LÓGICA QUÁNTICA OPERATORAL
(Operatoral Quantum Logic)

Adunador: **Alberto Mejías**[1]

…la relación entre las propiedades de un sistema físico, por una parte y las proyecciones, por otra, hace posible una especie de cálculo lógico con éstas.

VON NEUMANN, 1932

Resumen. El objetivo de este trabajo es dar una presentación uniforme de lo que llamamos Lógica Quántica Operatoral,[2] destacando, tanto su origen físico concreto, como su estructura puramente matemática. Para establecer un contexto a este tema, reseñamos algo de la evolución histórica de la Lógica Quántica, intentando mostrar cómo se han influenciado y enriquecido mutuamente, los aspectos físicos y matemáticos de la materia.

Descriptores: Teoría Quántica, Lógica Quántica, Informática Quántica, Filosofía Práctica, Teoría de Categorías.

Abstract. The goal of this work is to provide a uniform presentation of what we call Operatoral Quantum Logic, emphasizing both its specific physical origin as its purely mathematical structure. To establish a context to this topic, we review something of the historical evolution of the Quantum Logic, trying to show how the physical and mathematical aspects of the subject have influenced and enriched each other.

Keywords: Quantum Theory, Quantum Logic, Quantum Computing, Practical Philosophy, Categories Theory.

1. INTRODUCCIÓN

---

[1] Alberto R. Mejías E. es Licenciado en Matemáticas, egresado de la Facultad de Ciencias de la Universidad de los Andes (ULA) Mérida-Venezuela. Es profesor de Topología jubilado de la Universidad de los Andes. alrame59@gmail.com

[2] Es operatoral ¡no, operacional! porque se refiere a operadores, no a operaciones.

Alberto Mejías

El tema de la *Lógica Quántica Operatoral* (LQO) —situada en algún lugar de confluencia de matemáticas, física y filosofía— tiene una historia larga y complicada y ha generado una literatura grande, dispersa y turbulenta. No es algo fácil de explicar en pocas palabras ¡como se supone que debe de ser!

En nuestro mejor intento decimos que LQO comprende:

(a) al hecho de que la estructura de los observables 2-valuados, en Mecánica Quántica Ortodoxa, puede ser útilmente, considerada como una Lógica Proposicional No-Clásica;

(b) al intento de dar motivación independiente, de esta estructura, como parte de un programa general para interpretar Mecánica Quántica (MQ) y

(c) a la rama de la matemática pura que ha surgido de (a) y (b) y ahora se refiere a una variedad de estructuras "ortomodulares", generalización de la lógica de observables quánticos 2-valuados.

Sea lo que sea, Lógica Quántica (LQ) es una parte viva y creciente de Matemáticas Contemporáneas y Física Teórica —una que ha seguido manteniendo el interés de un cuerpo de matemáticos, físicos y filósofos de la ciencia. Este interés sostenido, refleja en parte, al hecho de que las ideas básicas y el lenguaje de LQ producen información para la mayoría de las discusiones acerca de los engorrosos problemas sobre los fundamentos de MQ (de hecho, a un grado que, a menudo, no es reconocido, incluso, por los disertantes). Refleja, también, al hecho de que LQ ha generado una autónoma y fascinante rama de Matemática Pura, involucrada con una variedad de estructuras –retículos ortomodulares (ROM's) y conjuntopos (conjuntos parcialmente ordenados), ortoálgebras, álgebras BOOLE parciales, etc.— que generalizan al retículo $\mathbb{P}$(H) de las proyecciones en un espacio HILBERT H. Por último, la llegada de Computación Quántica (CQ) y Teoría de Información Quántica (TIQ) ofrece un campo de aplicaciones prácticas de LQ, que todavía tiene que ser explorado.

Históricamente, LQ deriva de la observación (más que casual) por VON NEUMANN, de que los observables 2-valuados, representados en su formulación mecánico-quántica, por operadores proyecciones, constituyen una especie de "lógica" de proposiciones experimentales. Esta idea fue proseguida por BIRKHOFF y VON NEUMANN.

Después de dos décadas de abandono, el interés por LQ fue revivido, debido en gran parte al análisis por MACKEY, del Cálculo Probabilístico de la Teoría Quántica Estándar, acoplado con su Teoría de Representaciones Inducidas.

El desarrollo posterior del tema ha ocurrido en varios niveles y en variadas direcciones. El trabajo de MACKEY fue ampliado significativamente por PIRON, cuyos Teorema de Representación y marco axiomático proporcionaron mucho impulso para el desarrollo posterior. Al mismo tiempo, la insatisfacción con el marco axiomático debido a MACKEY, condujo a una búsqueda de fundamentos más primitivos y más concretamente operatorales. Aquí destaca la labor de FOULIS y RANDALL y también la de LUDWIG y sus colegas en Marburgo.

El trabajo en Física Fundamental también ha estimulado y ha estado estimulado por, la investigación puramente matemática; en particular, en el desarrollo de una teoría abstracta de ROM´s y, en los últimos años, estructuras más generales como ortoálgebras y álgebras de efectos. Más recientemente aún, el tema ha visto la aplicación de poderosas técnicas de Teoría de Categorías.

Dada la variedad algo abrumadora de estos progresos, en este ensayo introductorio, vamos a intentar un esbozo de LQ, que podría ayudar a los lectores que no son expertos en la materia, a entender los diversos documentos que se producen y también, a verlos como pertenecientes a un tema común.

Empezamos comentando el trabajo seminal de BIRKHOFF y VON NEUMANN y su desarrollo por MACKEY. Luego, pasamos a una breve exposición del Teorema de Representación, de PIRON y su marco axiomático, refiriendo al lector a [COECKE and MOORE, 2000] y [VALCKENBORGH, 2000] para exposiciones en un lenguaje categorial (de Teoría de Categorías) más actualizado. A continuación, se discute el trabajo de FOULIS y RANDALL; en particular, su introducción de la noción de ortoálgebra y su observación de que los productos tensoriales de conjuntopos ortomodulares (COM's), generalmente existen sólo como ortoálgebras. El formalismo FOULIS-RANDALL se discute detalladamente en [WILCE, 2000].

Seguimos con una exposición general de la teoría matemáticamente pura, de estructuras ortomodulares. Para más detalles sobre ROM's, ver a [BRUNS and HARDING, 2000], para observables en COM's, a [PTAK, 2000] y para representaciones de grupos sobre álgebras de efectos, a [FOULIS, 2000].

Por último, consideramos a la noción de enriquecimiento categorial y la teoría de quantales, revisados, respectivamente, en [BORCEUX and STUBBE, 2000] y [PASEKA and ROSICKÝ, 2000], antes de introducir los aspectos informáticos y lingüísticos, tratados, respectivamente, en [RESENDE, 2000] y [GUDDER, 2000].

2. MECÁNICA QUÁNTICA VON NEUMANN

Aunque existían tratamientos matemáticos precisos de MQ, antes del tratado monumental de JOHANN VON NEUMANN [1932]; razonablemente, se podría argumentar que este trabajo fijó, de una vez por todas, el marco teórico de Teoría Quántica Estándar, en el que cada sistema mecánico-quántico está asociado a un espacio HILBERT H, cada vector unitario $\psi \in$ H, determina un *estado* del sistema y cada cantidad física observable, asociada con el sistema está representada por un operador autoadjunto A sobre H. El teorema espectral nos dice que un tal operador está asociado con una medida espectral

$$P_A\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}(\mathrm{H}),$$

que asigna a cada conjunto BOREL real B, un operador proyección $P_A(B)$ sobre H.

Para cualquier vector unitario $\psi \in$ H, la cantidad

$$\mu_{A,\ \psi}(B) := \langle P_A(B)\ \psi,\ \psi\rangle$$

define una medida de probabilidad sobre la recta, que VON NEUMANN considera que da la probabilidad de que el observable (representado por) A tiene un valor en el conjunto B, cuando el estado del sistema es (representado por) ψ.

Si la función identidad tiene varianza finita en $\mu_{A,\ \psi}$, ψ está en el dominio de A y el valor esperado de A con respecto a ψ, está dado por

$$\mathrm{Exp}(A,\ \psi) = \int_{\mathbb{R}} s\, d\mu_{A,\ \psi}(s).$$

Se comprueba fácilmente, que esto funciona para $\mathrm{Exp}(A,\ \psi) = \langle \mathrm{A}\ \psi,\ \psi\rangle$.

2.1. Lógica de Proyecciones

Si *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (*Fundamentos Matemáticos de Mecánica Quántica*) había señalado el paso a la madurez de la MQ, señaló también el nacimiento de la LQ. Evidentemente, es la medida con valores proyecciones P_A, más que el operador A, lo que lleva más directamente a la interpretación estadística de la MQ, descrita anteriormente. Ahora, como anota VON NEUMANN, cada proyección $P \in \mathbb{P}(\mathbf{H})$, define un observable —uno con los valores 0 y 1. Si $P = P_A(B)$ es la proyección espectral asociada con un observable A y un conjunto BOREL B, podemos interpretar a este observable como "prueba de ensayo" de si A toma o no, un valor en B.

Lógica Quántica Operatoral

VON NEUMANN considera que P representa a una propiedad física del sistema (o mejor dicho, de los estados del sistema). Comenta:

> "la relación entre las propiedades de un sistema físico, por una parte y las proyecciones, por otra, hace posible una especie de cálculo lógico con éstas. Sin embargo, en contraste con los conceptos de la lógica ordinaria, este sistema se extiende por el concepto de 'Decidibilidad simultánea', que es característico de la Mecánica Quántica." [VON NEUMANN, 1932, p. 253].

En efecto, si P y Q son proyecciones conmutativas, entonces su junta $P \vee Q$ y su concurrencia $P \wedge Q$, en el retículo $\mathbb{P}(\mathrm{H})$, pueden interpretarse clásicamente, como la representación de la opción y de la conjunción entre las propiedades codificadas por P y Q; Además, la proyección $P' = 1 - P$ sirve como una especie de negación de P. Sin embargo, si P y Q no conmutan, entonces no son "simultáneamente decidibles" y el significado de $P \wedge Q$ y de $P \vee Q$ es menos claro. No obstante, $\mathbb{P}(\mathrm{H})$ conserva muchos elementos de un álgebra BOOLE y puede ser considerado como un modelo algebraico para una lógica proposicional no-clásica. En particular, $\mathbb{P}(\mathrm{H})$ es ortocomplementado y, por tanto, satisface leyes análogas a las de DE MORGAN; más precisamente, el sub-ortoretículo generado por cualquier familia de proyecciones mutuamente conmutativas, es un álgebra BOOLE.

2.2. Lógica de Mecánica Quántica

Cabe destacar que VON NEUMANN habla de la simultánea "decidibilidad" (es decir, ensayabilidad) de propiedades, pero no distingue entre propiedades decidibles e indecidibles *per se*. Clásicamente, por supuesto, cualquier subconjunto del espacio de estados, cuenta como una propiedad categórica del sistema y nada, en principio, nos impide tener la misma opinión en MQ. Sin embargo, sólo los subconjuntos del espacio de estados, correspondientes a subespacios lineales cerrados, del espacio HILBERT, son asociados con observables y, así, "decidibles" por medición. Si se adopta un positivismo bastante severo, según el cual ninguna proposición *no* decidible es significativa, se llega a la doctrina aparentemente extraña, de que, para un sistema mecánico-quántico, el conjunto de propiedades significativas forma, no a un álgebra BOOLE, sino, más bien, al retículo $\mathbb{P}(\mathrm{H})$ de las proyecciones en un espacio HILBERT H. Esta idea fue desarrollada por VON NEUMANN en un documento conjunto con GARRETT BIRKHOFF, titulado *The Logic of Quantum Mechanics* [BIRKHOFF and VON NEUMANN, 1936].

BIRKHOFF y VON NEUMANN observan que $\mathbb{P}$(H) conserva muchas de las características familiares del álgebra de la lógica proposicional clásica —en particular, es ortocomplementado y por lo tanto, cumple con las leyes DE MORGAN. Sin embargo, no es BOOLE; es decir, falla la Ley distributiva.

BIRKHOFF y VON NEUMANN llegan a sugerir que

> "mientras que los logicistas generalmente, han asumido que las propiedades L71-L73 de negación fueron las menos susceptibles de soportar un análisis crítico, el estudio de la mecánica apunta a las identidades distributivas L6 como el eslabón más débil en el álgebra de la lógica." [Birkhoff and von Neumann, 1936, p. 839].

Como veremos en Sección 7, esta observación es algo más profunda que lo que uno pueda imaginar, siendo interpretable en términos de la diferencia fundamental entre álgebras HEYTING y ROM's considerados como generalizaciones de álgebras BOOLE. Esta insinuación de que el retículo de proyecciones puede verse como una lógica proposicional, se ha entendido en un número de maneras muy diferentes. Algunos la han visto como cuestionamiento de la *corrección* de la lógica clásica. Otros la han visto como que implica una menos drástica modificación de la teoría clásica de probabilidades. Como hemos visto, VON NEUMANN mismo [1932 §3.5], es bastante cauteloso, destacando que la equivalencia entre subespacios y proyecciones induce a una *especie* de cálculo lógico. Del mismo modo, BIRKHOFF y VON NEUMANN [1936 §0] concluyen que, mediante argumentos heurísticos, se puede, razonablemente, esperar encontrar un cálculo de proposiciones para sistemas mecánico-quánticos que es *formalmente*, indistinguible del cálculo de subespacios y se *asemeja* al habitual cálculo lógico.

Más radical es la opinión de FINKELSTEIN [1968, 1972], de que la lógica es, en cierto sentido, empírica; una opinión defendida por luminarias filosóficas tales como PUTNAM [1968, 1976]. FINKELSTEIN destaca las abstracciones que hacemos al pasar de la mecánica a la geometría y a la lógica y sugirió que los procesos dinámicos de fractura y flujo, ya observados en los dos primeros niveles, también deben presentarse en el tercero.

PUTNAM, por otra parte, sostiene que las patologías metafísicas de superposición y complementariedad no son más que objetos de contradicciones lógicas generadas por un uso indiscriminado de la ley distributiva.

Este punto de vista de la materia, que sigue siendo popular en algunos reductos,[3] depende de una lectura de la proyección P como codificación de una *propiedad física* del sistema quántico y, en el supuesto de que sólo las propiedades físicas cuentan, en última instancia, como significativas (o en cualquier caso, como fundamentales). Sin embargo, hay una forma diferente de interpretar a P; a saber, que codifica a una declaración sobre el posible resultado de una "medición". Así, si A es el operador autoadjunto correspondiente al observable $\mathcal{A}$ y $P = P_A(\mathrm{B})$, es la proyección espectral de A, correspondiente al conjunto BOREL B, se podría interpretar a P como codificación de la proposición de que, *si se hace*, una medición de $\mathcal{A}$ produciría un valor en B. Esta interpretación, usualmente denominada *operacional*, guio a MACKEY en su reconstrucción de la Mecánica Quántica VON NEUMANN (MQVN), a la que pasamos ahora.

3. EL PROGRAMA MACKEY

En un influyente artículo [1957], posteriormente ampliado en una monografía [1963], GEORGE MACKEY argumentó:

(a) que se podría reconstruir mayormente, si no todo, el aparato de la MQVN, a partir de la premisa de que las proposiciones experimentales forman un ortoretículo isomorfo a $\mathbb{P}(\mathrm{H})$

y

(b) que esta misma premisa podría estar motivada independientemente, por consideraciones muy generales sobre cómo se deben considerar modelos probabilísticos de sistemas físicos.

3.1. Mecánica Quántica como Cálculo de Probabilidades

MACKEY interpretó MQ como *si fuera* simplemente, un cálculo de probabilidades no clásico, en el cual el álgebra BOOLE de eventos, de la Teoría Clásica de Probabilidades, se sustituye por el retículo $\mathbb{P}(\mathrm{H})$. Más exactamente, MACKEY hizo hincapié en que tanto los estados, como los observables de un sistema mecánico-

---

[3] Por ejemplo, BAMBERG y STERNBERG [1990, pp. 833-835] escriben: "de hecho, [la Mecánica Quántica] representa la revolución más profunda en la historia de la ciencia, porque modifica las normas elementales de la lógica. . . . La ley distributiva no se mantiene en Lógica Quántica. Como mencionamos anteriormente, la validez de la MQ se ha demostrado experimentalmente, una y otra vez durante los últimos sesenta años. Así que el experimento ha demostrado que se debe abandonar uno de los más preciados principios de lógica, cuando se trata con observables cuánticos."

quántico, pueden definirse, exclusivamente, en términos de $\mathbb{P}(\mathrm{H})$.

En primer lugar, cualquier estado estadístico W determina una medida de probabilidad en $\mathbb{P}(\mathrm{H})$, a saber, la asignación

$$\omega_W\colon \mathbb{P}(\mathrm{H}) \to [0, 1]; \qquad P \to \mathrm{tr}(PW).$$

Un profundo teorema debido a Gleason [Gleason, 1957; DVUREČENSKIJ, 1993] muestra que, recíprocamente, cada medida de probabilidad, σ-aditiva en $\mathbb{P}(\mathrm{H})$ tiene esta forma.

En segundo lugar, un observable con valores en el espacio medible $(S, \mathfrak{F})$, se puede representar por una medida proyecto-valuada (con valores proyecciones)

$$M\colon \mathfrak{F} \to \mathbb{P}(\mathrm{H}),$$

donde, para cada conjunto medible $B \in \mathfrak{F}$, la proyección $M(B)$ se toma para codificar la "proposición experimental": 'una medición del observable da un valor en el conjunto B'. Evidentemente, podemos retrotraer medidas de probabilidad en $\mathbb{P}(\mathrm{H})$, a lo largo de M, para obtener una medida de probabilidad clásica, sobre $\mathfrak{F}$. Interpretamos que $M^{*}(\omega) = \omega \circ M$, da la distribución estadística de los valores de $M(S)$ cuando el sistema está en el estado representado por ω. En otras palabras,

$$\omega_W(M(B)) = \mathrm{tr}(M(B)W),$$

representa la probabilidad de que el observable representado por M producirá un valor en el conjunto B, *si se mide*, cuando el estado del sistema se representa por W.

Esto conecta con la teoría VON NEUMANN de representación de observables como operadores, en forma natural, como sigue: Si $f\colon S \to \mathbb{R}$ es cualquier variable aleatoria real, acotada, clásica, definida en S, podemos definir al operador autoadjunto

$$A_f := \int_S f(s)\,dM(s),$$

en la forma habitual.[4] Así, para cualquier medida de probabilidad μ en $\mathbb{P}(\mathrm{H})$, tene-

[4] Si f es no negativa, entonces A_f viene dado por el supremo de los operadores $A_g = \Sigma_i\, g_i M(B_i)$, donde $g = \Sigma_i\, g_i \chi B_i$ es una variable aleatoria simple, con $0 \leq g \leq f$.

mos

$$E_{M^*(\mu)}(f) = \int_S f(s)\,dM^*(\mu)(s) = \mathrm{tr}(A_f W),$$

donde W es el operador densidad, correspondiente a μ.

Este punto de vista de la MQ es sorprendentemente poderoso.

El teorema GLEASON, junto con el teorema espectral, los resultados clásicos de STONE, WIGNER, WEYL y VON NEUMANN y el propio trabajo de MACKEY sobre representaciones unitarias inducidas, permiten esencialmente, *derivar* todo el aparato de MQ no relativística (incluyendo su dinámica unitaria, las RCC's, etc.), a partir de la premisa de que la lógica de proposiciones experimentales está representada por el retículo de proyecciones $\mathbb{P}$(H). Para un esbozo de esta reconstrucción, véase [MACKEY, 1963] o [BELTRAMETTI y CASSINELLI, 1981]; para un recuento detallado, ver [VARADARAJAN, 1968].

3.2. Axiomática MACKEY

No obstante su éxito, la consideración MACKEY de MQ como cálculo de probabilidades todavía se basa en un innegable elemento *ad hoc*: el espacio HILBERT H, mismo. En efecto, una vez que se juega con la idea de que las proposiciones contrastables asociadas a un sistema físico, no tienen que formar un álgebra BOOLE; se abre la puerta a una gran variedad de otras posibilidades. Entonces se convierte en un asunto de urgencia, entender *por qué* la naturaleza (o alguien) debería escoger modelar sistemas físicos en términos de retículos de proyecciones de espacios HILBERT, en lugar de algo más general. MACKEY esbozó un ambicioso programa para hacer esto, deduciendo el modelo de espacio HILBERT, a partir de un conjunto de axiomas más primitivos e, idealmente, más transparentemente plausibles, para un cálculo de eventos.

El marco que adopta MACKEY, es una estructura abstracta $(\mathcal{O}, \mathcal{S}, p)$, donde $\mathcal{O}$ representa al conjunto de los "observables" con valores reales y $\mathcal{S}$ al conjunto de "estados" de un sistema físico. Éstos están conectados por una asignación

$$p\colon \mathcal{O} \times \mathcal{S} \to \Delta\colon (A, s) \mapsto p_A(\,\cdot\,|s)\,,$$

donde Δ es el conjunto de medidas BOREL de probabilidad, sobre la recta. La interpretación prevista es que $p_A(\,\cdot\,|s)$ da la distribución estadística de los valores de una medición del observable $A \in \mathcal{O}$, cuando el sistema está en el estado $s \in \mathcal{S}$. Podemos tomar el par (A, B), donde $A \in \mathcal{O}$ y B es un conjunto BOREL real, para representar a la "proposición experimental" de que una medición de A da (daría, ha dado) un valor en B. MACKEY considera a dos de tales proposiciones, equivalentes syss tienen la misma probabilidad en cada estado —en otras palabras, (A_1, B_1) y (A_2, B_2) son equivalentes syss las asignaciones asociadas $P_{A_i, B_i} := p_{A_i}(B_i \mid \cdot\ )$ son iguales. El conjunto L de tales asignaciones $P_{A, B}$, que él llama *cuestiones*, es Lógica Quántica MACKEY.

Ahora, ordenado puntualmente sobre $\mathcal{S}$, el conjunto L es un conjuntopo ortocomplementado con unidad 1 dada por $P_{A, \mathbb{R}}$ para cada observable A, cuya ortocomplementación viene dada por $P'_{A, B} = 1 - P_{A, B} = P_{A, \mathbb{R}\setminus B}$. Digamos que las cuestiones $P, Q \in L$ son *compatibles* syss $P = P_{A, B}$ y $Q = P_{A, C}$ para algún observable común A y algún par de conjuntos BOREL B y C. Entonces podemos considerar a P y Q como "simultáneamente medibles". Además, digamos que las cuestiones $P, Q \in L$, son *ortogonales* (o "disjuntas", en lenguaje MACKEY) syss $P \leq Q'$. En tal caso, escribimos $P \perp Q$. En este punto MACKEY impone su

Axioma V: Si P_i es una familia contable de elementos mutuamente ortogonales, en L, entonces existe un elemento $P \in L$ tal que $P = P_1 + P_2 + \cdots$.

Este axioma garantiza que L es un conjuntopo σ-ortomodular ó un σ-conjuntopo ortomodular (σ-COM) —es decir, L satisface las dos condiciones

(a) Cada familia contable de elementos mutuamente ortogonales $P_i \in L$ tiene una junta (mínima cota superior) $\bigvee_i P_i$ en L y

(b) Si $P \leq Q$, entonces $(Q \wedge P') \vee P = Q$.

En cualquiera de tales conjuntopos L, se pueden definir *medidas de probabilidad*, mediante asignaciones μ: $L \to [0, 1]$ tales que $\mu(1) = 1$ y, para cualquier familia contable de elementos mutuamente ortogonales, $P_i \in L$, se tiene $\mu(\bigvee_i P_i) = \sum_i \mu(P_i)$. También podemos definir, dados dos cualesquiera σ-COM L y M, una medida M-valuada en L, como una asignación α: $L \to M$ tal que $\alpha(1_L) = 1_M$ y, para cualquier familia contable de elementos mutuamente ortogonales, $P_i \in L$, tenemos $\alpha(\bigvee_i P_i) = \bigvee_i \alpha(P_i)$. Para una discusión general de dichas asignaciones en términos de observables, ver [PTÁK 2000].

Lógica Quántica Operatoral

Volviendo ahora al COM de cuestiones, L, MACKEY observa que

(a) Cada estado $s \in \mathcal{S}$, define una medida de probabilidad $\hat{s}$: $L \rightarrow [0, 1]$ por evaluación:

$$\hat{s}(P_{A,\,B}) = P_{A,\,B}(s) = p_A(B|s).$$

(b) Cada observable $A \in \mathcal{O}$, define una medida L-valuada P_A: $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow L$, vía $P_A(\mathrm{B}) = P_{A,\,B}$, sobre los conjuntos BOREL reales (que, constituyendo un σ-algebra BOOLE, constituyen, sin duda, un σ-COM).

Recíprocamente, supongamos que L es *cualquier* σ-COM, y que $\mathcal{S}$ es cualquier conjunto de medidas de probabilidad sobre L, que determinan orden —es decir, $\mu(p) \leq \mu(q)$ para todo $\mu \in \mathcal{S}$, implica $p \leq q$. Sea $\mathcal{O}$ el conjunto de todas las medidas BOREL L-valuadas en la recta y definamos p: $\mathcal{O} \times \mathcal{S} \rightarrow \Delta(\mathbb{R})$ por $p_\alpha(B|\mu) = \mu(\alpha(B))$. Entonces la estructura $(\mathcal{O}, \mathcal{S}, p)$ satisface los axiomas MACKEY, y, además, el COM de cuestiones construido a partir de ella, es canónicamente isomorfo a L.

Como se ha observado [FOULIS 1962; GUDDER 1965], los axiomas MACKEY definen la teoría de estructuras determinadas por pares (L, Δ) donde L es un σ-COM y Δ es una familia de medidas de probabilidad que determinan orden sobre L. Dichos pares (habitualmente denominados *lógicas cuánticas* en la literatura matemática en las décadas de 1960 y 1970) han sido estudiados intensamente por muchos autores. Para discusiones detalladas de COM en el contexto de LQ ver [BELTRAMETTI y CASSINELLI 1981; GUDDER 1985; PTÁK 2000; PTÁK y PULMANNOVÁ 1991]. Por supuesto tales LQ's están todavía muy lejos de la LQ *estándar* $\mathbb{P}$(H). Entre otras cosas, el COM $\mathbb{P}$(H) es un *retículo completo*: existen juntas arbitrarias, no sólo juntas ortogonales contables. Aun así, se podría esperar que un análisis más profundo — quizás involucrando axiomas adicionales — pudiera conducir a una caracterización significativa y, lo ideal, a una motivación para la LQ estándar. Este fue el objetivo expreso de MACKEY:

> "Idealmente, uno quisiera tener una lista de suposiciones físicamente plausibles, de la cual se pudiera deducir [el modelo de espacio Hilbert]. Debajo de esto, uno quisiera una lista de la cual se pudiera deducir un conjunto de posibilidades..., todas, salvo una, de las cuales podrían ser demostradas incompatibles con experimentos debidamente planificados. Por el momento, dichas listas no están disponibles." [MACKEY 1963, p. 72]

Este tema se encuentra en el corazón de la axiomatización original de PIRON, que se discutirá en la próxima sección. Por otro lado, como discutiremos en las secciones 5 y 6, el estudio autónomo de dichas estructuras conduce naturalmente a más generalizaciones, en particular, a ortoálgebras y álgebras de efectos. Ahora, antes de dedicarnos a una rápida revisión de algunos de los acontecimientos importantes ocurridos desde la obra fundamental de MACKEY, hagamos algunos comentarios.

En primer lugar y ante todo, la característica principal que separa al formalismo MACKEY de las tendencias actuales en LQO, es la dependencia del primero, de la probabilidad como un concepto *primitivo*. Mientras que se han hecho avances importantes en este contexto, por ejemplo en [PULMANNOVÁ, 1986 a, b; GUDDER y PULMANNOVÁ, 1987; PULMANNOVÁ y GUDDER, 1987], los trabajos más contemporáneos relegan la probabilidad a una noción derivada.[5] Esto no quiere decir que los estados estadísticos son insignificantes en LQO. Sin embargo, han pasado de la situación de un concepto primitivo algo vagamente interpretado, a la de un instrumento estructural bien definido. Aquí puede hacerse mención de la caracterización de los espacios de estados de la LQ estándar, que culmina en la prueba por NAVARA, de la independencia del grupo de automorfismos, del centro y del espacio de estados, de una lógica cuántica [Navara 1992]. Una excepción notable a esta tendencia es la teoría de efectos de decisión, introducida por GÜNTHER LUDWIG durante la revisión de su texto clásico [1954, 1955]. Este trabajo se basa en la clasificación de nociones macroscópicas en piezas preparativas y efectivas que participan en las interacciones de medición mediadas por portadores de acción.

No entraremos en los detalles del esquema axiomático de LUDWIG, sucesivamente refinado en [LUDWIG, 1964, 1967, 1968; DÄHN, 1968; MIELNIK 1968, 1969; STOLZ 1969, 1971; DÄHN, 1972; LUDWIG, 1972] y codificado en el monumental tratado [LUDWIG, 1985, 1987], sino que nos remitiremos a algunas observaciones generales. La noción primitiva de esta teoría es la de una relación de probabilidad definida sobre el producto cartesiano del conjunto de ensambles y el conjunto de efectos; estos dos conjuntos se toman como inmersos en un conveniente par de espacios BANACH.

---

[5] Por ejemplo, mientras que en [PIRON, 1964 §7], la probabilidad generalizada se discute como una útil heurística física, en [JAUCH y PIRON, 1969 §5] los estados se definen como conjuntos maximales de propiedades reales del sistema. Del mismo modo, mientras que el formalismo introducido en [RANDALL y FOULIS, 1970; FOULIS y RANDALL, 1972; RANDALL y FOULIS, 1973] se refiere explícitamente a estadísticas operatorales, en [FOULIS, PIRON y RANDALL, 1983; RANDALL y FOULIS, 1983; FOULIS, GREECHIE y RÜTTIMANN, 1992, 1993] se pone énfasis en el concepto de estados en términos de concomitancias en el espacio de resultados asociado al sistema.

Lógica Quántica Operatoral

En algún sentido, entonces, la obra de LUDWIG y sus colaboradores corre paralela al campo de LQO tal como la hemos presentado, centrándose más en la estructura analítica funcional del problema que en sus aspectos algebraicos ordenados. Como tal quizá tiene una relación más *formal* con la teoría cuántica algebraica, de SEGAL [1947] y de HAAG y KASTLER [1964], que con las teorías operatorales de PIRON y FOULIS-RANDALL que se debatirán a continuación.

Sin embargo, una característica *física* notable del trabajo de LUDWIG es que trata de lidiar con la noción de mediciones no ideales, utilizando operadores subproyectivos. Nótese que dichos operadores aparecen naturalmente en las discusiones de localizabilidad generalizada [JAUCH y PIRON, 1967; AMREIN, 1969].

Para revisiones generales de diferentes aproximaciones a la Mecánica Quántica Operatoral, ver [GUDDER, 1977, 1979, 1981; LUDWIG y NEUMANN, 1981], para un análisis detallado de la relación entre los enfoques de PIRON y LUDWIG ver [CATTANEO y LAUDISA, 1994; CATTANEO y NISTICÒ, 1993] y para tener una visión general de la aplicación de medidas positivas con valores operadores, a cuestiones, en fundamentos de MQ véase [BUSCH, LAHTI y MITTELSTAEDT, 1991; SCHROECK, 1996].

4. EL TRABAJO DE PIRON

CONSTANTIN PIRON [1964] realizó un progreso significativo en ambos extremos del problema de completar y ampliar el programa MACKEY, lo cual se desarrolló en lo que se conoce como el enfoque de la Escuela de Ginebra, de la Física Quántica.

PIRON caracterizó abstractamente, a los ROM's completos representables como retículos de subespacios cerrados de *espacios HILBERT generalizados*. También proveyó un análisis profundo de las ideas físicas básicas de MQ que ayudaron a motivar a los supuestos necesarios en su teorema de representación, como axiomas generales razonables. En esta sección se describe una versión formal de estos axiomas en el espíritu de [PIRON, 1976], antes de hacer algunas observaciones sobre acontecimientos más recientes.

4.1. El Teorema de Representación

El retículo de proyecciones $\mathbb{P}(H)$ tiene una estructura mucho más regular que el general COM proporcionado por los axiomas MACKEY. En particular, $\mathbb{P}(H)$

(a) es un retículo *completo* —es decir, existen la concurrencia y la junta para cualquier subconjunto de L;

(b) es *atomístico* —es decir, cada elemento de $\mathbb{P}(\mathrm{H})$ es la junta de los átomos (aquí, las proyecciones unidimensionales) por debajo de él;

(c) cumple con la *ley del cubrimiento atómico*: si $P \in \mathbb{P}(\mathrm{H})$ es un átomo y $Q \in \mathbb{P}(\mathrm{H})$, entonces $P \vee Q$ cubre a Q, es decir, es un átomo en el retículo $\{M \in L | Q \leq M\}$;

(d) es *irreducible* —es decir, no puede factorizarse como producto directo no trivial. Equivalentemente, ningún elemento de $\mathbb{P}(\mathrm{H})$, que no sea 0 ó 1, conmuta con todos los demás elementos.[6]

En su tesis [PIRON, 1964], PIRON probó un recíproco parcial, es decir que todos los retículos L (de longitud suficiente) pueden ser interpretados como conjuntos de subespacios biortogonales, de un espacio HILBERT generalizado. Explícitamente, considerando la (esencialmente) única inmersión de L en una geometría proyectiva, que preserva la concurrencia y los átomos y aprovechando la realización de espacio vectorial estándar de las geometrías proyectivas de dimensión, por lo menos, tres, mostró que la imagen del retículo original podría caracterizarse por una forma hermiteana definida.[7]

---

6 Desde luego, no todo sistema mecánico-quántico es irreducible; sino que, en general, se descompone en una familia de sistemas puramente cuánticos, indizados por *reglas de superselección*. Por ejemplo, [Piron 1964] muestra que cada ROM que satisface los axiomas (a) – (c) es unión directa de una familia de retículos irreducibles, siendo su geometría proyectiva unión directa de las geometrías correspondientes. Abstractamente, los sistemas con reglas de superselección discretas, pueden ser tratados tomando medidas con valores proyecciones, en un apropiado álgebra VON NEUMANN $\mathfrak{A}$. Si el ROM inducido $L(\mathfrak{A})$ no contiene a un sumando de tipo I_2, entonces se aplica el teorema GLEASON: cada medida σ-aditiva de probabilidad en $L(\mathfrak{A})$ se extiende únicamente a un estado normal sobre $\mathfrak{A}$ [CHRISTENSEN, 1982; YEADON, 1983]. Para mayor discusión véase, por ejemplo, [BUNCE y HAMHALTER, 1994; BUNCE y WRIGHT, 1994; HAMHALTER, 1993, 1995].

7 Este desarrollo se ha hecho mucho más físicamente transparente y matemáticamente elegante a partir del trabajo seminal de FAURE y FRÖLICHER [1993, 1994, 1995], donde la construcción de representaciones lineales para las geometrías proyectivas y sus morfismos es elaborada de una manera categorialmente natural. Por ejemplo, una relación de ortogonalidad determina un morfismo de la geometría proyectiva a su dual y así, una aplicación cuasilineal del espacio vectorial subyacente a su dual. De esta manera el producto interno de la MQ, obtiene una base rigurosa y limpia.

Lógica Quántica Operatoral

Ahora, para un arbitrario espacio producto interno, V, el ortoretículo atomístico completo $L(V)$ de subespacios biortogonales, no tiene que ser ortomodular. Cuando lo es, V se denomina *espacio Hilbert generalizado*. Esta terminología está motivada por otro resultado llamativo; a saber, si V es un espacio producto interno sobre uno de los anillos de división, estándar (es decir, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ó $\mathbb{H}$), entonces $L(V)$ es ortomodular syss V es completo. Esto fue probado primero por PIRON, usando una hipótesis sobre extensiones de medidas, que resultó ser independiente de la Teoría de Conjuntos ZF; bajo influjo de STONE, más tarde, una prueba geométrica fue obtenida por AMEMIYA y ARAKI [1965].[8] Finalmente, diremos que el formalismo de la Escuela de Ginebra, que fue inspirado por este teorema, ha sido ampliamente aplicado a varios problemas de carácter más o menos concreto, por ejemplo, simetrías [EMCH y PIRON, 1962, 1963], reglas de superselección [PIRON, 1965, 1969], observables [PIRON, 1971; GIOVANNINI y PIRON, 1979; GIOVANNINI, 1981a, b, c], probabilidad *a priori* [PIRON, 1972] y procesos irreversibles [GISIN y PIRON, 1981; GISIN, 1981, 1982 a, b, 1983 a, b].

4.2. Axiomática PIRON

Los axiomas MACKEY producen sólo un COM σ-completo L —lo cual dista mucho del ROM ortomodular atomístico completo, considerado en el Teorema de PIRON. PIRON fue capaz de motivar la estructura adicional necesaria en el contexto de un marco axiomático similar al MACKEY, pero difiriendo de él, en que toma como básico, no el concepto de probabilidad, sino un concepto de *propiedad física*, basado en la *certidumbre* de obtener un resultado experimental. Aquí PIRON, conscientemente, aprovecha el trabajo de DIRAC [1930 §1.2], que da una discusión operatoral de la polarización de la luz, en términos de la certidumbre o, de otra manera, del paso a través de un cristal apropiado y la concepción de EINSTEIN, PODOLSKY y ROSEN [1935], de que los elementos de la realidad son condiciones suficientes para que uno sea capaz de predecir una cantidad física con certidumbre y sin perturbar al sistema.

---

[8] Téngase en cuenta que recientemente, se han encontrado condiciones necesarias y suficientes para que el anillo de división subyacente sea estándar —una de las declaraciones más simples en el caso infinito dimensional, es que el espacio vectorial admite una sucesión ortonormal infinita [SOLÈR, 1995; HOLLAND, 1995; PRESTEL, 1995]; para ver un ejemplo de un espacio HILBERT generalizado no estándar, ver [KELLER, 1980], para una discusión detallada de la geometría de los espacios HILBERT generalizados, ver [GROSS, 1979, 1990] y, para una reseña de otros resultados de compleción, ver [DVUREČENSKIJ, 1992].

PIRON comienza con un conjunto primitivo $\mathcal{Q}$ de cuestiones —que representan proyectos experimentales definidos, que tienen sólo dos resultados posibles, que designamos como *sí* y *no*. Para facilitar la presentación consideremos dado, un conjunto $\mathcal{P}$ de *procedimientos de preparación*.[9] Para $P \in \mathcal{P}$ y $\alpha \in \mathcal{Q}$, escribimos $P \vDash \alpha$ para indicar que la preparación P es tal, que puede predecirse con certidumbre, que la respuesta a la cuestión α, es *sí*. Entonces podemos asociar, a cada cuestión α, la *proposición*

$$[\alpha] = \{P \in \mathcal{P} \mid \mathrm{P} \vDash \alpha\}.$$

Sea $\mathcal{L} \coloneqq \{[\alpha] \mid \alpha \in \mathcal{Q}\}$ el conjunto de todas esas proposiciones, considerado como conjuntopo con respecto a la inclusión de conjuntos. Nótese que $[\alpha] \subseteq [\beta]$ syss cada preparación que hace válida a α, también hace válida a β. PIRON procede a aducir varios axiomas cuya fuerza es la de hacer a $\mathcal{L}$ un ROM atomístico completo, que satisface la ley de cubrimiento.

$\mathcal{L}$ es un retículo completo. El primero y, probablemente el más novedoso, de estos axiomas; involucra la noción de *cuestión producto*. Dado un conjunto no vacío de cuestiones, su producto es la cuestión $\alpha = \prod A$, definido como sigue: para plantear α, se selecciona, de la manera que se quiera, una cuestión $\beta \in A$ y, planteando esta cuestión, se atribuye a α la respuesta obtenida. El primer axioma de PIRON requiere que $\mathcal{Q}$ sea cerrado con respecto a la formación de cuestiones sobre productos arbitrarios. Un momento de reflexión revela que $\left[\prod A\right] = \bigcap_{\beta \in A} [\beta]$. Por lo tanto, $\mathcal{L}$ es cerrado bajo intersecciones arbitrarias y, por tanto, un retículo completo.[10]

Ortocomplementación. Si α es cualquier cuestión, podemos definir una cuestión inversa $\alpha^{\sim}$ intercambiando los papeles de sí y no. PIRON requiere que $\mathcal{Q}$ sea cerrado bajo la formación de inversas. La interpretación prevista nos obliga a suponer que

---

[9] Nótese que esto no es estrictamente necesario, sino que es sólo un expediente para evitar locuciones tales como “si el sistema está o, ha sido preparado, de tal manera que...” Del mismo modo, la identificación usual de proposiciones con clases de equivalencia de cuestiones, está hecha para facilitar la exposición y no debe tomarse formalmente, como una definición.

[10] La operación producto fue introducida primero en [JAUCH and PIRON, 1969]. La concurrencia había sido introducida antes, mediante conjunción semántica [Piron 1964] o filtros límites [Jauch, 1968].

$[\alpha] \cap [\alpha^{\sim}] = \emptyset$. Para asegurar una ortocomplementación sobre $\mathcal{L}$, PIRON introduce otro axioma, a saber, que para cada cuestión α, existe un *complemento compatible* $\beta \in [\alpha]$ que satisface $[\beta^{\sim}] \vee [\alpha] = 1$.[11]

Ortomodularidad. Aparentemente, esto no descarta la posibilidad de que existan varios complementos compatibles para un α dado, no equivalentes. Sin embargo, esto se resuelva por un tercer axioma PIRON

Axioma P*: Si $b < c$ y b'y c' son complementos compatibles para b y c, respectivamente, entonces el subretículo de $\mathcal{L}$, generado por b, c, b', c', es distributivo.*

Se deduce que los complementos compatibles son únicos, definiendo, por tanto una ortocomplementación. Además, el axioma P determina que $\mathcal{L}$ es ortomodular: si $b < c$, entonces $(c \wedge b') \vee b = c$, por la distributividad de $\{b, c, b, c'\}$.

Atomicidad y ley de cubrimiento. PIRON impone la atomicidad del retículo con un axioma *ad hoc* (A1) requiriendo que $\mathcal{L}$ sea atómico —es decir, cada elemento domina al menos a un átomo. También impuso directamente la ley de cubrimiento (como axioma A2), pero con una motivación substancial, como sigue. Sea Σ_L el conjunto de los átomos de L. Ahora, en cada conjuntopo ortocomplementado L, la *aplicación SASAKI* ϕ: $L \times L \rightarrow L$, viene dada por $\phi(a, b) = b \wedge (b' \vee a)$. Si b es fijo, escribimos ϕ_b: $L \rightarrow L$ para asignación $\phi_b(a) = \phi(a, b) = b \wedge (b' \vee a)$. Nótese que L es ortomodular syss $\phi_b(a) = a$ para todo $a \leq b$, en cuyo caso $\phi_b(a) \vee b' = a \vee b'$. Con estas observaciones, no es difícil demostrar que un ROM L satisface la ley de cubrimiento atómico syss para todo $a \in L$, tenemos $a \in \Sigma_L \;\&\; b \not\perp a \;\Rightarrow \phi_b(a) \in \Sigma_L$. Entonces tenemos una formulación alternativa de la ley de cubrimiento, a saber, que las proyecciones SASAKI asignan átomos a átomos o a 0.

PIRON define al estado del sistema como el conjunto de todas las proposiciones $p = [\alpha]$ que son válidas (en un momento dado, en una situación dada). Naturalmente se requiere que el estado sea cerrado con respecto a la intersección y la ampliación, es decir, que sea un filtro completo en el retículo $\mathcal{L}$. Un tal filtro es

[11] El hecho de que un axioma deba ser postulado para garantizar la existencia de una ortocomplementación, se debe al hecho de que los inversos de cuestiones equivalentes no tienen que ser equivalentes. Por ejemplo, $0 \cdot I = 0$ sin embargo $(0 \cdot I)^{\sim} = 0^{\sim} \cdot I^{\sim} = I \cdot 0 = 0$ y $0^{\sim} = I$. Para una discusión de algunas confusiones sobre este punto, ver [FOULIS and RANDALL, 1984].

principal y generado por un átomo. Por lo tanto, los estados pueden ser representados por átomos.[12] 13 Finalmente, diremos que a, $b \in \mathcal{L}$, son compatibles syss {a, b, a', b′} es distributiva syss $\phi_b(a) = a \wedge b$. PIRON llama a las cuestiones

(a) *ideales* syss cada proposición compatible con [α], que es válida antes de una medición de α, también es válida después, cuando el resultado de esa medición es *sí*.

(b) de *primera clase* syss la respuesta a α inmediatamente después de asegurar la respuesta *sí* es *válida*, sea otra vez, *sí*.

Considerando al axioma A2 (es decir, la ley de cubrimiento), se puede entonces probar que, para β una medición ideal de primera clase de $b \in \mathcal{L}$, si a es el estado antes de la medición, entonces el estado, después de asegurar *sí* sobre la medición de α, es $\phi_b(a)$.

Muchas personas han encontrado convincente al razonamiento físico que motiva los axiomas PIRON. Sin embargo, este marco resulta tener algunas limitaciones agudas. En particular, un sistema formado por dos sistemas "separados", en el sentido de AERTS [1981, 1982], cada una de los cuales, individualmente, obedece a los axiomas PIRON, conformaría como un todo, a estos axiomas si y sólo si uno de los sistemas es clásico. Para probar este resultado clave, AERTS aprovecha la noción de *relación de ortogonalidad*, según la cual dos estados son ortogonales si existe una cuestión que es válida para el primero e imposible para el segundo. El uso de esta relación se ha vuelto central en axiomatizaciones más recientes del enfoque Escuela de Ginebra, como [PIRON, 1990; MOORE, 1999]. Para un análisis detallado, ver [VALCKENBORGH, 2000]. Nótese que en estas obras, la atención se centra en ortoretículos atomísticos completos como modelos para las axiomatizaciones más directas basadas en la dualidad entre el estado y las descripciones de propiedades de un sistema físico. Un poco paradójicamente, entonces, el enfoque PIRON mantiene un axioma rechazado en el enfoque COM — es decir, compleción — y rechaza otro que mantiene el último — a saber (alguna forma de) ortomodularidad. Como veremos en la siguiente sección, este escote es sintomático del hecho de que

---

[12] Recíprocamente, si $p \neq 0$, entonces $p = [\alpha]$, donde α es una cuestión que es válida para, al menos, una preparación. Así, existe al menos un estado (es decir, cualquier estado compatible con esa preparación) que contiene a p. Por lo tanto, deben haber suficientes estados de modo que, para cada p en $\mathcal{L}$, hay un estado/átomo $a \leq p$. Pero esto implica inmediatamente, que cada átomo es un estado. Por lo tanto, los estados corresponden exactamente a átomos de $\mathcal{L}$.

uno debe distinguir conceptualmente al retículo de propiedades de un sistema de su lógica, aun cuando resulten ser isomorfos.

5. EL TRABAJO DE FOULIS Y RANDALL

Contemporáneo con estos acontecimientos, se desarrolló el trabajo de DAVE FOULIS y el de CHARLIE RANDALL sobre *Lógica Empírica*, una síntesis feliz de ideas procedentes de sus respectivas tesis doctorales, en Teoría abstracta de Retículos [FOULIS, 1958] y Estadística Operacional Concreta [RANDALL, 1966]. Este formalismo, no sólo proporciona una potente heurística general, sino, como veremos, también ha puesto el fundamento para varios de los desarrollos puramente matemáticos que se discutirán a continuación.

5.1. Espacios de Ensayos

Tanto MACKEY como PIRON comienzan con una estructura primitiva en la que están sin relacionar, para distintos observables, proposiciones experimentales de la forma "el observable A toma valores en el conjunto B". En efecto, cada observable A se asocia a un álgebra BOOLE $\mathcal{B}_A$ de acontecimientos posibles (isomorfo al campo BOREL en el esquema MACKEY y a $\{0, 1\}$ en el PIRON), siendo estos álgebras BOOLE, inicialmente, disjuntos uno del otro. Luego se hacen identificaciones entre álgebras BOOLE correspondientes a diferentes observables. En el esquema MACKEY, proposiciones primitivas (A_1, B_1) y (A_2, B_2) son identificadas syss son *equiprobables* en cada estado; en el PIRON, syss son válidas en exactamente, las mismas situaciones. Ambas aproximaciones a la construcción de la lógica cuántica han sido objeto de algunas críticas. En particular, tal como señala un número de autores, ambas se hacen problemáticas cuando uno considera mediciones compuestas o iteradas.[13]

En una serie de documentos (p. ej. [FOULIS and RANDALL, 1972, 1974, 1978, 1981a; RANDALL and FOULIS, 1970, 1973, 1978, 1983a]), FOULIS y RANDALL desarrollaron una extensa teoría —que denominan *lógica empírica*— en la cual estas identificaciones son dadas *a priori*, sin referencia previa a cualquier concepto de estado o propiedad. Su formalismo se basa en la noción primitiva de *operación* o *ensayo* —es decir, un conjunto definido de posibles *resultados* alternativos, mutuamente exclusivos. La teoría FOULIS-RANDALL se enfoca en espacios de ensayos, es

[13] Un ejemplo simple se ofrece en [COOKE and HILGEVOORD, 1981]. El punto es familiar — incluso en mecánica cuántica con espacios HILBERT ortodoxos, se debe hacer un seguimiento de las relaciones de fase al discutir experimentos iterados y estos se pierden cuando uno identifica proposiciones experimentales según los esquemas de MACKEY ó de PIRON.

decir, colecciones $\mathfrak{A}$ de ensayos superpuestos. Se entiende que se dará la identificación de los resultados entre distintas pruebas, es decir, FOULIS y RANDALL no establecen ninguna doctrina con respecto a cómo deben hacerse esas identificaciones. Denotando por $X = \bigcup\mathfrak{A}$ al *espacio de resultados* de $\mathfrak{A}$, un *estado estadístico* se define como una asignación ω: $X \rightarrow [0, 1]$, tal que $\sum_{x \in E}\omega(x) = 1$ para cada ensayo $E \in \mathfrak{A}$ y un estado *realístico* es representado [FOULIS, PIRON and RANDALL, 1983] por una cierta clase de subconjunto de X, llamado un *soporte*, que representa a la totalidad de los resultados posibles en ese estado. Nótese que, aparte de sus propios méritos, este concepto puede ser utilizado para dar un tratamiento matemático perspicuo de axiomática PIRON; véase [RANDALL and FOULIS, 1983b] y [WILCE, 1997].

Se puede acoplar un número de objetos algebraicos, analíticos y de orden a un espacio de ensayos $\mathfrak{A}$, cada uno sirviendo de manera ligeramente diferente, como una especie de "lógica". Bajo condiciones normativas simples sobre la estructura combinatoria de $\mathfrak{A}$, éstos resultan coincidir con estructuras más familiares. En particular, si $\mathfrak{A}$ es “algebraico”,[14] se puede construir a partir de los eventos de $\mathfrak{A}$, una bastante bien comportada, estructura algebraica parcialmente ordenada $\Pi(\mathfrak{A})$, llamada un *ortoálgebra*. Éstos se pueden definir abstractamente: un ortoálgebra es un par $(L, \oplus)$ donde L es un conjunto y $\oplus$ es una operación binaria parcial asociativa, conmutativa, en L, que cumple las tres condiciones siguientes:

(a) Existe un elemento neutro $0 \in L$ tal que, para cada $p \in L$, $p \oplus 0 = p$.

(b) Existe un elemento unidad $1 \in L$ tal que, para cada $p \in L$, hay un único $q \in L$, con $p \oplus q = 1$;

(c) Si $p \oplus p$ existe, entonces $p = 0$.

Así, los ortoálgebras generalizan a los COM’s, que se pueden definir como ortoálgebras en los cuales, dado que $p \oplus q$, $q \oplus r$ y $r \oplus p$ existen, el elemento $p \oplus q \oplus r$ también existe. Este axioma, llamado de ortocoherencia, es en realidad una versión finitística del axioma MACKEY, V. Recíprocamente, desdeñando la condición (c), obtenemos lo que se llama un *álgebra de efectos*, llamado ortoálgebra ge-

---

[14] Un espacio de ensayos es algebraico si dos elementos cualesquiera con un complemento común, comparten exactamente, los mismos complementos, donde A y B son complementos si son disjuntos y $A \cup B$ es un ensayo.

neralizado por [GIUNTINI and Greuling, 1989] y D-conjuntopo por [KÔPKA, 1992]

5.2. Ortoálgebras

Los ortoálgebras y álgebras de efectos son objetos suficientemente regulares como para tener una interesante teoría matemática (una que sólo está empezando a ser explorada). En particular, casi todo el aparato conceptual de la LQ basada en COM's, tales como centros [RÜTTIMANN, FOULIS and PULMANNOVÁ, 1995] y proyecciones SASAKI [BENNETT and FOULIS, 1998; WILCE, 2000], pueden extenderse bastante fácilmente a este contexto más general. Por otro lado, debido a su simplicidad, los espacios de ensayos son, a menudo, mucho más fácil de manipular que sus asociados "lógicas". También tienen la ventaja heurística de que la interpretación operatoral está, por así decirlo, concorde en la superficie, con lógicas que sirven sólo como invariantes útiles. En particular, mientras que es completamente sencillo combinar espacios de ensayos secuencialmente, los diversos "lógicas" raramente permiten tales combinaciones. Por último, si $\mathfrak{A}$ es algebraico, existe una asignación canónica que preserva orden $L \rightarrow \mathcal{L}$, del lógica de $\mathfrak{A}$ en el retículo de propiedades asociado a cualquier entidad ($\mathfrak{A}$, Σ) sobre $\mathfrak{A}$. Tanto en los ejemplos mecánico-clásicos como en los mecánico-quánticos, esta asignación es en realidad un isomorfismo, así que L hereda de $\mathcal{L}$ la estructura de retículo completo y $\mathcal{L}$ hereda de L una ortocomplementación y una ortomodularidad. Este isomorfismo es, sin embargo, la excepción más bien que la regla. Como han señalado [FOULIS, PIRON and RANDALL, 1983], la tendencia a identificar $\mathcal{L}$ y L —aun cuando sean isomorfos— ha provocado una gran confusión innecesaria en las discusiones de los fundamentos y la interpretación de la mecánica cuántica.

Además de su incomodidad en el trato con las mediciones secuenciales, otra dificultad que se presenta con el esquema MACKEY de LQ, de nuevo reconocida primero, por FOULIS y RANDALL [1979], es que no es estable en la formación de cualquier tipo de *producto tensorial* razonable. Dados LQ's (L, Δ) y (L′, Δ'), en el entendido de cada uno que representa a un sistema "físico", se quiere construir un modelo (M, Γ) del sistema acoplado, en el que L y L' puedan mostrar correlaciones, pero no interactúan directamente. Los requisitos mínimos serían que

(a) existe una asignación $L \times L' \rightarrow M$, que lleva p, q a alguna proposición representativa $p \otimes q \in M$, y

(b) para cada par de estados $\mu \in \Delta$, $\nu \in \Delta'$, podemos formar un estado $\mu \otimes \nu \in \Gamma$ tal que $(\mu \otimes \nu)(p \otimes q) = \mu(p)\nu(q)$.

Sin embargo, FOULIS y RANDALL producen un simple ejemplo que muestra que esto, en general, es imposible: un pequeño y finito ROM *L*, con un completo conjunto de estados tales que no existe un tal "producto tensorial" para dos copias de *L*.

El culpable resulta ser el axioma MACKEY, V —o, más precisamente, la ortocoherencia.

De hecho, se puede demostrar, bajo la suposición muy tenue, de que los ortoálgebras involucrados, cada uno lleva una familia unital de estados, que se pueden formar productos tensoriales de los ortoálgebras, de manera que se satisfagan los desiderata (a) y (b) [FOULIS and RANDALL, 1981b; RANDALL and FOULIS, 1981]. Sin embargo, como ilustra el ejemplo recién considerado, la ortocoherencia no es estable con respecto a estos productos tensoriales. Combinando estos resultados con los resultados negativos mencionados, de AERTS, para retículos de propiedades, lo que aparece es que el isomorfismo entre lógica y retículo de propiedades, característico de sistemas clásicos y cuánticos, se descompone cuando uno forma productos tensoriales, a menos que los sistemas en cuestión, sean clásicos. Esto no quiere decir que los resultados sean totalmente negativos. Investigaciones posteriores en la estructura de los productos tensoriales [KLÄY, RANDALL and FOULIS, 1987; GOLFIN, 1987; WILCE, 1990, 1992; BENNETT and FOULIS, 1993; DVUREČENSKIJ y PULMANNOVÁ, 1994; DVUREČENSKIJ, 1995] revelaron que los productos tensoriales FOULIS-RANDALL de entidades mecánico-quánticas, aunque no estrictamente quánticos, aún conservan una rica estructura geométrica.

Estos resultados dieron un impulso sustancial al estudio de ortoálgebras, espacios de ensayos y otras estructuras más generales que aquellas consideradas por MACKEY y PIRON (algunas de los cuales serán discutidas más abajo). La teoría de los espacios de ensayos, en particular, se ha desarrollado en varias direcciones en las últimas décadas. Un número de autores (por ejemplo, [DVUREČENSKIJ and PULMANNOVÁ, 1994b; PULMANNOVÁ and WILCE, 1995; GUDDER, 1997]) han discutido los espacios de ensayos generalizados, en los que se permite a los resultados ocurrir con alguna multiplicidad o intensidad y éstos se han utilizado para proporcionar una semántica operatoral para álgebras de efectos, que es paralela a la semántica de espacios de ensayos para ortoálgebras. En [HABIL, 1993] se ha discutido Teoría de la Medida sobre ortoálgebras. NISHIMURA [1993, 1995] ha generalizado la idea de espacio de ensayos, mediante la sustitución de conjuntos discretos de resultados por algebras BOOLE completas y locales. [WILCE, 2000] da un estudio actualizado de la teoría FOULIS-RANDALL; para una visión personal del desarrollo histórico de este filamento de lógica quántica operatoral ver [FOULIS, 1998, 1999].

6. Estructuras Ortomodulares.

Hasta el momento, nos hemos centrado en LQ como un programa interpretativo o fundamental en Física. Pero el tema tiene otras raíces absolutamente independientes en matemática pura. VON NEUMANN mismo, ha recalcado la importancia de métodos de teoría del orden, en el estudio de análogos infinito-dimensionales, de Geometría Proyectiva. LOOMIS [1955] y MAEDA [1955] independientemente, reconocieron que una porción de teoría de la dimensión de álgebras VON NEUMANN, podría ser extendida a un entorno puramente teórico-reticular, es decir, a un ROM provisto de una adecuada relación de equivalencia. Esto estimuló a algunos matemáticos a comenzar a investigar ROM's *en abstracto*. Pronto se hizo evidente que tales retículos ocurren con naturalidad en una amplia gama de contextos matemáticos. Si $(S, *)$ es cualquier semigrupo involutivo, llamemos una *proyección* a un elemento $p \in S$ que satisface $p = p^2 = p*$. Si S contiene un elemento cero (bilateral), el *dextro-anulador* de $x \in S$ es el dextro-ideal $\{a \in S \mid ax = 0\}$. FOULIS [1958, 1960, 1962] define a un **-semigrupo* BAER como un semigrupo involutivo S, con cero, que tiene la propiedad de que el dextro-anulador de cualquier elemento $x \in S$ es el dextro-ideal generado por una (necesariamente, única) proyección x'. Mostró que el conjunto $L(S)$ de proyecciones *cerradas* $p = p''$, en S, siempre forman un ROM. Recíprocamente, cada ROM se puede representar como $L(S)$ para algún *-semigrupo BAER. En efecto, aunque esta representación no es única, hay una opción canónica de S; a saber, el semigrupo $S(L)$ de las auto-aplicaciones residuadas de L, es decir, las asignaciones ϕ: $L \rightarrow L$, para las cuales existe una asignación ψ: $L \rightarrow L$, que satisface $\psi(x) \leq y' \Leftrightarrow x \leq \phi(y)'$. Entre estas asignaciones están las proyecciones SASAKI ϕ_b, discutidas en Sección 4, que resultan ser exactamente, las proyecciones cerradas en $S(L)$.

En las décadas siguientes, una substancial teoría pura de ROM's fue desarrollada por FOULIS y otros. El estado de esta teoría a partir de la década de 1980, está representado por el libro de KLAMATH [1983]. [BRUNS and HARDING, 2000] discuten acontecimientos más recientes, de los cuales ha habido muchos.

Particularmente llamativo es el reciente descubrimiento por HARDING [1996, 1998], de que se puede organizar al conjunto de descomposiciones en productos directos de esencialmente, cualquier objeto algebraico en un COM.

Por otro lado, el trabajo continuado en el programa MACKEY también produjo una variedad de estructuras más generales que ROM's y conjuntopos —ortoálgebras, los aún más generales álgebras de efectos y, en una dirección diferente, los álgebras BOOLE parciales de KOCHEN y SPECKER [1967]. Todos estos son objetos principalmente, algebraicos parciales y, sólo secundariamente, ordino-teóricos. Han atraído, especialmente durante los últimos años, significativo interés matemático.[15]

La teoría de álgebras de efectos, gran parte de la cual es debida a la labor pionera de FOULIS y M. K. BENNETT [BENNETT and FOULIS, 1995, 1997; FOULIS and BENNETT, 1994], se continúa desarrollando rápidamente. De particular interés es aquí, su reciente reformulación de una gran parte de la teoría de álgebras de efectos (y por lo tanto, de la LQ) como una rama de la teoría de grupos abelianos ordenados, que también se discute en [FOULIS, BENNETT and RÜTTIMANN, 1996; FOULIS, RÜTTIMANN and BENNETT, 1998; WILCE 1995, 1998]. Este es el tema de [FOULIS, 2000].

Finalmente, también se han estudiado ROM's detalladamente, en el contexto puramente lógico y, en particular, la posibilidad de definir conectivos de implicación razonables. Uno de los resultados básicos en este sentido, es el de KALMBACH [1974] que, aprovechando la caracterización de ROM's libres sobre dos generadores [BRUNS and KALMBACH, 1973], fue capaz de demostrar que hay exactamente cinco polinomios reticulares $a \to b$, satisfaciendo la condición implicativa primitiva $a \leq b \Leftrightarrow (a \to b) = 1$. Nótese que aquí, la ortomodularidad es esencial, un simple examen del no-ortomodular "anillo bencénico" que muestra que tales conectivos no existen en el caso no-ortomodular [MOORE, 1993]. Para un análisis de la más débil condición de exportación $a \leq b \Rightarrow (a \to b) = 1$, conjuntamente con el *modus ponens*, véase [HERMAN, MARSDEN and PIZIAK, 1975] y, para una investigación detallada del teorema de deducción, ver MALINOWSKI [1990, 1992]. Por otro lado, la definición de una relación Kripkeana de accesibilidad inducida a partir de la *no*-ortogonalidad, una idea que tiene sus orígenes en labor de FOULIS y RANDALL sobre ortogonalidad lexicográfica [1971], ha permitido la introducción de la LQ modal [DALLA CHIARA, 1977, 1983; GOLDBLATT, 1974, 1975]. Por supuesto, ha habido mucho otros trabajos sobre las implicaciones en LQ; Para descripciones generales, véase, por ejemplo, [DALLA CHIARA, 1986; VAN FRAASSEN, 1981; HARDEGREE and FRAZER, 1981].

---

[15] Un resultado notable es el de KOCHEN y CONWAY [KOCHEN, 1996], de que muy pequeños conjuntos de proyecciones en $\mathbb{P}(H)$ generan una álgebra Boole parcial que es densa en el retículo de proyecciones.

7. ASPECTOS DINÁMICOS, CATEGORIALES Y COMPUTACIONALES.

Cerramos considerando la reformulación categorial de las nociones básicas de estructuras de orden y su aplicación a la Teoría Quántica Operatoral, un tema con fuertes vínculos con varios desarrollos recientes en Teoría de Categorías Enriquecida y Semántica Computacional. El instrumento básico de esta teoría, son los pares $f \dashv g$, donde f: $L \rightarrow M$ y g: $M \rightarrow L$, son aplicaciones isótonas entre conjunto-pos, satisfaciendo la condición de adjunción $\mathrm{f}(a) \leq b \Leftrightarrow a \leq g(b)$.

Para un desarrollo aterrizado, de la teoría de adjunciones con un enfoque particular en sus aplicaciones operatorales, nos referimos a [COECKE and MOORE 2000]. Es divertido hacer notar que este concepto puede utilizarse para arrojar alguna luz sobre la observación de BIRKHOFF y VON NEUMANN citada anteriormente, de que mientras que los filósofos han tendido a centrarse en la naturaleza de la negación en lógicas no clásicas, el estudio de MQ destaca la ley distributiva como el eslabón más débil en LQO. Para ver esto, observemos que los álgebras HEYTING, considerados como modelos para la lógica intuicionista, pueden definirse como aquellos retículos que admiten un conexión de implicación $\rightarrow$ que satisface la condición de adjunción $(x \wedge a) \leq \mathrm{b} \Leftrightarrow x \leq (a \rightarrow \mathrm{b})$ [BIRKHOFF, 1940 §161; BIRKHOFF, 1942 §27].

Puesto que la condición $f \dashv g$ implica que f preserva las juntas existentes y g preserva las concurrencias existentes, cualquier álgebra HEYTING es distributivo.

Por otro lado, gran parte de la teoría de estructuras de ROM's se basa en la llamada adjunción SASAKI $\phi_a \dashv \phi^a$, donde

$$\phi_a(x) = a \wedge (a' \vee x) \quad \text{y} \quad \phi^a(x) = a' \vee (a \wedge x)$$

[NAKAMURA, 1957; SASAKI, 1955].

En cierto sentido, podemos considerar a los álgebras HEYTING como una clase de retículos distributivos donde aquellos elementos que poseen un complemento pueden caracterizarse simplemente y a los ROM's, como una clase de ortoretículos donde el conjunto de complementos de cualquier elemento, puede ser computado simplemente.

Para discusiones de álgebras HEYTING y retículos semicomplementados más generales, ver [CURRY, 1963; FRINK, 1962; KÖHLER, 1981; NEMITZ, 1965].

Una de las primeras y más importantes aplicaciones, de las residuaciones en ROM's fue el trabajo pionero de FOULIS sobre $*$-semigrupos BAER, descrito anteriormente. Esta investigación no sólo ha conducido a una comprensión más profunda de la noción de residuación [BLYTH y JANOWITZ, 1972; DERDÉRIAN, 1967], sino que también fue crucial en el desarrollo de los aspectos dinámicos de LQO. Uno de los primeros de estos acontecimientos, fue el trabajo de POOL [1968a, b], que buscaba una interpretación fenomenológica de los *-semigrupos BAER vía la noción de probabilidad condicional suministrada por la teoría quántica de mediciones, convencional.

Un enfoque más claramente operatoral, a evoluciones en general, estuvo a cargo de DANIEL [1982, 1989] y fue extendido por FAURE, MOORE y PIRON [1995], conduciendo el último a un estudio general de las categorías de espacios de estados y retículos de propiedades [MOORE, 1995, 1997]. Aquí una evolución externamente impuesta es modelada retrotrayendo proyectos experimentales definitivos, definidos en el momento final, hasta sus imágenes definidas en el momento inicial. Mediante argumentos físicos, esta aplicación debe preservar el funcionamiento del producto y así, la concurrencia en el retículo. Por lo tanto, en condiciones de estabilidad apropiadas, su levo-adjunto, que preserva las juntas, describe la propagación del estado del sistema. Estas observaciones han sido generalizadas por AMIRA, COECKE y STUBBE [1998], que explican la estructura de los ensayos operatorales derivados de las nociones de libertad de elección y composición. Nótese que la última de estas nociones en particular, juega un papel fundamental en la heurística de FOULIS y RANDALL antes mencionados.

Finalmente, la estructura abstracta de resoluciones operatorales ha sido analizada por COECKE y STUBBE [1999a, b, 2000], permitiendo, por ejemplo, un análisis de los conceptos físicos de componibilidad [COECKE, 2000] y la dualidad entre causalidad y propagación [COECKE, MOORE and STUBBE, 2000].

Matemáticamente, la estructura inducida a partir de las resoluciones operatorales, es la de un *quantaloide*, es decir una categoría cuyos conjuntos de morfismos son retículos completos con respecto a las juntas, de modo que la composición se distribuye a ambos lados sobre las juntas.[16] Se obtiene así, un ejemplo simple de *categoría enriquecida*, en la cual los conjuntos de morfismos son objetos de alguna

---

[16] El nombre quantaloide fue introducido por ROSENTHAL [1991], aunque gran parte del desarrollo conceptual básico ya había sido hecho por JOYAL y TIERNEY [1984] y PITTS [1988] en sus estudios de los topoi de GROTHENDIECK.

categoría base y la composición se hace mediante transformaciones naturales que satisfacen criterios de coherencia. Esto se ha convertido en un concepto central en la Teoría de Categorías y es tratado en el texto estándar [BORCEUX, 1994]; para un tratamiento especializado, ver [KELLY, 1982] y para un desarrollo didáctico, ver [BORCEUX and STUBBE, 2000].

Al limitar la atención a las categorías con un solo objeto, recuperamos a los quantales, introducidos por MULVEY [1986], como generalización no conmutativa de locales.[17] Aquí puede mencionarse la reciente extensión de las nociones locálicas de simplicidad y espacialidad en el contexto de quantales [KRUML, 2000; PASEKA, 1997; PASEKA and KRUML, 2000; ROSICKÝ, 1995], un tema tratado en detalle en [ROSICKÝ and PASEKA, 2000]. Es interesante señalar que estructuras similares también han sido aprovechadas en Informática. Un ejemplo importante es la llamada *lógica observacional* de ABRAMSKY y VICKERS [ABRAMSKY, 1991; ABRAMSKY y VICKERS, 1993; VICKERS, 1989]. Aquí se observa que la posibilidad de que la observación induzca un cambio de estado, formalmente conduce a un tránsito de marcos a quantales. Esta línea de pensamiento ha sido extendida por RESENDE [1999, 2000], que describe los sistemas generales en base a su comportamiento observable independientemente de cualquier supuesto espacio de estado. Para una revisión general, ver [RESENDE, 2000]. Debe señalarse, sin embargo, que estas consideraciones son bastante diferentes de la noción contemporánea de computación quántica (véase por ejemplo la teoría general de lenguajes quánticos [Gudder, 2000], es decir, lenguajes aceptados por autómatas quánticos).

Referencias

[1] ABRAMSKY, S. (1991) Domain theory in logical form, Annals *of Pure and Applied Logic* **51**, 1–77.

[2] ABRAMSKY, S. and VICKERS, S. (1993) Quantales, observational logic, and process semantics, *Mathematical Structures in Computer Science* **3**, 161–227.

[3] AERTS, D. (1981) *The One and the Many: Towards a Unification of the Quantum and the Classical Description of One and many Physical Entities*, Doc-

[17] Téngase en cuenta que los antecedentes históricos de estas nociones se remonta a la labor de WARD y DILWORTH [WARD, 1937, 1938; WARD and DILWORTH, 1939a, b], que utilizan estas multiplicaciones para estudiar ideales en anillos; una técnica que se ha aplicado recientemente a C*-álgebras no conmutativos [BORCEUX, ROSICKÝ and VAN DEN BOSSCHE, 1989; ROSICKÝ, 1989].

toral Dissertation, Free University of Brussels.

[4] AERTS, D. (1982) Description of many separated physical entities without the paradoxes encountered in quantum mechanics, *Foundations of Physics* 12, 1131–1170.

[5] AMEMIYA, I. and ARAKI, H. (1967) A remark on PIRON's paper, Publications *of the Research Institute of Mathematical Sciences Kyoto University* A **2**, 423–429.

[6] AMIRA, H., COECKE, B., AND STUBBE, I. (1998) How quantales emerge by introducing induction within the operational approach, *Helvetica Physica Acta* **71**, 554–572.

[7] AMREIN, W.O. (1969) Localizability for particles of mass zero, *Helvetica Physica Acta* **42**, 149–190.

[8] BAMBERG, P., and STERNBERG, S. (1990) *A Course in Mathematics for Students of Physics*, Harvard University Press, and Cambridge.

[9] BELTRAMETTI, E. G. and CASSINELLI, J. (1981) *The Logic of Quantum Mechanics*, Addison–Wesley, Reading.

[10] BENNETT, M. K. and FOULIS, D.J. (1995) Phi–symmetric effect algebras, *Foundations of Physics* 25, 1699–1722.

[11] BENNETT, M.K. and FOULIS, D. J. (1997) Interval algebras and unsharp quantum logics, *Advances in Mathematics* **19**, 200–215.

[12] BENNETT, M.K. and FOULIS, D.J. (1998) A generalized Sasaki projection for effect algebras, *Tatra Mountains Mathematical Publications* **15**, 55–66.

[13] BLYTH, T.S. and JANOWITZ, M.F. (1972) *Residuation Theory*, Pergamon Press, New York.

[14] BIRKHOFF, G. (1940) *Lattice Theory*, American Mathematical Society, Providence.

[15] BIRKHOFF, G. (1942) Lattice–ordered groups, *Annals of Mathematics* **43**, 298–331.

[16] BIRKHOFF, G. and VON NEUMANN, J. (1936) The logic of quantum mechanics, *Annals of Mathematics* **37**, 823–843.

[17] BORCEUX, F. (1994) *Handbook of Categorical Algebra*, Cambridge Universi-

ty Press, Cambridge.

[18] BORCEUX, F., ROSICKÝ, J. and VAN DEN BOSSCHE, G. (1989) Quantales and C*–algebras, Journal of the London Mathematical Society 40, 398–404.

[19] BORCEUX, F. and STUBBE, I. (2000) Short introduction to enriched categories, in B. COECKE, D. J. MOORE and A. WILCE (eds.) *Current Research in Operational Quantum Logic: Algebras Categories, Languages*, Kluwer Academic Publishers.

[20] BRUNS, G. and HARDING, J. (2000) Algebraic aspects of orthomodular lattices, in B. COECKE, D.J. MOORE and A. WILCE (eds.) Current *Research in Operational Quantum Logic: Algebras Categories, Languages*, Kluwer Academic Publishers.

[21] BRUNS, G. and KALMBACH, G. (1973) some remarks on free orthomodular lattices, in J. Schmidt (ed.) *Proceedings of the Lattice Theory Conference*, Houston.

[22] BUNCE, L. J. and HAMHALTER, J. (1994) Jauch–PIRON states on von Neumann algebras, *Mathematische Zeitschrift* **215**, 491–502.

[23] BUNCE, L. J. and Wright, J. D. M. (1994) The Mackey–Gleason problem for vector measures on projections in von Neumann algebras, *Journal of the London Mathematical Society* **49**, 133–149.

[24] BUSCH, P., LAHTI, P. J. and MITTELSTAEDT, P. (1991) *The Quantum Theory of Measurement*, Springer-Verlag (Berlin).

[25] CATTANEO, G. and LAUDISA, F. (1994) Axiomatic unsharp quantum theory

(from Mackey to Ludwig and PIRON), *Foundations of Physics* **24**, 631–683.

[26] CATTANEO, G. and NISTICÒ, G. (1993) A model of PIRON's preparation–question structures in Ludwig's selection structures, International *Journal of Theoretical Physics* 32, 407–431.

[27] CHRISTENSEN, E. (1982) Measures on projections and physical states, *Communications in Mathematical Physics* 86, 529–538.

[28] COECKE, B. MOORE, D. WILCE, A. (2001) Operational Quantum Logic: an Overview. arXiv:quant-ph/0008019v2.

[29] COECKE, B. (2000) Structural characterization of compoundness, *Interna-*

tional Journal of Theoretical Physics **39**, 581–590.

[30] COECKE, B. and MOORE, D.J. (2000) Operational Galois adjunctions, in B. COECKE, D. J. MOORE and A. WILCE (eds.) *Current Research in Operational Quantum Logic: Algebras Categories, Languages*, Kluwer Academic Publishers.

[31] COECKE, B., MOORE, D.J. and STUBBE, I. (2001) Quantaloids describing causation and propagation for physical properties, *Foundations of Physics Letters* **14**, 133–145.

[32] COECKE, B., MOORE, D.J. and WILCE, A. [Editors] (2000) *Current Research in Operational Quantum Logic: Algebras, Categories, Languages*, Kluwer Academic Publishers.

[33] COECKE, B. and STUBBE, I. (1999a) Operational resolutions and state transitions in a categorical setting, *Foundations of Physics Letters* **12**, 29–49.

[34] COECKE, B. and STUBBE, I. (1999b) On a duality of quantales emerging from an operational resolution, International *Journal of Theoretical Physics* **38**, 3269–3281.

[35] COECKE, B. and STUBBE, I. (2000) State transitions as morphisms for complete lattices, *International Journal of Theoretical Physics* 39, 601–610.

[36] COOKE, R.M., and HILGEVOORD, J. (1981) A new approach to equivalence in quantum logic, in E. BELTRAMETTI and B.C. van Fraassen, (eds.) *Current Issues in Quantum Logic*, Plenum, New York.

[37] CURRY, H. B. (1963) *Foundations of Mathematical Logic*, McGraw–Hill, New York.

[38] DÄHN, G. (1968) Attempt of an axiomatic foundations of quantum mechanics and more general theories. IV, *Communications in Mathematical Physics* **9**, 192–211.

[39] DÄHN, G. (1972) The algebra generated by physical filters, *Communications in Mathematical Physics* **28**, 109–122.

[40] DALLA CHIARA, M. L. (1977) Quantum logic and physical modalities, *Journal of Philosophical Logic* **6**, 391–404.

[41] DALLA CHIARA, M. L. (1983) Physical implications in a Kripkean semantical approach to physical theories, in *Logic in the 20th Century*, Scienta (Milan).

[42] DALLA CHIARA, M.L. (1986) Quantum logic, in D. Gabbay and F. Guenthner (eds.) Handbook of Philosophical Logic, D. Reidel, Dordrecht.

[43] DANIEL, W. (1982) On a non–unitary evolution of quantum systems, *Helvetica Physica Acta* **55**, 330–338.

[44] DANIEL, W. (1989) Axiomatic description of irreversible and reversible evolution of a physical system, *Helvetica Physica Acta* **62**, 941–968.

[45] DERDÉRIAN, J. -C. (1967) Residuated mappings, *Pacific Journal of Mathematics* **20**, 35–43.

[46] Dirac, P. A. M. (1930) *The Principles of Quantum Mechanics*, Fourth edition. Clarendon Press, Oxford.

[47] DVUREČENSKIJ, A. (1992) Quantum logics and completeness criteria of inner product spaces, *International Journal of Theoretical Physics* **31**, 1899–1907.

[48] DVUREČENSKIJ, A. (1993) *Gleason's Theorem and its Applications*, Kluwer (Dordrecht).

[49] DVUREČENSKIJ, A. (1995) Tensor product of difference posets and effect *algebras, International Journal of Theoretical Physics* 34, 1337–1348.

[50] DVUREČENSKIJ, A. and PULMANNOVÁ, S. (1994a) Tensor products of D-posets and D-test spaces, *Reports in Mathematical Physics* **34**, 251–275.

[51] DVUREČENSKIJ, A. and PULMANNOVÁ, S. (1994b) Difference posets, effects, and quantum measurements, *International Journal of Theoretical Physics* **33**, 819–850.

[52] EINSTEIN, A., PODOLSKY, B. and ROSEN, N. (1935) Can quantum–mechanical description of reality be considered complete? *Physcial Review* **47**, 777–780.

[53] EMCH, G. and PIRON, C. (1962) Note sur les symétries en théorie quantique,*Helvetica Physica Acta* **35**, 542–543.

[54] EMCH, G. and PIRON, C. (1963) Symmetry in quantum theory, Journal *of Mathematical Physics* **4**, 469–473.

[55] FAURE, Cl. -A. and FRÖLICHER, A. (1993) Morphisms of projective geometries and of corresponding lattices, *Geometriae Dedicata* **47**, 25–40.

[56] FAURE, Cl.-A. and FRÖLICHER, A. (1994) Morphisms of pro jective geome-

tries and semilinear maps, *Geometriae Dedicata* **53**, 237–269.

[57] FAURE, Cl.-A. and FRÖLICHER, A. (1995) Dualities for infinite–dimensional projective geometries, *Geometriae Dedicata* **56**, 225–236.

[58] FAURE, Cl.-A., MOORE, D. J. and PIRON, C. (1995) Deterministic evolutions and Schrödinger flows, *Helvetica Physica Acta* **68**, 150–157.

[59] FINKELSTEIN, D. (1968) Matter, space and logic, in R.S. Cohen and M. W. Wartofsky (eds.) *Boston Studies in the Philosophy of Science* V, D. Reidel, Dordrecht.

[60] FINKELSTEIN, D. (1972) The physics of logic, in R.G. Colodny (ed.) Paradigms *& Paradoxes: the Philosophical Challenge of the Quantum Domain*, University of Pittsburgh Press, Pittsburgh.

[61] FOULIS, D. J. (1958) *Involution Semigroups*, Doctoral Dissertation, Tulane University.

[62] FOULIS, D. J. (1960) Baer *–semigroups, *Proceedings of the American Mathematical Society* **11**, 648–654.

[63] FOULIS, D. J. (1962) A note on orthomodular lattices, *Portugaliae Mathematica* **21**, 65–72.

[64] FOULIS, D.J. (1998) Mathematical metascience, *Journal of Natural Geometry* **13**, 1–50.

[65] FOULIS, D. J. (1999) A half century of quantum logic —- what have we learned?, in D. Aerts and J. Pykacz (eds.) *Quantum Structures and the Nature of Reality : The Indigo Book of EINSTEIN meets Magritte*, Kluwer, Dordrecht.

[66] FOULIS, D. J. (2000) Representations on unigroups, in B. Coecke, D.J. Moore and A. WILCE (eds.) *Current Research in Operational Quantum Logic: Algebras Categories, Languages*, Kluwer Academic Publishers.

[67] FOULIS, D. J., and BENNETT, M.K. (1993) Tensor products of orthoalgebras, *Order* **10**, 271–282.

[68] FOULIS, D. J. and BENNETT, M. K. (1994) Effect algebras and unsharp quantum logics, *Foundations of Physics* **24**, 1331–1352.

[69] FOULIS, D. J., BENNETT, M. K. and RÜTTIMANN, R. J. (1996) Test groups and

effect algebras, *International Journal of Theoretical Physics* **35**, 1117–1140.

[70] FOULIS, D. J., RÜTTIMANN, R. J. and BENNETT, M. K. (1998) The transition to unigroups, *International Journal of Theoretical Physics* **37**, 45–63.

[71] FOULIS, D. J., RÜTTIMANN, R. J. and RÜTTIMANN, G. T. (1992) Filters and supports in orthoalgebras, *International Journal of Theoretical Physics* **31**, 789–807.

[72] FOULIS, D. J., RÜTTIMANN, R. J. and RÜTTIMANN, G. T. (1993) Logicoalgebraic structures II. Supports in test spaces, *International Journal of Theoretical Physics* **32**, 1675–1690.

[73] FOULIS, D. J., PIRON, C. and RANDALL, C. H. (1983) Realism, operationalism, and quantum mechanics, *Foundations of Physics* **13**, 813–841.

[74] FOULIS, D. J. and RANDALL, C. H. (1971) Lexicographic orthogonality, *Journal of Combinatorial Theory* **11**, 157–162.

[75] FOULIS, D. J. and RANDALL, C. H. (1972) Operational statistics. I. Basic concepts, *Journal of Mathematical Physics* **13**, 1667–1675.

[76] FOULIS, D. J. and RANDALL, C. H. (1974) Empirical logic and quantum mechanics, *Synthese* **29**, 81–111.

[77] FOULIS, D. J. and RANDALL, C. H. (1978) Manuals, morphisms and quantum mechanics, in A. Marlow (ed.) *Mathematical Foundations of Quantum Theory*, Academic Press, New York.

[78] FOULIS, D.J. and RANDALL, C. H. (1979) Tensor products of quantum logics do not exist, *Notices of the American Mathematical Society* **26**, 557.

[79] FOULIS, D. J. and RANDALL, C. H. (1981a) What are quantum logics and what ought they be?, in E. G. Beltrametti and B. C. van Fraassen (eds.) *Current Issues in Quantum Logic*, Plenum, New York.

[80] FOULIS, D. J. and RANDALL, C. H. (1981b) Empirical logic and tensor products, in H. Neumann (ed.) *Interpretations and Foundations of Quantum Theory*, B. I. Wissenschaft, Mannheim.

[81] FOULIS, D. J. and RANDALL, C. H. (1984) A note on misunderstandings of PIRON's axioms for quantum mechanics, *Foundations of Physics* **14**, 65–88.

[82] FOULIS, D. J. and WILCE, A. (2000) Free extensions of group actions, induced representations, and the foundations of physics, in B. Coecke, D.J. Moore and A. Wilce (eds.) *Current Research in Operational Quantum Logic: Algebras Categories, Languages*, Kluwer Academic Publishers.

[83] VAN FRAASSEN, B. C. (1981) Assumptions and interpretations of quantum logic, in E. G. Beltrametti and B.C. van Fraassen (eds.) *Current Issues in Quantum Logic*, Plenum, New York.

[84] FRINK, O. (1962) Pseudo–complements in semi–lattices, *Duke Mathematical Journal* **29**, 505–514.

[85] GIOVANNINI, N. (1981a) Superselection variables and generalized multipliers, *Letters in Mathematical Physics* **5**, 161–168.

[86] GIOVANNINI, N. (1981b) Classical and quantal systems of imprimitivity, *Journal of Mathematical Physics* **22**, 2389–2396.

[87] GIOVANNINI, N. (1981c) State spaces for classical and quantal, relativistic and nonrelativistic elementary particles, *Journal of Mathematical Physics* **22**, 2397–2403.

[88] GIOVANNINI, N. and PIRON, C. (1979) On the group–theoretical foundations of classical and quantum physics: kinematics and state spaces, *Helvetica Physica Acta* **52**, 518–540.

[89] GISIN, N. (1981) A simple nonlinear dissipative quantum evolution equation, *Journal of Physics A* **14**, 2259–2267.

[90] [89] GISIN, N. (1982a) Indéterminisme quantique et dynamique non linéaire dissipative, *Annales de la Fondation Louis de Broglie* **7**, 275–292.

[91] GISIN, N. (1982b) Microscopic derivation of a class of non–linear dissipative Schrödinger-like equations, *Physica A* **111**, 364–370.

[92] GISIN, N. (1983a) Modèles d'un processus de mesure, in C. Gruber, C. PIRON, T.M. Tâm and R. Weill (eds.) *Les fondements de la mécanique quantique*, AVCP, Lausanne.

[93] GISIN, N. (1983b) Irreversible quantum dynamics and the Hilbert space structure of quantum kinematics, *Journal of Mathematical Physics* **24**, 1779–1782.

[94] GISIN, N. and PIRON, C. (1981) Collapse of the wave packet without mixture,

Letters in Mathematical Physics **5**, 379–385.

[95] GIUNTINI, R. and GREULING, H. (1989) Toward a formal language for unsharp properties, *Foundations of Physics* **19**, 931–945.

[96] GLEASON, A. M. (1957) Measures on the closed subspaces of a Hilbert space, *Journal of Mathematics and Mechanics* **6**, 885–893.

[97] GOLDBLATT, R. I. (1974) Semantic analysis of orthologic, *Journal of Philosophical Logic* **3**, 19–35.

[98] GOLDBLATT, R. I. (1975) The Stone space of an ortholattice, *Bulletin of the London Mathematical Society* **7**, 45–48.

[99] GOLFIN, A. S. Jr. (1987) *Representations and Products of Lattices*, Doctoral Dissertation, University of Massachusetts.

[100] RÜTTIMANN, R.J., FOULIS, D.J. and PULMANNOVÁ, S. (1995) The center of an effect algebra, *Order* **12**, 91–106.

[101] GROSS, H. (1979) *Quadratic Forms in Infinite Dimensional Vector Spaces*, Birkhauser, Boston.

[102] GROSS, H. (1990) Hilbert lattices: new results and unsolved problems, Foundations of Physics **20**, 529–559.

[103] GUDDER, S. P. (1965) Spectral methods for generalized probability theory, *Transactions of the American Mathematical Society* **119**, 428–442.

[104] GUDDER, S. P. (1977) Four approaches to axiomatic quantum mechanics, in W. C. Price and S.S. Chissick (eds.) *The Uncertainty Principle and Founda- tions of Quantum Mechanics*, John Wiley & Sons, London.

[105] GUDDER, S. P. (1979) A survey of axiomatic quantum mechanics, in C. A. Hooker (ed.) *The Logico–Algebraic Approach to Quantum Mechanics. II.*, D. Reidel, Dordrecht.

[106] GUDDER, S. P. (1981) Comparison of the quantum logic, convexity, and algebraic approaches to quantum mechanics, in H. Neumann (ed.) *Interpretations and Foundations of Quantum Theory*, B. I. Wissenschaft, Mannheim.

[107] GUDDER, S. P. (1985) *Quantum Probability*, Academic Press, San Diego.

[108] GUDDER, S. P. (1997) Effect test spaces, *International Journal of Theoretical*

Physics **36**, 2681–2705.

[109] GUDDER, S. (2000) Quantum languages, in B. COECKE, D. J. MOORE and A. WILCE (eds.) *Current Research in Operational Quantum Logic: Algebras Categories, Languages*, Kluwer Academic Publishers.

[110] GUDDER, S. P. and PULMANNOVÁ, S. (1987) Transition amplitude spaces, *Journal of Mathematical Physics* **28**, 376–385.

[111] HAAG, R. and KASTLER, D. (1964) An algebraic approach to quantum field theory, *Journal of Mathematical Physics* **5**, 848–861.

[112] HABIL, E. (1993) *Orthoalgebras and Noncommutative Measure Theo*ry, Doctoral Dissertation, Kansas State University.

[113] HAMHALTER, J. (1993) Pure Jauch–PIRON states on von Neumann algebras, Annales de l'Institut Henri Poincaré *A* **58**, 173–187.

[114] HAMHALTER, J. (1995) Extension properties of states on operator algebras, *International Journal of Theoretical Physics* **34**, 1431–1437.

[115] HARDEGREE, G. M. and FRAZER, P. J. (1981) Charting the labyrinth of quantum logics: a progress report, in E.G. Beltrametti and B.C. van Fraassen (eds.) *Current Issues in Quantum Logic*, Plenum, New York.

[116] HARDING, J. (1996) Decompositions in quantum logic, *Transactions of the American Mathematical Society* **348**, 1839–1862.

[117] HARDING, J. (1998) Regularity in quantum logic, *International Journal of Theoretical Physics* **37**, 1173–1212.

[118] HERMAN, L., MARSDEN, E. L. and PIZIAK, R. (1975) Implication connectives in orthomodular lattices, *Notre Dame Journal of Formal Logic* **16**, 305–328.

[119] HOLLAND, S. S. (1995) Orthomodularity in infinite dimensions: a theorem of M. Solèr, *Bulletin of the American Mathematical Society* **32**, 205–234.

[120] JAUCH, J. M. (1968) *Foundations of Quantum Mechanics*, Addison–Wesley, Reading.

[121] JAUCH, J. M. and PIRON, C. (1967) Generalized localizability, *Helvetica Physica Acta* **40**, 559–570.

[122] Jauch, J. M. and PIRON, C. (1969) On the structure of quantal proposition

systems, *Helvetica Physica Acta* **42**, 842–848.

[123] JOYAL, A. and TIERNEY, M. (1984) *An extension of the Galois theory of Grothendieck*, American Mathematical Society, Providence.

[124] KALMBACH, G. (1974) Orthomodular logic, *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* **20**, 395–406.

[125] KALMBACH, G. (1983) *Orthomodular Lattices*, Academic Press, London.

[126] KELLER, H. A. (1980) Ein nicht–klassischer Hilbertscher Raum, *Mathematische Zeietschrift* **172**, 41–49.

[127] KELLY, G. M. (1982) *Basic Concepts of Enriched Category Theory*, Cambridge University Press, Cambridge.

[128] KLÄY, M., RANDALL, C. H. and FOULIS, D. J. (1987) Tensor products and probability weights, *International Journal of Theoretical Physics* **26**, 199–219.

[129] KOCHEN, S. (1996) Construction of quantum mechanics via commutative operations, in R. Clifton (ed.) *Perspectives on Quantum Reality*, Kluwer Academic Publishers.

[130] KOCHEN, S. and SPECKER, E.P. (1967) The problem of hidden variables in quantum mechanics, *Journal of Mathematics and Mechanics* **17**, 59–87.

[131] KÖHLER, P. (1981) Brouwerian semilattices, *Transactions of the American Mathematical Society* **268**, 103–126.

[132] KÔPKA, F. (1992) D-posets of fuzzy sets, *Tatra Mountains Mathematical Publications* **1**, 83–87.

[133] KRUML, D (2000) Spatial quantales, *Applied Categorical Structures*, To appear.

[134] LOOMIS, L. (1955) *The lattice–theoretic background of the Dimension Theory of Operator Algebras*, American Mathematical Society, Providence.

[135] LUDWIG, G. (1954) *Die Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer–Verlag, Berlin, Translation by C. A. Hein "Foundations of Quantum Mechanics" Springer–Verlag, Berlin, 1983.

[136] LUDWIG, G. (1955) Zur Deutung der Beobachung in der Quantenmechanik, *Physikalisch Blätter* **11**, 489–494.

[137] LUDWIG, G. (1964) Versuch einer axiomatischen Grundlegung der Quantenmechanik und allgemeiner physikalischer Theorien, *Zeitschrift für Physik* **181**, 233–260.

[138] LUDWIG, G. (1967) Attempt of axiomatic foundations of quantum mechanics and more general theories. II, *Communications in Mathematical Physics* **4**, 331–348.

[139] LUDWIG, G. (1968) Attempt of an axiomatic foundations of quantum mechanics and more general theories. III, *Communications in Mathematical Physics* **9**, 1–12.

[140] LUDWIG, G. (1972) An improved formulation of some theorems and axioms in the axiomatic foundation of the Hilbert space structure of quantum mechanics, *Communications in Mathematical Physics* **26**, 78–86.

[141] LUDWIG, G. (1985) *An Axiomatic Basis of Quantum Mechanics. 1. Derivation of Hilbert Space*, Springer–Verlag, Berlin.

[142] LUDWIG, G. (1987) *An Axiomatic Foundation of Quantum Mechanics. 2. Quantum Mechanics and Macrosystems*, Springer–Verlag, Berlin.

[143] LUDWIG, G. and NEUMANN, H. (1981) Connections between different approaches to the foundations of quantum mechanics, in H. Neumann (ed.) *Interpretations and Foundations of Quantum Theory*, B. I. Wissenschaft, Mannheim.

[144] MACKEY, G. W. (1957) Quantum mechanics and Hilbert space, *American Mathematical Monthly* **64:2**, 45–57.

[145] MACKEY, G. W. (1963) *The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, W. A. Benjamin, New York.

[146] MAEDA, S. (1955) Dimension functions on certain general lattices, *Journal of Science of Hiroshima University A* **19**, 211–237.

[147] MALINOWSKI, J. (1990) The deduction theorem for quantum logic—some negative results, *Journal of Symbolic Logic* **55**, 615–625.

[148] MALINOWSKI, J. (1992) Strong versus weak quantum consequence operations, *Studia Logica* **51**, 113–123.

[149] MIELNIK, B. (1968) Geometry of quantum states, *Communications in Mathematical Physics* **9**, 55–80.

[150] MIELNIK, B. (1969) Theory of filters, *Communications in Mathematical Physics* **15**, 1–46.

[151] MOORE, D. J. (1993) Quantum logic requires weak modularity, *Helvetica Physica Acta* **66**, 471–476.

[152] MOORE, D. J. (1995) Categories of representations of physical systems, *Helvetica Physica Acta* **68**, 658–678.

[153] MOORE, D. J. (1997) Closure categories, *International Journal of Theoretical Physics* **36**, 2707–2723.

[154] MOORE, D. J. (1999) On state spaces and property lattices, *Studies in the History and Philosophy of Modern Physics* **30**, 61–83.

[155] MULVEY, C. J. (1986) &, *Supplemento ai Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo* **12**, 99–104.

[156] NAKAMURA, M. (1957) The permutability in a certain orthocomplemented lattice, Kodai Mathematical Seminar Reports 9, 158–160.

[157] NAVARA, M. (1992) Independence of automorphism group, center, and state space of quantum logics, *International Journal of Theoretical Physics* **31**, 925–935.

[158] NEMITZ, W.C. (1965) Implicative semi–lattices, *Transactions of the American Mathematical Society* **117**, 128–142.

[159] VON NEUMANN, J. (1932) *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer–Verlag, Berlin. Translation by R. Beyer "Mathematical Foundations of Quantum Mechanics" Princeton University Press, Princeton, 1955.

[160] NISHIMURA, H. (1993) Empirical set theory, *International Journal of Theoretical Physics* **32**, 1293–1321.

[161] Nishimura, H. (1995) Manuals in orthogonal categories, *International Journal of Theoretical Physics* **34**, 211–228.

[162] PASEKA, J. (1997) Simple quantales, in *Proceedings of the Eighth Prague* Topology Symposium, Prague.

[163] PASEKA, J. and KRUML, D. (2000) Embeddings of quantales into simple quantales, *Journal of Pure and Applied Algebra*, To appear.

[164] PASEKA, J. and ROSICKÝ, J. (2000) Quantales, in B. Coecke, D.J. MOORE and

A. WILCE (eds.) *Current Research in Operational Quantum Logic: Algebras Categories, Languages*, Kluwer Academic Publishers.

[165] PIRON, C. (1964) Axiomatique quantique, *Helvetica Physica Acta* **37**, 439–468.

[166] PIRON, C. (1965) Sur la quantification du système de deux particules, *Helvetica Physica Acta* **38**, 104–108.

[167] PIRON, C. (1969) Les règles de supersélection continues, *Helvetica Physica Acta* **42**, 330–338.

[168] PIRON, C. (1971) Observables in general quantum theory, in B. D'Espagnat (ed.) *Foundations of Quantum Mechanics*, Academic Press, New York.

[169] PIRON, C. (1972) Survey of general quantum physics, *Foundations of Physics* **2**, 287–314.

[170] PIRON, C. (1976) *Foundations of Quantum Mechanics*, W.A. Benjamin, Inc., Reading.

[171] PIRON, C. (1990) *Mécanique quantique bases et applications*, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, Second edition, 1998.

[172] PITTS, A. M. (1988) Applications of sub–lattice enriched category theory to sheaf theory, *Proceedings of the London Mathematical Society* **57**, 433–480.

[173] Pool, J. C. T. (1968a) Baer *–semigroups and the logic of quantum mechanics, *Communications in Mathematical Physics* **9**, 118–141.

[174] POOL, J. C. T. (1968b) Semimodularity and the logic of quantum mechanics, *Communications in Mathematical Physics* **9**, 212–228.

[175] PRESTEL, A. (1995) On Solèr's characterization of Hilbert spaces, *Manususcripta Mathematica* **86**, 225–238.

[176] PTÁK, P. (2000) Observables in the logico-algebraic approach, in B. Coecke, D. J. Moore and A. Wilce (eds.) *Current Research in Operational Quantum Logic: Algebras Categories, Languages*, Kluwer Academic Publishers.

[177] PTÁK, P. and PULMANNOVÁ, S. (1991) *Orthomodular Structures as Quantum Logics*, Kluwer, Dordrecht.

[178] PULMANNOVÁ, S. (1986a) Transition probability spaces, *Journal of Mathe-*

matical Physics **27**, 1791–1795.

[179] PULMANNOVÁ, S. (1986b) Functional properties of transition amplitude spaces, *Reports in Mathematical Physics* **24**, 81–86.

[180] PULMANNOVÁ, S. and GUDDER, S. P. (1987) Geometric properties of transition amplitude spaces, *Journal of Mathematical Physics* **28**, 2393–2399.

[181] PULMANNOVÁ, S. and WILCE, A. (1995) Representations of D–posets, *International Journal of Theoretical Physics* **34**, 1689–1696.

[182] PUTNAM, H. (1968) Is logic empirical?, in R. S. Cohen and M. W. Wartofsky (eds.) *Boston Studies in the Philosophy of Science V*, D. Reidel, Dordrecht.

[183] PUTNAM, H. (1976) How to think quantum–logically, in P. Suppes (ed.) *Logic and Probability in Quantum Mechanics*, D. Reidel, Dordrecht.

[184] RANDALL, C. H. (1966) *A Mathematical Foundation for Empirical Science*, Doctoral Dissertation, Rensselaer Polytechnic Institute.

[185] RANDALL, C. H. and FOULIS, D. J. (1970) An approach to empirical logic, *American Mathematical Monthly* **77**, 363–374.

[186] RANDALL, C. H. and FOULIS, D. J. (1973) Operational statistics. II.Manuals of operations and their logics, *Journal of Mathematical Physics* **14**, 1472–1480.

[187] RANDALL, C. H. and FOULIS, D. J. (1978) The operational approach to quantum mechanics, in C. A. Hooker (ed.) *Physical Theory as Logico-Operational Structure*, D. Reidel, Dordrecht.

[188] RANDALL, C. H. and FOULIS, D. J. (1981) Operational statistics and tensor products, in H. Neumann (ed.) *Interpretations and Foundations of Quantum Theory*, B. I. Wissenschaft, Mannheim.

[189] RANDALL, C. H. and FOULIS, D. J. (1983a) A mathematical language for quantum physics, in C. Gruber, C. PIRON, T. M. Tâm and R. Weill (eds.) *Les fondements de la mécanique quantique*, AVCP, Lausanne.

[190] RANDALL, C. H. and FOULIS, D. J. (1983b) Properties and operational propositions in quantum mechanics, *Foundations of Physics* **13**, 843–857.

[191] RESENDE, P. (1999) Modular specification of concurrent systems with observational logic, in J. L. Fiadeiro (ed.) *Recent Developments in Algebraic Devel-*

opment Techniques, Springer–Verlag, Berlin.

[192] RESENDE, P. (2000) Quantales, finite observations and strong bisimulation, *Theoretical Computer Science*, To appear.

[193] RESENDE, P. (2000) Quantales and observational semantics, in B. Coecke, D. J. Moore and A. WILCE (eds.) *Current Research in Operational Quantum Logic: Algebras Categories, Languages*, Kluwer Academic Publishers.

[194] Rosenthal, K. I. (1991) Free quantaloids, *Journal of Pure and Applied Algebra* **77**, 67–82.

[195] Rosický, J. (1989) Multiplicative lattices and C*–algebras, *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques* **30**, 95–110.

[196] ROSICKÝ, J. (1995) Characterizing spatial quantales, *Algebra Universalis* **34**,175–178.

[197] SASAKI, U. (1955) Lattices of projections in AW*–algebras*, Journal of Science of Hiroshima Univerity A* **19**, 1–30.

[198] SCHROECK, F. E. (1996) *Quantum Mechanics on Phase Space*, Kluwer Academic (Dordrecht).

[199] SEGAL, I. (1947) Postulates for General Quantum Mechanics, *Annals of Mathematics* **4**, 930–948.

[200] SOLÈR, M. P. (1995) Characterization of Hilbert spaces by orthomodular spaces, Communications in Algebra **23**, 219–243.

[201] STOLZ, P. (1969) Attempt of an axiomatic foundation of quantum mechanics and more general theories. V, *Communications in Mathematical Physics* **11**, 303–313.

[202] STOLZ, P. (1971) Attempt of an axiomatic foundation of quantum mechanics and more general theories. VI, Communications in Mathematical Physics **23**, 117–126.

[203] VALCKENBORGH, F. (2000) Operational axiomatics and compound systems, in B. COECKE, D. J. MOORE and A. WILCE (eds.) *Current Research in Operational Quantum Logic: Algebras, Categories, Languages*, Kluwer Academic Publishers.

[204] VARADARAJAN, V.S. (1968) *The Geometry of Quantum Theory, Volumes I–II*, Van Nostrand, New York.

[205] VICKERS, S. (1989) *Topology via Logic*, Cambridge University Press, Cambridge.

[206] WARD, M. (1937) Residuations in structures over which a multiplication is defined, *Duke Mathematical Journal* **3**, 627–636.

[207] WARD, M. (1938) Structure residuation, *Annals of Mathematics* **39**, 558–568.

[208] WARD, M. and DILWORTH, R. P. (1939a) Residuated lattices, *Transactions of the American Mathematical Society* **45**, 335–354.

[209] WARD, M. and DILWORTH, R. P. (1939b) Non–commutative residuated lattices, *Transactions of the American Mathematical Society* **46**, 426–444.

[210] WILCE, A. (1990) Tensor products of frame manuals, *International Journal of Theoretical Physics* **29**, 805–814.

[211] WILCE, A. (1992) Tensor products in generalized measure theory, *International Journal of Theoretical Physics* **31**, 1915–1928.

[212] WILCE, A. (1995) Partial Abelian semigroups, *International Journal of Theoretical Physics* **34**, 1807–1812.

[213] WILCE, A. (1997) Pull-backs and product tests, *Helvetica Physica Acta* **70**, 803–812.

[214] WILCE, A. (1998) Perspectivity and congruence in partial Abelian semigroups, *Mathematica Slovaca* **48**, 117–135.

[215] WILCE, A. (2000) On generalized Sasaki projections, *International Journal of Theoretical Physics* **39**, To appear.

[216] WILCE, A. (2000) Test spaces and orthoalgebras, in B. Coecke, D. J. Moore and A. Wilce (eds.) *Current Research in Operational Quantum Logic: Algebras Categories, Languages*, Kluwer Academic Publishers.

[217] YEADON, F. J. (1983) Measures on projections in W*-algebras of type II_1, *Bulletin of the London Mathematical Society* **15**, 139–145.