LA IDEA DE RETÍCULO DE ORDEN Y DE RETÍCULO ALGEBRAICO. EQUIVALENCIA

Los conjuntos ordenados y acotados pueden estudiarse como conjuntos filtrantes con cota superior mínima y cota inferior máxima. Esto permite definir los retículos de orden y establecer su equivalencia con una estructuración algebraica sobre leyes de composición interna, que nos lleva necesariamente a los conceptos clásicos de retículos, álgebras y anillos booleanos.

01. Conjuntos filtrantes

Definición de conjunto filtrante
Un conjunto ordenado *A* tal que todo subconjunto del mismo de dos elementos esté acotado superiormente (mayorado) se dice que es *filtrante superiormente*. Si todo subconjunto de dos elementos de A está acotado inferiormente (minorado), se dirá *filtrante inferiormente.* Un *conjunto filtrante* es un conjunto que es filtrante superiormente y filtrante inferiormente.

$$(A,\leq)\ \mathit{filtrante}\sup \leftrightarrow \forall a,b \in A, \exists M \in A / a \leq M \wedge b \leq M$$

$$(A,\leq)\ \mathit{filtrante}\inf \leftrightarrow \forall a,b \in A, \exists m \in A / m \leq a \wedge m \leq b$$

$$(A,\leq)\ \mathit{filtrante} \leftrightarrow (A,\leq)\ \mathit{filtrante}\sup \wedge (A,\leq)\ \mathit{filtrante}\inf$$

Teorema 01.1
1) Todo subconjunto finito de un conjunto filtrante superiormente es mayorado:
$$(A,\leq)\ \mathit{filtrante}\sup \wedge \{a_1,...,a_n\} \subseteq A \rightarrow \exists x \in A / x \geq a_i, i=1,...,n$$
2) En todo conjunto filtrante superiormente, un elemento maximal es también máximo, y, por consiguiente, es único.

Demostración:
1) Por inducción:

1.1) Para n=2 se verifica, por ser (A, ≤) filtrante sup:

$$\forall a,b \in A, \exists x \in A / a \leq x \wedge b \leq x$$

1.2) Sea cierto para n=k-1, veamos que ha de ser cierto para n=k:

$$\exists y \in A / a_i \leq y, i=1,...,k-1 \wedge \{y,a_k\}\ \mathit{mayorado} \rightarrow \exists x \in A / y \leq x \wedge a_k \leq x \rightarrow$$

$$\rightarrow \exists x \in A / a_i \leq x, i=1,...,k$$

Por consiguiente, la proposición se verifica, para todo subconjunto finito.

2) Por reducción al absurdo:

$m \in A / m \max imal \wedge m\ no \max imo \rightarrow \exists n \in A / (no\ m \geq n) \wedge (no\ n \geq m) \wedge A\ filtrante \rightarrow$

$\rightarrow \exists x \in A / x \geq m \wedge x \geq n \wedge x \neq m \wedge x \neq n \rightarrow m\ no \max imal$

Es inmediato que el teorema se verifica de forma análoga para conjuntos filtrantes inferiormente:

1) ($(A, \leq)$ $filtrante$ inf $\wedge \{a_1, ..., a_n\} \subseteq A \rightarrow \exists x \in A / x \leq a_i, i = 1, ..., n$

2) En todo conjunto filtrante inferiormente, un elemento minimal es también mínimo, y, por consiguiente, es único.

02. Semirretículos

Definición de inf-semirretículo y sup-semirretículo
Un subsemirretículo es un conjunto ordenado tal que todo par de elementos del mismo admite mayorante mínimo, o supremo, que, si lo representamos por $x \vee y$, podemos escribir $\sup\{x, y\} = x \vee y$

Un infsemirretículo es un conjunto ordenado tal que todo par de elementos del mismo admite un minorante máximo, o ínfimo, que, representándolo por $x \wedge y$, podemos escribir $\inf\{x, y\} = x \wedge y$

Teorema 02.1
1) En un supsemirretículo, todo subconjunto finito admite supremo.
2) Para toda familia de supsemirretículos, el conjunto producto es también un supsemirretículo.

Demostración:
1) Por inducción. Se verifica para n=2, por definición de supsemirretículo. Sea cierto para n=k-1 y veamos que entonces ha de ser cierto también para n=k:
Llamemos $y = \sup\{a_1, ..., a_{k-1}\}$, y sea $x = \sup\{y, a_k\}$. Entonces x es mayorante del conjunto $\{a_1, ..., a_k\} \rightarrow x \geq y$.
Cualquier otro mayorante z de $\{a_1, ..., a_k\} \rightarrow z$ es mayorante de $\{a_1, ..., a_{k-1}\} \rightarrow$ $\rightarrow z \geq y \rightarrow z$ es mayorante de $\{y, a_k\} \rightarrow z \geq x \rightarrow x = \sup\{a_1, ..., a_k\}$.
2) Sea $(A_i, \leq)_{i \in I}$ una familia de supsemirretículos y llamemos P al conjunto producto cartesiano de los elementos de la familia: $P = \prod_{i \in I} A_i$. Si consideramos ahora dos elementos cualesquiera de P, $a = (a_i)_{i \in I}, b = (b_i)_{i \in I}$, probemos que el elemento de P dado por $c = (c_i)_{i \in I}$ donde cada $c_i = \sup\{a_i, b_i\}$, es precisamente, el supremo de $\{a, b\}$:

Obviamente, es $a \leq c, b \leq c$. Si consideramos un elemento *d* de *P*, $d = (d_i)_{i \in I}$, tal que $a \leq d, b \leq d$ entonces $a_i \leq d_i \ y \ b_1 \leq d_i$, de donde también $c_i \leq d_i$, puesto que es $c_i = \sup\{a_i, b_i\}$, por lo cual $c \leq d$.

El teorema análogo para infsemirretículos se prueba del mismo modo.

Completitud:

Un supsemirretículo completo es un supsemirretículo en el que todo subconjunto del mismo admite supremo (mayorante mínimo). Un infsemirretículo completo es un infsemirretículo en el que todo subconjunto del mismo admite ínfimo (minorante máximo). Obviamente, todo supsemirretículo completo admite máximo, y todo infsemirretículo completo admite mínimo.

03. Retículos de orden

Definición de retículo:

Se llama *retículo de orden* a un conjunto ordenado que es supsemirretículo y también infsemirretículo En un retículo de orden, por tanto, todo par de elementos admite supremo y también admite ínfimo, lo que nos indica que también todo subconjunto finito admite tanto supremo como ínfimo.

Teorema 03.1
Para dos retículos de orden dados, el conjunto producto cartesiano de ambos es también un retículo de orden.

Demostración:
Es trivial, por el Teorema 02.1.

Definición de subretículo:
Dado un retículo de orden $(A, \leq)$ y un subconjunto S de A, con el mismo orden inducido por el retículo, $(S, \leq / S)$, diremos que $(S, \leq / S)$ es subretículo del retículo $(A, \leq)$ si y solo si se verifica que, para dos elementos cualesquiera de A, el ínfimo y el supremo en A son respectivamente el ínfimo y el supremo en S:

$$\forall a, b \in A, \inf_A \{a, b\} = \inf_S \{a, b\}, \sup_A \{a, b\} = \sup_S \{a, b\}$$

Notemos que en general, un subconjunto de un retículo, con su mismo orden inducido, no es un retículo, y cuando lo es, pueden no ser iguales los ínfimos y supremos de dos elementos cualesquiera del retículo, pues se da en general una situación del tipo:

$$\forall a, b \in A, \inf_A \{a, b\} \leq \inf_S \{a, b\} \leq \sup_S \{a, b\} \leq \sup_A \{a, b\}$$

Completitud en un retículo de orden:

Un retículo de orden completo es un conjunto que es infsemirretículo completo y también es supsemirretículo completo.

Teorema 03.2
Dados dos retículos de orden completos, el conjunto producto cartesiano de ambos también es retículo de orden completo.

Demostración:
Veamos que cualquier subconjunto C del producto cartesiano $A \times B$ de dos retículos de orden completos, tiene ínfimo y tiene supremo. Sean, pues, dos retículos de orden completos, $(A,\leq)$ y $(B,\leq)$, y sea *C* un subconjunto del mismo con el orden inducido, o sea:

$$C = A_1 \times B_1 \subseteq A \times B, C = \left\{(x_1, y_1) / x_1 \in A_1, y_1 \in B_1\right\}, \quad A_1 \subseteq A, B_1 \subseteq B$$

por ser *A* completo, $A_1 \subseteq A$ tiene ínfimo y supremo, análogamente, por ser *B* completo, también $B_1 \subseteq B$ tiene ínfimo y supremo:

$$a_1 = \inf A_1, a_1^{'} = \sup A_1, \; b_1 = \inf B_1, b_1^{'} = \sup B_1$$

de lo cual es inmediato que existen ínfimo y supremo para el conjunto C:

$$(a_1 \times b_1) = \inf(A_1 \times B_1) = \inf C, \; (a_1^{'} \times b_1^{'}) = \sup(A_1 \times B_1) = \sup C$$

Teorema 03.3
Todo semirretículo completo, ya sea supsemirretículo o infsemirretículo, que tenga elemento nulo y universal (mínimo y máximo), es también un retículo de orden completo.

Demostración:

Hagamos la demostración para un infsemirretículo. Sea, pues, $(A,\leq)$ un infsemirretículo completo, por lo cual existe ínfimo para cualquier subconjunto *A′* de *A*. Llamemos $a = \inf A'$.

Sean, entonces, $a = \inf A', \phi = \min A, \mu = \sup A$. Para probar que A es completo, bastará ver que existe $\sup A'$. Para ello consideremos el conjunto $X_{A'}$ de todos los mayorantes de A'. Tal conjunto no es vacío, pues $\mu \in X_{A'}$. Supongamos que es s el ínfimo del conjunto $X_{A'}$: $s = \inf X_{A'}$. Esto quiere decir que cualquier elemento de A' es menor o igual que cualquier elemento de $X_{A'}$, es decir, cualquier elemento de A' es minorante de $X_{A'}$. O sea:

$\forall z \in A', z \leq s \rightarrow s \; mayorante \; de \; A' \rightarrow s \in X_{A'} \rightarrow s = \min X_{A'}$. Por lo cual, $\sup A' = s$

04. Retículos algebraicos. Equivalencia con los retículos de orden

Un *retículo algebraico* $(A,*,*')$ es un conjunto A dotado de dos leyes de composición interna, * y *′, que tienen las propiedades siguientes:

a) Son idempotentes: $\forall x \in A, x * x = x, x *' x = x$
b) Son conmutativas: $\forall x, y \in A, x * y = y * x, x *' y = y *' x$
c) Son asociativas: $\forall x, y, z \in A, (x * y) * z = x * (y * z), (x *' y) *' z = x *' (y *' z)$
d) Propiedad de absorción: $\forall x, y \in A, (x * y) *' x = x, (x *' y) * x = x$

Un retículo algebraico distributivo es un retículo algebraico en el que las dos leyes de composición internas son distributivas la una con respecto de la otra.

Teorema 04.1
Si el par $(A, \leq)$ es un retículo de orden, entonces la terna $(A,*,*')$ en donde se ha hecho $* = \wedge = \text{\textit{ínfimo}}$, $*' = \vee = \sup\textit{remo}$, es un retículo algebraico.

Demostración:

Se verifica trivialmente, teniendo en cuenta que es $x \vee y = \sup\textit{remo del par } \{x, y\}$, y que es $x \wedge y = \text{\textit{ínfimo del par} } \{x, y\}$:

1. $\forall x \in A, x \vee x = x, \; x \wedge x = x$ (Propiedad de Idempotencia)
2. $\forall x, y \in A, x \vee y = y \vee x, \; x \wedge y = y \wedge x$ (Propiedad Conmutativa)
3. $\forall x, y, z \in A, (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z), \; (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ (Propiedad Asociativa)
4. $\forall x, y \in A, (x \vee y) \wedge x = x, \; (x \wedge y) \vee x = x$ (Propiedad de Absorción)

Teorema 04.2
En todo retículo algebraico puede definirse un orden desde sus leyes de composición interna, de forma que sea un retículo de orden.

Demostración: Si $(A,*,*')$ es un retículo algebraico, bastará definir el orden de la siguiente manera:

$$x \leq y \leftrightarrow x *' y = y \vee x * y = x$$

Las dos afirmaciones de la disyuntiva de la definición son equivalentes, por lo que la definición es consistente. La demostración simbólica es inmediata desde las propiedades de absorción y de conmutatividad de las leyes internas del retículo:

$$x *' y = y \rightarrow (x *' y) * x = y * x = x * y = x \rightarrow (x * y) *' y = x *' y = y *' x = x$$

Veamos que se verifican las propiedades de la relación de orden:

1. Propiedad reflexiva:
$\forall x \in A, x * x = x \rightarrow x \leq x$
2. Propiedad antisimétrica:

$$\left.\begin{array}{l} x \le y \\ y \le x \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x * y = x \\ y * x = y \end{array}\right\} \wedge \left(x * y = y * x\right) \to x = y$$

3. Propiedad transitiva:

$$\left.\begin{array}{l} x \le y \\ y \le z \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x * y = x \\ y * z = y \end{array}\right\} \to x * z = (x * y) * z = x * (y * z) = x * y = x \to x \le z$$

Veamos finalmente que para todo par de elementos de A existe el ínfimo y también existe el supremo:

Puesto que $x *' y = y \to x \le y,\ x * y = x \to x \le y$, se tiene:

$$x *'(x *' y) = (x *' x) *' y = x *' y \to x \le x *' y$$

$$y *'(x *' y) = y *'(y *' x) = (y *' y) *' x = y *' x = x *' y \to y \le x *' y$$

Es decir:

$$\left.\begin{array}{l} x \le x *' y \\ y \le x *' y \end{array}\right\} \to x *' y = \sup r\left\{x, y\right\}$$

Análogamente:

$$(x * y) * x = (y * x) * x = y * (x * x) = y * x \to x * y \le x$$

$$(x * y) * y = x * (y * y) = x * y \to x *' y \le y$$

Es decir:

$$\left.\begin{array}{l} x * y \le x \\ x * y \le y \end{array}\right\} \to x *' y = \inf\left\{x, y\right\}$$

05. Bibliografía:

ALBERCA, P., MARTÍN, D.; "Métodos matemáticos: Álgebra Lineal y Geometría", Ediciones Aljibe, 2001.
BURGOS, J. De; "Álgebra Lineal y Geometría Cartesiana", Ed. McGraw Hill, 2000.
DUBREIL, P. Y OTROS; "Lecciones de álgebra moderna". Ed. Paraninfo, 1970
NAKOS, G., JOYNER, D.; "Álgebra Lineal con aplicaciones". Ediciones Thomson, 1991
PEERMINGEAT, N., GLAUDE, D.; "Algebras de Boole, teoría y métodos de cálculo y aplicaciones". Editorial Vicens Vives, 1993.
ROSEN, K.; "Discrete Mathematics and its Applications ". Ed. McGraw-Hill, 1991