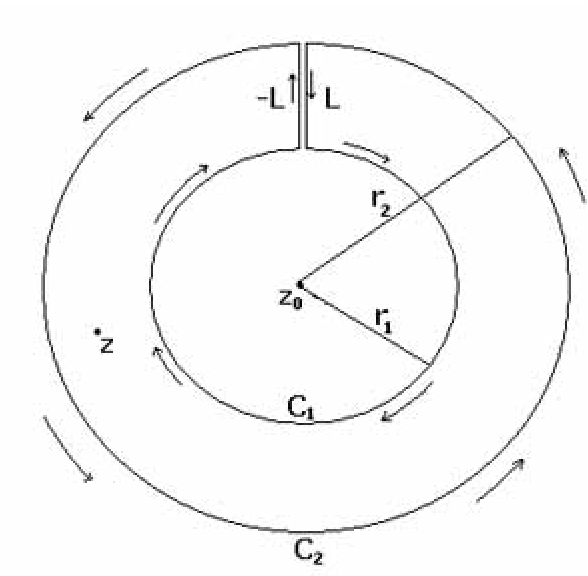
Desarrollo en serie de Laurent. Singularidades



Consideremos una función $f(z)$ compleja de variable compleja. Consideremos también el circuito Γ de la figura, constituido por dos circunferencias, C_1 y C_2, concéntricas, de centro en z_0 y radios r_1 y r_2 ($r_1 < r_2$), y dos tramos rectílineos tan próximos como se quiera, L y $-L$, que unen a ambas circunferencias cerrando el contorno. Aplicamos la Fórmula de Cauchy para encontrar el valor de la función en un punto z rodeado por el contorno indicado.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(t)}{t-z}dt = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(t)}{t-z}dt + \frac{1}{2\pi i}\oint_{L}\frac{f(t)}{t-z}dt + \frac{1}{2\pi i}\oint_{-C_1}\frac{f(t)}{t-z}dt + \frac{1}{2\pi i}\oint_{-L}\frac{f(t)}{t-z}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(t)}{t-z}dt + \frac{1}{2\pi i}\oint_{L}\frac{f(t)}{t-z}dt - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(t)}{t-z}dt - \frac{1}{2\pi i}\oint_{L}\frac{f(t)}{t-z}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(t)}{t-z}dt - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(t)}{t-z}dt$$

Se tiene:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(t)}{(t-z_0)-(z-z_0)}dt - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(t)}{(t-z_0)-(z-z_0)}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(t)}{(t-z_0)\left(1-\dfrac{z-z_0}{t-z_0}\right)}dt - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(t)}{(z-z_0)\left(\dfrac{t-z_0}{z-z_0}-1\right)}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(t)}{(t-z_0)\left(1-\dfrac{z-z_0}{t-z_0}\right)}dt + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(t)}{(z-z_0)\left(1-\dfrac{t-z_0}{z-z_0}\right)}dt$$

En la integral primera, sobre el arco C_2, se tiene que

$$|t-z_0| > |z-z_0| \rightarrow \left|\frac{z-z_0}{t-z_0}\right| < 1 \rightarrow \frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{t-z_0}} = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^n, \ \forall t \in C_2$$

Mientras que en la integral segunda, sobre el arco C_1, es

$$|z-z_0|>|t-z_0|\rightarrow\left|\frac{t-z_0}{z-z_0}\right|<1\rightarrow\frac{1}{1-\dfrac{t-z_0}{z-z_0}}=\sum_{n\geq 0}\left(\frac{t-z_0}{z-z_0}\right)^n,\ \forall t\in C_1$$

Y sustituyendo

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(t)}{(t-z_0)}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^n dt+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(t)}{(z-z_0)}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{t-z_0}{z-z_0}\right)^n dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(t)}{(t-z_0)}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^n dt+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(t)}{(z-z_0)}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^{-n} dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\oint_{C_2}\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt+\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^{-n-1}\oint_{C_1}f(t)(t-z_0)^n dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\oint_{C_2}\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt+\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}(z-z_0)^{-n}\oint_{C_1}f(t)(t-z_0)^{n-1} dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\oint_{C_2}\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt+\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{-1}(z-z_0)^{n}\oint_{C_1}\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt$$

como las integrales no dependen del camino de integración, podemos elegir una circunferencia *C* comprendida entre ambas C_1 y C_2:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\oint_{C}\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt+\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{-1}(z-z_0)^{n}\oint_{C}\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(z-z_0)^n\oint_{C}\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt\right](z-z_0)^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

siendo

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt, n=-\infty,\ldots,-1,0,1,\ldots,\infty$$

En definitiva, el desarrollo o expansión de una función $f:C\rightarrow C$, analítica en un punto cualquiera z del dominio anular $D=\{z\in C/r_1<|z-z_0|<r_2\}$ viene dada por

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

Donde los coeficientes pueden obtenerse mediante las integrales de contorno

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt, n=-\infty,\ldots,-1,0,1,\ldots,\infty$$

siendo *C* una circunferencia concéntrica con las dadas y contenida en el dominio anular *D*.

La determinación de la expansión de una función en serie de Laurent en un dominio *D*, necesita por tanto el cálculo de los correspondientes coeficientes a_n, lo cual, por exigir la resolución de integrales de una cierta complicación, presenta en general una gran dificultad. Esto hace que en la práctica sea preferible el empleo de métodos algebraicos y algebraico-diferenciales elementales para determinar tales coeficientes, como el desarrollo mediante el binomio de Newton, la serie geométrica, el desarrollo de Taylor, etc.

A fin de ilustrar esta dificultad veamos a continuación un ejemplo en el que obtenemos el desarrollo en serie de Laurent de una función de dos maneras: realizando el cálculo de sus coeficientes mediante las integrales de contorno anteriores, y mediante un desarrollo elemental en el que empleamos la serie geométrica.

Sea la función $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$ en el dominio $D:0<|z|<1$. Veamos la obtención del desarrollo de Laurent en z=0.

a) Primer procedimiento: Calculando las integrales de contorno de la definición: Como el dominio *D* es un disco perforado de radio 1, utilizaremos como contorno la circunferencia centrada en 0 de radio ½:

$C: z=\frac{1}{2}e^{ti},\ 0\le t\le 2\pi$. Los coeficientes estarán dados por

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(t)}{(t-0)^{n+1}}dt=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{1/t(t-1)}{t^{n+1}}dt=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{1/(t-1)}{t^{n+2}}dt, n=-\infty,\dots,-1,0,1,\dots,\infty$$

Veamos como obtener todos los coeficientes del desarrollo:

- Para $n\le -2\to n+2\le 0: a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{1/(t-1)}{t^{n+2}}dt=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{t^{-(n+2)}}{(t-1)}dt=0$, pues la función del integrando es analítica en el interior del contorno C.
- Para $n=-1\to n+2=1: a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{1/(t-1)}{t}dt=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{1/(t-1)}{t-0}dt$, por lo que,

llamando $g(t)=1/(t-1)$ y aplicando la fórmula de Cauchy:

$$g(0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{g(t)}{t-0}dt\to\frac{1}{0-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{g(t)}{t-0}dt\to a_{-1}=g(0)=-1$$

- Para $n>-1\to n+2>1: a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{1/(t-1)}{t^{n+2}}dt$, por lo que, empleando la fórmula de Cauchy para la derivada n-sima, se tiene:

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{1/t(t-1)}{(t-0)^{n+1}}dt=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{1/(t-1)}{(t-0)^{n+2}}dt=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{g(t)}{(t-0)^{n+2}}dt=\frac{g^{n+1)}(0)}{(n+1)!}=$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}\left(\frac{1}{z-1}\right)\Bigg|_{z=0}=\frac{(n+1)!}{(n+1)!}.(-1)^{n+1}.\frac{1}{(z-1)^{n+2}}\Bigg|_{z=0}=-1$$

En definitiva, el desarrollo de Laurent será:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-0)^n=\sum_{n=-\infty}^{-2}a_n(z-0)^n+a_{-1}(z-0)^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-0)^n=$$

$$=\dots+0+(-1)(z-0)^{-1}+(-1)(z-0)^0+(-1)(z-0)^1+(-1)(z-0)^2+\dots=$$

$$=-\frac{1}{z}-1-z-z^2-\dots=-\frac{1}{z}-\sum_{n=0}^{\infty}z^n=-\sum_{n=-1}^{\infty}z^n$$

b) Segundo procedimiento: Utilizando la serie geométrica:

De ser $f(z)=\frac{1}{z(z-1)}=\frac{-1}{z}+\frac{1}{z-1}$, se tiene que como es $|z|<1$, el opuesto del segundo sumando es la suma de la serie geométrica de razón menor que la unidad en valor absoluto:

$$\frac{1}{z-1}=\frac{-1}{1-z}=-\sum_{n=0}^{\infty}z^n \text{, con lo cual } f(z)=\frac{-1}{z}-\sum_{n=0}^{\infty}z^n=-\sum_{n=-1}^{\infty}z^n$$

Quedando, pues, patente la diferente dificultad entre uno y otro de ambos procedimientos de resolución del problema.

Singularidades

Consideremos un punto z_0 y el disco de centro en z_0 y radio r. Si una función $f(z)$ es holomorfa en el interior de dicho disco salvo en su centro z_0, diremos que es holomorfa en el disco perforado $0<|z-z_0|<r$.

Puede ser que la función f(z) puede prolongarse a una función holomorfa, es decir, a una función desarrollable en serie de Taylor en todo el disco completo, $|z-z_0|<r$, o bien puede que no sea posible tal prolongación. En este último caso diremos que z_0 es una *singularidad aislada* de la función $f(z)$.

La prolongación de una función holomorfa en un disco perforado al disco completo puede caracterizarse mediante un sencillo teorema que mostramos a continuación.

Teorema: La condición necesaria y suficiente para que una función holomorfa en un disco perforado $0<|z-z_0|<r$ sea prolongable a una función holomorfa en el disco completo es que esté acotada en un entorno del centro z_0 del disco.
Demostración:
Si $f(z)$ es prolongable a una función $g(z)$ holomorfa en el punto z_0, esto es, en el disco completo, ello quiere decir que es derivable y por tanto continua en z_0. Lo que implica que es continua en dicho punto y, por tanto acotada. Por la continuidad, también está acotada en un entorno del mismo.
Y al revés, si $f(z)$ está acotada en un entorno del punto z_0, entonces

$$\exists M\in R/\left|f(z)\right|\le M \text{ en } C\text{: } |z-z_0|=r_1<r$$

por tanto, si consideramos el desarrollo de Laurent de la función:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \text{, siendo } a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz, n=-\infty,\ldots,-1,0,1,\ldots+\infty$$

se tiene:

$$|a_n|=\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\right|\le\frac{1}{2\pi i}\oint_c\left|\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\right||dz|\le\frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{M}{r^{n+1}}|dz|=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\frac{M}{r^{n+1}}\oint_c|dz|=\frac{1}{2\pi i}\frac{M}{r^{n+1}}2\pi ri=\frac{M}{r^n}$$

o sea:

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$$

Esto indica que para valores de n negativos y para r suficiente pequeño se tendrá que $|a_n| \to 0$ por lo que $a_n = 0$. Es decir, son nulos todos los términos de exponente negativo, lo que indica que el desarrollo de Laurent es simplemente un desarrollo de Taylor y la función es, por tanto holomorfa:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$$

En definitiva, una función $f(z)$ que es acotada en un entorno de z_0 puede prolongarse de forma holomorfa al disco completo, esto es, siempre es desarrollable en serie de Taylor en z_0. En este caso existe el limite de la función en el punto z_0 y diremos que la singularidad es *evitable*.

Si una función no puede prolongarse a una función holomorfa en el disco completo, es decir, si no puede desarrollarse en serie de Taylor en el punto z_0 se debe a que existen términos de exponente negativo en su desarrollo de Laurent que no son nulos.

Pueden darse dos casos: que el número de términos de exponente negativo sea infinito, o bien, que tal número sea finito.

Si el desarrollo de Laurent tiene infinitos términos de exponente negativo, la singularidad aislada que presenta z_0 es lo que llamamos una *singularidad esencial*.

Si el desarrollo de Laurent tiene solo un número finito de términos con exponente negativo, $a_{-h}(z-z_0)^{-h} + \ldots + a_{-h}(z-z_0)^{-(h+k)}$, será expresable en la forma

$$f(z) = a_{-h}(z-z_0)^{-h} + \ldots + a_{-h}(z-z_0)^{-(h+k)} + \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n =$$

$$= \frac{a_{-h}}{(z-z_0)^h} + \ldots + \frac{a_{-h}}{(z-z_0)^{h+k}} + \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$$

por lo que existirá un número entero positivo $q \geq h+k$ tal que es

$$(z-z_0)^q f(z) = a_{-h}(z-z_0)^{q-h} + \ldots + a_{-h}(z-z_0)^{q-(h+k)} + \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^{n+q}$$

un desarrollo en serie donde todos los términos tienen ahora exponente no negativo, o sea, un desarrollo de Taylor, lo que indica que $(z-z_0)^q f(z)$es holomorfa. Se dice entonces que z_0 es *un polo de orden* q, donde q es el mínimo entero positivo que verifica la igualdad anterior.

En resumen, podemos clasificar las singularidades aisladas en tres tipos:

- Singularidades evitables: La función es acotada en un entorno del punto y puede obtenerse su limite.
- Singularidades esenciales: El desarrollo de Laurent tiene infinitos términos de exponente negativo.
- Singularidades no esenciales o polos: El desarrollo de Laurent tiene un numero finito de términos con exponente negativo. Tal número finito se denomina *orden del polo*.

Estudiamos a continuación mediante varios ejemplos dos problemas básicos:

- Determinar el campo de convergencia de la serie de Laurent de una función dada.
- Determinar la serie de Laurent de una función dada para que tenga un determinado campo de convergencia.

Obtención del desarrollo de Laurent de una función en un entorno de una singularidad y determinación de su campo de convergencia:

Ejemplos:

1) Encontrar un desarrollo en serie de Laurent para la función

$$\varphi(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}$$

en la singularidad o singularidades que tenga, indicando su campo de convergencia.

- Singularidad:

$$z-1=0 \rightarrow z=1 \text{ (polo doble)}$$

- Desarrollo de Laurent:

  Como es, por Taylor: $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!}(z-1)^n$

  será el desarrollo de Laurent:

$$\varphi(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2} = (z-1)^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e}{n!}(z-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e}{n!}(z-1)^{n-2} = \sum_{n=-2}^{\infty}\frac{e}{(n+2)!}(z-1)^n$$

- Convergencia:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{e}{(n+1+2)!}(z-1)^{n+1}}{\frac{e}{(n+2)!}(z-1)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+3}(z-1)\right| = 0$$

  la serie $\sum_{n=-2}^{\infty}\frac{e}{(n+2)!}(z-1)^n$ converge, $\forall z \in C$

2) Desarrollo en serie de Laurent en la singularidad y determinar la convergencia, para la función

$$\mu(z) = z\cos\left(\frac{1}{z}\right)$$

- Singularidad:

$$z=0 \quad \text{(singularidad esencial)}$$

- Desarrollo de Laurent:

  De Taylor: $\cos\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\left(\frac{1}{z}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{-2n}}{(2n)!}$

  el desarrollo de Laurent es

$$\mu(z) = z\cos\left(\frac{1}{z}\right) = z\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{-2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{1-2n}}{(2n)!}$$

- Convergencia:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\dfrac{z^{1-2(n+1)}}{(2(n+1))!}}{(-1)^{n}\dfrac{z^{1-2n}}{(2n)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)}{(2n+1)(2n+2)}(z-1)^{-2}\right| = 0$$, si $z\neq 1$, converge para $z\neq 1$

3) Encontrar el desarrollo de Laurent en los puntos de singularidad de la función siguiente y estudiar su convergencia

$$\vartheta(z)=\frac{1}{(z+1)(z+2)}$$

- Singularidad:

$z=-1,\ z=-2$ (polos simples de primer orden)

- Desarrollo de Laurent:

De ser $\vartheta(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z+2)}=\left(z+1\right)^{-1}\left(z+2\right)^{-1}$

Se tiene, del desarrollo del binomio de Newton:

Desarrollo de Laurent en la singularidad $z=-1$:

$$\vartheta(z)=\left(z+1\right)^{-1}\left[\left(z+1\right)+1\right]^{-1}=\left(z+1\right)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1}{n}(z+1)^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1}{n}(z+1)^{n-1}=$$

$$=\sum_{n=-1}^{\infty}\binom{-1}{n+1}(z+1)^{n}$$

Desarrollo de Laurent en la singularidad $z=-2$:

$$\vartheta(z)=\left(z+2\right)^{-1}\left[\left(z+2\right)-1\right]^{-1}=\left(z+2\right)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1}{n}(-1)^{-1-n}(z+2)^{n}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1}{n}(-1)^{-1-n}(z+2)^{n-1}=\sum_{n=-1}^{\infty}\binom{-1}{n+1}(-1)^{-(n+2)}(z+2)^{n}$$

- Convergencia en un entorno de $z=-1$:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\binom{-1}{n+2}(z+1)^{n+1}}{\binom{-1}{n+1}(z+1)^{n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|(-1)(z+1)\right|=\left|z+1\right|<1$$, converge para $\left|z+1\right|<1$

- Convergencia en un entorno de $z=-2$:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\binom{-1}{n+2}(-1)^{-(n+3)}(z+2)^{n+1}}{\binom{-1}{n+1}(-1)^{-(n+2)}(z+2)^{n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|(-1)(-1)(z+2)\right|=\left|z+2\right|<1$$, para $\left|z+2\right|<1$

Nota: la división de los números combinatorios se ha hecho teniendo en cuenta que en general es $\binom{m}{n+1}\Big/\binom{m}{n} = n!(m-n)!/(n+1)!(m-n-1)! = m-n/n+1$. Por lo cual se tiene que $\binom{-1}{n+2}\Big/\binom{-1}{n+1} = (-1-(n+1))/n+2 = (-n-2)/n+2 = -1$.

4) Hállese el desarrollo de Laurent en los puntos de singularidad de la función siguiente y estudiar su convergencia

$$\vartheta(z) = \frac{senz}{z-\pi}$$

- Singularidad:

$$z=\pi \quad \text{(polo simple)}$$

- Desarrollo de Laurent:
  De Taylor:

$$senz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!}(z-\pi)^{2n-1}$$

por tanto, el desarrollo de Laurent de la función dada es:

$$\vartheta(z) = \frac{senz}{z-\pi} = (z-\pi)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)!}(z-\pi)^{2n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)!}(z-\pi)^{2n-2}$$

- Convergencia:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}(z-\pi)^{2n}}{\frac{(-1)^n}{(2n-1)!}(z-\pi)^{2n-2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)}{(n(2n+1)}(z-\pi)^4\right| = 0$$, converge $\forall z \in C$

Determinación del desarrollo de Laurent de una función para que tenga un campo de convergencia dado:

1) Determinar el desarrollo en serie de Laurent de la función

$$f(z) = \frac{1}{z-3}$$

en el dominio $|z| > 3$.

Se tiene que $|z| > 3 \rightarrow |3/z| < 1$. Por tanto

$$f(z) = \frac{1}{z-3} = \frac{1}{z}.\frac{1}{1-\frac{3}{z}} = \frac{1}{z}.\sum_{n\geq 0}\left(\frac{3}{z}\right)^n = \sum_{n\geq 0}\frac{3}{z^{n+1}}^{\,n}$$

2) Determínese el desarrollo de la función

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$$

en serie de Laurent en el dominio anular $2 < |z-1| < 4$.

$$f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+3)}=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z+3}=\frac{A(z+3)+B(z+1)}{(z+1)(z+3)}=\frac{(A+B)z+3A+B}{(z+1)(z+3)}\rightarrow$$
$$\rightarrow 1=(A+B)z+3A+B\rightarrow A=1/2,\ B=-1/2$$

Entonces

$$f(z)=\frac{1}{2}\frac{1}{z+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{z+3}$$

Desarrollamos cada sumando por separado:

a) $\dfrac{1}{z+1}=\dfrac{1}{z-1+2}=\dfrac{1}{z-1}\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{z-1}}=\dfrac{1}{z-1}\dfrac{1}{1-\dfrac{2}{1-z}}$

y como es $|z-1|>2\rightarrow\left|\dfrac{2}{z-1}\right|=\left|\dfrac{2}{1-z}\right|<1$ puede utilizarse la serie geométrica:

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z-1}\frac{1}{1-\frac{2}{1-z}}=\frac{1}{z-1}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{2}{1-z}\right)^n=\frac{1}{z-1}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{2}{z-1}\right)^n=\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{2^n}{(z-1)^{n+1}}$$

b) $\dfrac{1}{z+3}=\dfrac{1}{z-1+4}=\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{1+\dfrac{z-1}{4}}=\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{1-\dfrac{1-z}{4}}$

y como $|z-1|<4\rightarrow\left|\dfrac{z-1}{4}\right|=\left|\dfrac{1-z}{4}\right|<1$ también usamos la serie geométrica:

$$\frac{1}{z+3}=\frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1-z}{4}}=\frac{1}{4}.\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1-z}{4}\right)^n=\sum_{n\geq 0}\frac{(1-z)^n}{4^{n+1}}=\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(z-1)^n$$

finalmente obtenemos el desarrollo completo:

$$f(z)=\frac{1}{2}\frac{1}{z+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{z+3}=\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{2^{n-1}}{(z-1)^{n+1}}+\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2.4^{n+1}}(z-1)^n$$

3) Desarrollo en serie de Laurent de la función $f(z)=\dfrac{1}{3-z}$ en el dominio definido por $|z-1|>2$.

Se tiene que $f(z)=\dfrac{1}{3-z}=\dfrac{1}{2-(z-1)}=\dfrac{1}{z-1}.\dfrac{1}{\dfrac{2}{z-1}-1}=-\dfrac{1}{z-1}.\dfrac{1}{1-\dfrac{2}{z-1}}$

Puesto que $|z-1|>2$, será $\left|\dfrac{2}{z-1}\right|<1$, por lo que $\dfrac{1}{1-\dfrac{2}{z-1}}$ es la suma de la serie geométrica de razón $\dfrac{2}{z-1}$. Sustituyendo se tiene:

$$f(z)=-\frac{1}{z-1}.\frac{1}{1-\frac{2}{z-1}}=-\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z-1}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}2^n(z-1)^{-(n+1)}=$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}(z-1)^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} 2^{-(n+1)}(z-1)^{n}$$

Veamos a continuación un ejemplo de determinación de puntos singulares:

a) Sea $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$ en el dominio $D: 0<|z|<1$

Su desarrollo de Laurent es $f(z)=\dfrac{-1}{z}-\sum_{n=0}^{\infty} z^n = -\sum_{n=-1}^{\infty} z^n$, por tanto

$$(z-0).\,f(z)=\frac{-1}{z}z-\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} = -1-\sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

es un desarrollo de Taylor, lo que indica que $(z-0).\,f(z)$ es holomorfa y la función $f(z)$ tiene un polo simple (orden 1) en el punto $z=0$.

Bibliografía

Ahlfors, L. V.; Análisis de variable compleja, McGraw-Hill, New York 1979.
Apostol, T.M.; Análisis Matemático, Editorial Reverté, Barcelona, 1986
Caratheodory; Theory of functions of a complex variable, Chelsea, 2001.
Cartan, H.; Teoría elemental de las funciones analíticas de una y varias variables complejas, Madrid, Selecciones Científicas, 1968.
Chinea, C.S., El teorema de la integral de Cauchy-Goursat (http://casanchi.com/mat/cauchygoursat01.pdf)
Chinea, C.S., La fórmula de la Integral de Cauchy (http://casanchi.com/mat/formulacauchy01.pdf)
Chinea, C.S., Holomorfía y analiticidad (http://casanchi.com/mat/holomoranali01.pdf)
Copson, E. T.: An introduction to the theory of functions of a complex variable, Oxford University Press, 1970.
Goursat, E.; Cours d'analyse Mathematique, Gauthier Villars, Imprimeur Libraire, 1905, Paris.
Markushevich, A. I; Teoría de las funciones analíticas, Editorial Mir: Moscú 1970.
Philips, E. G.; Funciones de una variable compleja, Dossat, Madrid, 1963.