Construyendo la función logaritmo

Carmen SÁNCHEZ DÍEZ

Resumen
Partiendo de la transmsión de la propiedad de derivabilidad a la función inversa es posible obtener una estructura básica para la función logaritmo como inversa de una cierta función real, estrictamente positiva y homomorfismo de grupos, que toma en el origen el valor de la unidad. Para construir tal homomorfismo con las condiciones indicadas partimos de la definición de exponencial con variable entera y su extensión a la exponenciación de variable racional.

0. Introducción. La función exponencial racional:

Consideremos un grupo multiplicativo $(G,.)$, cuyo elemento unidad representaremos por 1. Intentemos definir la función exponencial sobre sus elementos.

0.1. Exponenciación de variable entera:

Definimos la función exponencial de variable entera

$$f : Z \to R_+$$

mediante las condiciones:

$$\forall n \in Z, \forall a \in R_+, \quad \begin{array}{ll} 1)\ f(0) = a^0 = 1 & [0.1] \\ 2)\ f(n) = a^n = a^{n-1}.a & [0.2] \\ 3)\ f(-n) = a^{-n} = \left(a^{-1}\right)^n & [0.3] \end{array}$$

Teorema 0.1: Si es (G,.) un grupo multiplicativo, entonces se verifica que

$$\forall a \in G,\ a^m.a^n = a^{m+n}, \quad \forall m,n \in Z$$

Demostración:
Aplicamos inducción. Sea el conjunto $S = \{n \in Z / a^n.a^m = a^{n+m}, \forall m \in Z, \forall a \in R\}$. Si probamos que $\forall n \in Z, n \in S$, entonces será $Z \subseteq S$ y por tanto, $Z = S$, lo que nos indicaría que la relación se verificará para todo par de enteros *n, m.*
Veámosla para el caso de exponentes positivos (n>0):
1) $0 \in S,$ pues $a^0.a^m = 1.a^m = a^m = a^{0+m}$ por [0.1]
2) $1 \in S,$ pues $a^1.a^m = a.a^m = a^{1+m}$ por [0.2]
3) Veamos ahora que si $n-1 \in S$ entonces $n \in S$:

$$n-1 \in S \to a^{n-1}.a^m = a^{n-1+m} \to a^1.a^{n-1}.a^m = a^1.a^{n-1+m} \to (a^1.a^{n-1}).a^m = a^{n+m} \to$$
$$\to a^n.a^m = a^{n+m} \to n \in S$$

4) Para ver que también es cierta para exponentes negativos, tengamos en cuenta que, por definición [0.3], es $a^{-n}=\left(a^{-1}\right)^{n}, \forall n \in Z$, con lo cual:

$$a^{-n}.a^{-m}=(a^{-1})^{n}(a^{-1})^{m}=(a^{-1})^{n+m}=a^{-(n+m)}$$

En definitiva, al definir la exponenciación de variable entera nos encontramos con que la función exponencial $f(n)=a^{n}, \forall n \in Z$ verifica las condiciones:

a) $f(0)=1$
b) $f(n)=f(n-1).f(1)$
c) $f(n+m)=f(n).f(m)$

Y tal función no podrá anularse para $n=1$, pues si $f(1)=0$ entonces la función se anularía para todo n, pues sería $f(n)=f(n-1).f(1)$ =0. Por consiguiente $f(1)\neq 0$.
Su inversa, $f^{-1}:R_{+}\rightarrow R$ verificaría que $f^{-1}(1)=0$, ya que $f(0)=1$. Representaremos a la inversa de la función exponencial por

$$f^{-1}(x)=\log_{a}(x)$$

que llamaremos función logaritmo en base a. Verificando, pues, que $\log_{a}(1)=0$.

0.2. Exponenciación de variable racional:
Sin embargo, para poder estudiar la función logaritmo, como función de variable real, hemos de extender la función exponencial definida para variable entera, a los números reales. Veamos primero su extensión a los números racionales:
Puesto que interesaría que $a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{1}{n}}+...(m)...+a^{\frac{1}{n}}$, podemos definir, $\forall a \in R_{+}$:

a) $f\left(1/n\right)=a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}, n\in Z_{+}$

b) $f\left(m/n\right)=a^{\frac{m}{n}}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^{m}, n\in Z_{+}, m\in Z$

Cumpliéndose

$$f\left(m/n\right)+f\left(p/q\right)=a^{\frac{m}{n}}+a^{\frac{p}{q}}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^{m}+\left(\sqrt[q]{a}\right)^{p}=\left(\sqrt[nq]{a}\right)^{mq}+\left(\sqrt[qn]{a}\right)^{np}=\left(\sqrt[qn]{a}\right)^{mq+np}=$$
$$=a^{\frac{mq+np}{qn}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}=f\left(m/n+p/q\right)$$

En definitiva, la función exponencial de variable racional, $f(x)=a^{x}, \forall x \in Q$ verifica:

a) $f(0)=1$
b) $f(1)\neq 0$
c) $f(x+y)=f(x).f(y)$

1. La función exponencial de exponente irracional:
El extender la función exponencial de variable entera al caso racional ha sido sencillo debido a que todo número racional se expresa como el cociente de dos enteros, y la prueba de las propiedades se reduce, en realidad, a la prueba para números enteros.

Esto no ocurre en el caso de exponente irracional, porque no es posible expresar un número irracional como función sencilla de enteros. Sin embargo, podemos guiarnos por las condiciones que cumple la exponencial de variable racional, procurando que la función exponencial de variable real tenga tales propiedades, o bien se deduzcan a partir de ella las propiedades ya enumeradas del caso de variable racional.

Pretendemos, pues, que la función de variable real, $y = f(x)$, sea derivable y verifique las condiciones ya indicadas para el caso racional:

a) $f(0) = 1$
b) $f(1) \neq 0$
c) $f(x+y) = f(x).f(y)$

1.1. La derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x).f(h) - f(x)}{h} = f(x) \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - 1}{h} = \omega.f(x)$$

donde hemos llamado ω a la constante $\lim_{h \to 0} \frac{f(h)-1}{h}$, caso de que exista el límite.

En definitiva, es $f'(x) = \omega.f(x)$

1.2. La derivada de la función inversa. Obtención de la función logaritmo:

1.2.1.Veamos cómo obtener la derivada de la función inversa de la función exponencial $y = f(x) = a^x, y > 0$.

Consideremos la inversa $x = f^{-1}(y), y > 0$, determinemos cómo podría ser su derivada:

$y = f(x) = f\left[f^{-1}(y)\right],\ y > 0$ es decir, $y = f\left[f^{-1}(y)\right],\ y > 0$, o bien, como la variable es muda, podemos escribir: $x = f\left[f^{-1}(x)\right], x > 0$.

Al derivar: $1 = f'\left[f^{-1}(x)\right] f^{-1}(x)' \to f^{-1}(x)' = \dfrac{1}{f'\left[f^{-1}(x)\right]} = \dfrac{1}{\omega f\left[f^{-1}(x)\right]} = \dfrac{1}{\omega x}, x > 0$

1.2.2. Obtengamos la función inversa mediante una integral:

En definitiva, la función inversa de la exponencial de variable real, la función logaritmo, ha de cumplir:

$$f^{-1}(x)' = \left(\log_a(x)\right)' = \frac{1}{\omega x}, x > 0$$

que podríamos determinar por la integral:

$$\log_a(x)\Big|_h^k = \log_a(k) - \log_a(h) = \frac{1}{\omega}\int_h^k \frac{dx}{x}$$

salvo el factor desconocido $(1/\omega)$. Si integramos entre 1 y x, $x > 0$, podemos expresar:

$$\log_a(x)\Big|_1^x = \log_a(x) - \log_a(1) = \log_a(x) - 0 = \frac{1}{\omega}\int_1^x \frac{dx}{x} \to \log_a(x) = \frac{1}{\omega}\int_1^x \frac{dx}{x} \qquad [1.2.2]$$

2. La función logaritmo natural:

2.1. Definición

La dificultad de no conocer el factor $(1/\omega)$ podríamos obviarla definiendo la función logaritmo en la forma

$$\log(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

confiando en que el factor desconocido se haga 1 en alguna base, lo que podremos determinar más tarde. Llamaremos a esta función, "función logaritmo natural", que representaremos por $L(x)$:

$$L : R_+ \to R$$

$$\forall x \in R_+,\ L(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} \in R$$

y se cumplirá, para otra base cualquiera, a, que

$$L(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} = \omega.\log_a(x)$$

2.2. Propiedades elementales

Teorema 2.2:
Se verifica que:

1) $L(1) = 0$
2) $L'(x) = 1/x,\ \forall x > 0$
3) $L(x.y) = L(x) + L(y)$

Demostración:

1) $L(1) = \int_1^1 \frac{dt}{t} = 0$

2) Siendo $L(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ por el Teor. Fundamental del cálculo, es $L'(x) = 1/x,\ \forall x > 0$

3) Llamemos $f(x) = L(x.y)$, con $y > 0$. Y para cada y fijo se tiene que es

$$f'(x) = L'(xy) = \frac{1}{xy} y = \frac{1}{x} = L'(x) \to f'(x) = L'(x) \to f(x) = L(xy) = L(x) + k$$

Como para $x = 1$ es $f(1) = L(1.y) = L(1) + k = 0 + k \to L(y) = k$, por lo que se tiene:

$$L(x.y) = L(x) + k = L(x) + L(y)$$

En definitiva, $\forall x, y > 0,\ L(x.y) = L(x) + L(y)$

Corolario: $\forall x > 0, \forall n \in N,\ L(x^n) = n.L(x)$

Demostración: Aplicando inducción, consideremos el conjunto de los números naturales que verifican la relación, $S = \{n \in N / L(x^n) = n.L(x)\}$, y probemos que tal conjunto coincide con N.

a) $L(x^0) = L(1) = 0$, y también $0.L(x) = 0$, por tanto: $L(x^0) = 0.L(x) \rightarrow 0 \in S$

b) $L(x^1) = L(x) = 1.L(x) \rightarrow 1 \in S$

c) Probemos que si $k \in S$ entonces $k+1 \in S$:

$$k \in S \rightarrow L(x^k) = k.L(x) \rightarrow L(x^{k+1}) = L(x^k.x) = L(x^k) + L(x) = k.L(x) + L(x) =$$
$$= (k+1).L(x),\ o\ sea: L(x^{k+1}) = (k+1).L(x) \rightarrow k+1 \in S$$

Corolario: $L\left(\dfrac{x}{y}\right) = L(x) - L(y),\ \forall x, y > 0$

Demostración: $L(x) = L\left(\dfrac{x}{y}.y\right) = L\left(\dfrac{x}{y}\right) + L(y) \rightarrow L\left(\dfrac{x}{y}\right) = L(x) - L(y)$

2.3. Otras propiedades

La función logaritmo natural verifica propiedades sencillas que permiten construir la gráfica y determinar el valor de la función para todo elemento de su dominio.

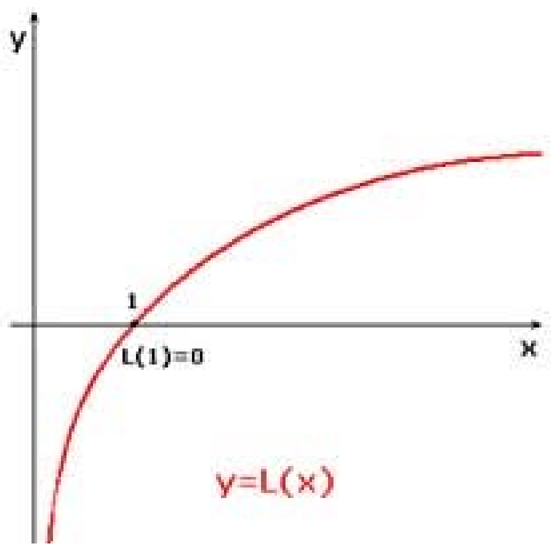
Teorema 2.3.1:
La función logaritmo natural es continua, estrictamente creciente y cóncava.
Demostración:

a) $y = L(x)$ es derivable, $y' = 1/x$, por tanto es continua.

b) Puesto que $y = L(x)$ está definida para $x>0$, se tiene que $y'=1/x>0$, lo que indica que es estrictamente creciente.

c) La segunda derivada de $y = L(x)$ es negativa: $y'' = (1/x)' = -1/x^2 < 0$, por tanto es cóncava, $\forall x \in R_+$.

Se puede representar en un diagrama cartesiano x,y de la forma:



Teorema 2.3.2:
La función logaritmo natural es no acotada.
Demostración:

a) No tiene cota superior. Si suponemos que M es cota superior de L, es decir, que $L(x) \leq M, \forall x \in R_+$ llegaríamos a una contradicción, pues haciendo $x = 2^n$, sería $L(x) = L(2^n) = n.L(2) \leq M$. Pero si elegimos un $n > M / L(2)$ se tiene que $L(x) = nL(2) > \frac{M}{L(2)} L(2) = M$, lo que se contradice con que M habría de ser cota superior. Luego L no está superiormente acotada.

b) No tiene cota inferior. Si suponemos que –N es cota inferior de L, es decir, que $L(x) \geq -N, \forall x \in R_+$ llegamos a una contradicción, pues haciendo $x = (1/2)^n$, sería $L(x) = nL(1/2) = -nL(2) \geq -N$. Pero si elegimos $n > N / L(2)$ se tiene que $L(x) = -nL(2) < -\frac{N}{L(2)} L(2) = -N$, lo que se contradice con que $-N$ habría de ser cota inferior. Luego L no está inferiormente acotada.

Teorema 2.3.3:
La función logaritmo natural es un isomorfismo del grupo multiplicativo $(R_+, .)$ en el grupo aditivo $(R, +)$.
Demostración:
Se trata de ver que L es homomorfismo inyectivo y suprayectivo, es decir, homomorfismo biyectivo.

a) Por el teorema 2.2, apartado 3), sabemos que $L(x.y) = L(x) + L(y), \forall x, y \in R_+$, por consiguiente, es homomorfismo del grupo multiplicativo $(R_+, .)$ en el grupo aditivo $(R, +)$.
b) Como es estrictamente creciente, por teorema 2.3.1, apartado b), es también inyectiva, siendo por tanto homomorfismo inyectivo.
c) Para ver que también es suprayectivo, hemos de probar que $\forall b \in R, \exists a \in R_+$ tal que $L(a) = b$.

   Sabemos que si $b = 0, \exists a \in R_+ / L(a) = 0 \rightarrow a = 1$

   Supongamos que b>0. Eligiendo un $n > b / L(2)$ será $nL(2) = L(2^n) > b$, por lo que b pertenecería al interior del intervalo $[0, L(2^n)]$.

   Puesto que los originales de los extremos del intervalo son $a=1$ y $a=2^n$, y siendo L continua, podemos aplicar el teorema del valor intermedio para funciones continuas en el intervalo $[1, 2^n]$, estableciendo que

$$\forall b \in (0, L(2^n)), \exists a \in (1, 2^n) / L(a) = b$$

   como n es arbitrariamente grande, b puede ser cualquier número real positivo.

   Supongamos que $b<0$. Será entonces –b>0, por lo que $\exists a' \in R_+ / L(a') = -b$

   Lo que implica que $L(1/a') = -L(a') = b$

   En definitiva, L es suprayectiva, por lo que el homomorfismo es biyectivo, o sea, isomorfismo.

2.4. Función logaritmo en una base cualquiera

Teorema 2.4.1:
La función logaritmo en una base cualquiera a se relaciona con la función logaritmo natural por la expresión

$$\log_a(x) = \frac{L(x)}{L(a)}$$

Demostración:

Puesto que de [1.2.2] es $\log_a(x) = \frac{1}{\omega}\int_1^x \frac{dt}{t} = \frac{1}{\omega}L(x)$, con ω constante no nula y siendo $L(x)$ isomorfismo, también lo será $\log_a(x)$, por lo que al ser función suprayectiva, $\exists z \in R_+ / \log_a(z) = 1$, y como $z=a^1=a$, se tiene:

$$\log_a(a) = \frac{1}{\omega}L(a) = 1$$

de donde $\omega = L(a)$, quedando finalmente:

$$\log_a(x) = \frac{L(x)}{L(a)}$$

Definición: Llamamos *Logaritmo de x en base a*, $a > 0, a \neq 1$, y lo representamos por $\log_a(x)$, al cociente $L(x)/L(a)$, donde L representa la función logaritmo natural. O sea:

$$\forall x \in R_+, \log_a(x) = \frac{L(x)}{L(a)}, \, a \neq 1 \wedge a > 0$$

Análogamente, $\exists e \in R_+ / L(e) = 1$, es decir, $\log_e(x) = L(x)$, por lo que e es la base de los logaritmos naturales.

3. Bibliografía:

AHLFORS, Lars V.; Análisis en Variable Compleja, Ed. Aguilar, 1971, Madrid

APOSTOL, Tom M.; Calculus, Ed. Reverté, 1984, Barcelona

SPIVAK, Michael; Calculus, Ed. Reverté, 1983, Barcelona

LANG, S.; Complex Analysis, Ed. Addison Wesley Publishing, 1977, New York