: partiendo de la tautología elemental, utilizamos la idempotencia de la negación y aplicamos la ley de De Morgan de la conjunción, y finalmente, la propiedad conmutativa de la conjunción:

$$p \vee \neg p \Leftrightarrow \neg[\neg(p \vee \neg p)] \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg(\neg p)) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg p)$$

#### 04.11 Conjunción por medio de negación y disyunción

$$p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$$

*"La conjunción es equivalente a la negación de la disyunción de las negaciones"*

Prueba: usamos la propiedad de idempotencia de la negación y la ley de De Morgan de la disyunción:

$$p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p) \wedge \neg(\neg q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$$

**04.12 Asociatividad en disyunción y en conjunción**

$$p \vee (q \vee r) \leftrightarrow (p \vee q) \vee r \quad p \wedge (q \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$$

*"Tanto la disyunción como la conjunción tienen la propiedad asociativa"*

La prueba consiste en aplicar sistemáticamente la propiedad distributiva de conjunción respecto a disyunción y viciversa, las propiedades de absorción, la conjunción con la tautología elemental o la disyunción con la contradicción:

$$\begin{aligned} (p \vee q) \vee r &\leftrightarrow [(p \vee q) \vee r] \wedge [p \vee \neg p] \leftrightarrow [(p \vee q) \vee r] \wedge p \vee [(p \vee q) \vee r] \wedge \neg p \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow [((p \vee q) \wedge p) \vee (r \wedge p)] \vee [((p \vee q) \wedge \neg p) \vee (r \wedge \neg p)] \leftrightarrow [p \vee (r \wedge p)] \vee \\ &\vee [(p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg p) \vee (r \wedge \neg p)] \leftrightarrow p \vee [(q \wedge \neg p) \vee (r \wedge \neg p)] \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow p \vee [(q \vee r) \wedge \neg p] \leftrightarrow p \vee (q \vee r) \wedge (p \vee \neg p) \leftrightarrow p \vee (q \vee r) \end{aligned}$$

**04.13 Disyunción de la tautología elemental y conjunción de la contradicción**

$$p \vee (p \vee \neg p) \leftrightarrow p \vee \neg p \quad p \wedge (p \wedge \neg p) \leftrightarrow p \wedge \neg p$$

*"La disyunción de una formula cualquiera con la tautología elemental es equivalente a la tautología elemental y la conjunción de una formula cualquiera con la contradicción es equivalente a la contradicción"*

La prueba: aplicar respectivamente la asociatividad de la disyunción para el primer caso y la asociatividad de la conjunción para el segundo, junto con la propiedad de idempotencia

$$\begin{aligned} p \vee (p \vee \neg p) &\leftrightarrow (p \vee p) \vee \neg p \leftrightarrow p \vee \neg p \\ p \wedge (p \wedge \neg p) &\leftrightarrow (p \wedge p) \wedge \neg p \leftrightarrow p \wedge \neg p \end{aligned}$$

**04.14 Antisimetría de la implicación lógica**

$$\left. \begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow p \end{array} \right\} \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$$

*"Si una proposición, p, implica a otra, q, y ésta implica la primera, ambas son equivalentes"*

La prueba: ambas implicaciones son por separado universalmente válidas, luego la equivalencia también lo es.

**04.15 Contrarreciprocidad de la implicación**

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$$

*"Una implicación de una proposición a otra es equivalente a la implicación recíproca de sus contrarias"*

*La prueba: Empleamos la propiedad de abreviación, el axioma de conmutatividad de la disyunción, Ax.3, la idempotencia de la negación y, finalmente, de nuevo la propiedad de abreviación.*

$$p \rightarrow q \leftrightarrow \neg p \vee q \leftrightarrow q \vee \neg p \leftrightarrow \neg \neg q \vee \neg p \leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$$

**04.16 Implicación en disyunción**

$$p \rightarrow p \vee q$$

*"Una proposición cualquiera p implica la disyunción de p con cualquier otra proposición q"*

Prueba: probamos que equivale a la tautología elemental, para lo cual utilizamos la propiedad de abreviación, la asociatividad de la disyunción y la disyunción con la tautología elemental.

$$p \rightarrow p \vee q \leftrightarrow \neg p \vee (p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \vee p) \vee q \leftrightarrow \neg p \vee p$$

**04.17 Implicación de conjunción**

$$p \wedge q \rightarrow p$$

*"La conjunción de dos proposiciones implica una cualquiera de ellas"*

La prueba de que esta proposición es equivalente a la tautología elemental, consiste en utilizar la propiedad de contrarreciprocidad, la ley de De Morgan de la conjunción y, finalmente, la propiedad de implicación en disyunción, 04.15.

$$p \wedge q \rightarrow p \leftrightarrow (\neg p \rightarrow \neg(p \wedge q)) \leftrightarrow (\neg p \rightarrow \neg p \vee \neg q) \leftrightarrow \neg p \vee p$$

**04.18 Conjunción de implicaciones de antecedente fijo**

$$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow q \wedge r)$$

"Si una proposición  $p$  implica la proposición  $r$  y también  $p$  implica la proposición  $q$ , esto es equivalente a que  $p$  implica la conjunción de  $q$  y  $r$ "

La prueba más simple consiste en utilizar la propiedad de abreviación y después la propiedad distributiva de la disyunción con respecto a la conjunción, para finalmente aplicar nuevamente la propiedad de abreviación.

$$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \leftrightarrow \neg p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \wedge r))$$

**04.19 Disyunción de implicaciones de antecedente fijo**

$$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow q \vee r)$$

"La disyunción de la implicación de  $p$  a  $q$  con la implicación de  $p$  a  $r$  es equivalente a la implicación de  $p$  a la disyunción de  $q$  y  $r$ "

La prueba se puede hacer empleando la propiedad de abreviación, el axioma de conmutatividad de la disyunción, la propiedad asociativa de la disyunción, la idempotencia de la disyunción y finalmente de nuevo la propiedad de abreviación.

$$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \leftrightarrow (\neg p \vee q) \vee (\neg p \vee r) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg p) \vee (q \vee r) \leftrightarrow (\neg p \vee (q \vee r)) \leftrightarrow p \rightarrow (q \vee r)$$

**04.20 Conjunción de implicaciones de consecuente fijo**

$$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \vee q \rightarrow r)$$

"Si una proposición  $p$  implica la proposición  $r$  y también la proposición  $q$  implica la proposición  $r$ , esto resulta equivalente a que la disyunción de  $p$  y  $q$  implica la proposición  $r$ "

Para hacer la prueba empleamos la contrarreciprocidad, a continuación la propiedad 04.17 anterior, después la ley de De Morgan de la disyunción y finalmente de nuevo la contrarreciprocidad

$$\begin{aligned} (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) &\leftrightarrow (\neg r \rightarrow \neg p) \wedge (\neg r \rightarrow \neg q) \leftrightarrow \neg r \rightarrow (\neg p \vee \neg q) \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow (\neg r \rightarrow \neg(p \wedge q)) \leftrightarrow (p \vee q \rightarrow r) \end{aligned}$$

#### 04.21 Disyunción de implicaciones de consecuente fijo

$$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q \rightarrow r)$$

"La disyunción de la implicación de  $p$  a  $r$  con la implicación de  $q$  a  $r$  es equivalente a la implicación de la conjunción de  $p$  y  $q$  a  $r$ "

La prueba puede hacerse empleando la propiedad de contrarreciprocidad, la propiedad 04.18 anterior, la ley de De Morgan de la conjunción y de nuevo la contrarreciprocidad.

$$\begin{aligned} (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) &\Leftrightarrow (\neg r \rightarrow \neg p) \vee (\neg r \rightarrow \neg q) \Leftrightarrow (\neg r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\neg r \rightarrow \neg(p \wedge q)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r) \end{aligned}$$

#### 04.22 Transitividad de la implicación

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

"Si una proposición  $p$  implica la proposición  $q$  y ésta implica la proposición  $r$ , entonces también  $p$  implica la proposición  $r$ "

La prueba puede efectuarse probando que tal fórmula es equivalente a la tautología elemental. Para ello usamos la propiedad de abreviación, la ley de De Morgan de la disyunción, la propiedad asociativa de la disyunción, así como su propiedad conmutativa, la idempotencia de la negación y la propiedad de conjunción y disyunción de la tautología elemental.

$$\begin{aligned} [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)] &\Leftrightarrow [((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)) \rightarrow (\neg p \vee r)] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)) \vee (\neg p \vee r) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee r)) \vee (\neg p \vee r) \Leftrightarrow ((\neg \neg p \wedge \neg q) \vee (\neg \neg q \wedge \neg r)) \vee (\neg p \vee r) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow ((\neg \neg p \wedge \neg q) \vee (\neg \neg q \wedge \neg r)) \vee (\neg p \vee r) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r)) \vee (\neg p \vee r) \Leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee \neg p) \vee ((q \wedge \neg r) \vee r) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p) \vee ((q \vee r) \wedge (\neg r \vee r)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\neg q \vee \neg p) \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (\neg q \vee q) \vee (\neg p \vee r) \Leftrightarrow \neg q \vee q \end{aligned}$$

#### 04.23 Negación de una implicación

$$\neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$$

*"La negación de una implicación es equivalente a la conjunción del antecedente con la negación del consecuente"*

Para probarlo basta usar la propiedad de abreviación y la ley de De Morgan de la disyunción.

$$\neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow \neg \neg p \wedge \neg q \Leftrightarrow p \wedge \neg q$$

#### 04.24 Implicación de la implicación

$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow p \wedge q \rightarrow r$$

*"La implicación de una implicación es equivalente a una sola implicación cuyo antecedente es la conjunción de ambos antecedentes y consecuente el segundo de los consecuentes"*

La prueba se puede hacer aplicando la propiedad de abreviación para ambas implicaciones, la propiedad asociativa de la disyunción y la ley de De Morgan para la conjunción, para finalmente, aplicar de Nuevo la propiedad de abreviación.

$$\begin{aligned} p \rightarrow (q \rightarrow r) &\Leftrightarrow \neg p \vee (q \rightarrow r) \Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee r) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee r \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow p \wedge q \rightarrow r \end{aligned}$$

#### 05 Bibliografía:

Ackermann, W.; Zur Axiomatik der Mengenlehre, Mathematische Annalen 131, 1956  
 Bernays, P.-Fraenkel, A.; Axiomatic Set Theory, North-Holland, Amsterdam, 1958  
 Gödel, K.; Über formal Unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter System I, Monatshefte für Mathematik und Physik, 1931.  
 González Carloman, A., Introducción a la Lógica Matemática, Servicio de publicaciones de la Universidad de Oviedo, 1979  
 Ladriere, J.; Limitaciones internas de los formalismos, Ed. Tecnos, 1969  
 Nidditch, P.H.; El desarrollo de la lógica matemática, Ed. Catedra, Madrid, 1987