Breve introducción a los problemas de contorno
para ecuaciones diferenciales ordinarias

01. Introducción.

El teorema de existencia de la integral de una ecuación diferencial ordinaria de n-simo orden

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})$$

establece, bajo conocidas condiciones, la existencia y unicidad de solución, dados los valores de la función y sus n primeras derivadas, $y', y'', ..., y^{(n-1)}$, para un valor inicial *a* de la variable independiente, *x* = *a*.

Verificadas las condiciones iniciales de existencia, el problema de hallar la integral particular, dadas tales condiciones iniciales, es un problema determinado.

Por ejemplo, la determinación de la integral particular de una ecuación diferencial lineal de segundo orden,

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x)$$

en un dominio en el que suponemos continuas las funciones coeficientes y término independiente, $p_0(x), p_1(x)y, p_2(x), f(x)$ y además, obviamente, $p_0(x) \neq 0$, correspondiente a los valores $y(a), y'(a)$, para $x = a$, se obtiene de la manera siguiente.

Una vez hallada la integral general de la forma

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \varphi(x)$$

donde son $y_1(x)$ y $y_2(x)$ soluciones particulares, linealmente independientes, de la ecuación incompleta, y $\varphi(x)$ solución particular de la ecuación completa, el problema se reduce a resolver el sistema lineal en c_1 y c_2 :

$$y = c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) + \varphi(a)$$
$$y' = c_1 y_1'(a) + c_2 y_2'(a) + \varphi'(a)$$

el cuál ha de tener solución única y determinada si es no nulo el determinante wronskiano

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0, \forall x$$

Si en lugar de dar los valores *y(a), y'(a)* correspondientes a un mismo punto tenemos los valores de la función *y(x)* en los extremos, *a* y *b*, de un intervalo, el sistema a resolver será:

$$y(a) = c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) + \varphi(a)$$
$$y(b) = c_1 y_1(b) + c_2 y_2(b) + \varphi(b)$$

que puede ser compatible indeterminado si

$$\begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix} = 0$$

Problema análogo se presenta si se dan los valores de la derivada en ambos extremos, o bien el valor de *y* en un extremo y el valor de *y'* en el otro, o si aparecen en general dos relaciones cualesquiera entre los valores de *y(a), y'(a)* y *y(b), y'(b).*

Si se trata de la derivada en ambos extremos:

$$\begin{cases} y'(a) = c_1 y'_1(a) + c_2 y'_2(a) + \varphi'(a) \\ y'(b) = c_1 y'_1(b) + c_2 y'_2(b) + \varphi'(b) \end{cases}$$

Si es el valor de y en un extremo y la derivada en el otro:

$$\begin{cases} y(a) = c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) + \varphi(a) \\ y'(b) = c_1 y_1'(b) + c_2 y_2'(b) + \varphi'(b) \end{cases}$$

Todos estos casos constituyen los problemas de contorno, o condiciones de contorno, ya que las condiciones que aparecen impuestas en la resolución de diversos problemas de aplicación, suelen referirse a los alrededores o contorno del espacio de validez de la solución de la ecuación diferencial.

0.2 Enunciado general del problema:

En definitiva, podemos enunciar el problema general de contorno para una ecuación diferencial lineal de orden *n* del tipo

$$L[y] = p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = f(x)$$

con $p_j \in c^{n-j}$ sobre $[a,b]$, y $p_0(x) \neq 0$ sobre $[a,b]$, del siguiente modo:

Hallar una solución de la ecuación diferencial $L[y]=f(x)$ en el intervalo $[a,b]$, que verifique las condiciones de contorno

$$U_j\left[y\right]\equiv\sum_{k=1}^{n}\left[M_{jk}y^{(k-1)}(a)+N_{jk}y^{(k-1)}(b)\right]=\varphi_j,\ (j=1,2,...,n)$$

que en conjunto podemos expresar por $Uy=\varphi$.

Diremos que el problema de contorno es homogéneo si $\varphi=0$:

- Problema homogéneo: $Uy=0$
- Problema no homogéneo: $Uy=\varphi\neq 0$

03. El teorema de la alternativa.

Este teorema se puede enunciar en los términos siguientes:

Si el problema no homogéneo tiene solución única (es compatible determinado), el problema homogéneo no tiene solución (exceptuando la solución trivial nula), es decir, es incompatible. Si el problema no homogéneo no tiene solución (es incompatible), el problema homogéneo tiene infinitas soluciones (es compatible indeterminado), y, finalmente, si el problema no homogéneo tiene infinitas soluciones (es compatible indeterminado), el problema homogéneo tiene también infinitas soluciones (es compatible indeterminado).

Demostración:

Sea la ecuación diferencial de orden n, $L_n\left[y\right]=\varphi(x)$, y sea su solución

$$y(x)=\sum_{i=1}^{n}c_iy_i(x)+\varphi(x)$$

donde son las $y_i(x), i=1,2,...,n$ soluciones particulares de la ecuación homogé-nea, y donde $\varphi(x)$ es solución particular de la ecuación completa.

Sea asimismo el problema de contorno dado por

$$U_jy=\varepsilon_j, j=1,2,...,n$$

en la forma

$$U_j\left[y\right]=U_j\left[\sum_{i=1}^{n}c_iy_i(x)+\varphi(x)\right]=\sum_{i=1}^{n}c_iU_j(y_i(x))+U_j(\varphi(x))=\varepsilon_j,\ j=1,2,...,n$$

que, descrito matricialmente, es:

$$U_j\left[y\right]=[U_j(y_i(x))].\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \varepsilon_1-U_1\left(\varphi(x)\right) \\ \varepsilon_2-U_2\left(\varphi(x)\right) \\ ...... \\ \varepsilon_n-U_3\left(\varphi(x)\right) \end{bmatrix}$$

a) Si el problema no homogéneo es compatible determinado:

$$\left[U_j\left(y_i(x)\right)\right].\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \varepsilon_1-U_1(\varphi) \\ \varepsilon_2-U_2(\varphi) \\ ... \\ \varepsilon_n-U_n(\varphi) \end{bmatrix} comp\det erm \rightarrow$$

$$\rightarrow\left|U_j\left(y_i(x)\right)\right|\neq 0 \wedge rang\left[U_j\left(y_i(x)\right)\right]=rang\left[U_j\left(y_i(x)\right),\varepsilon_j-U_j(\varphi)\right]=n\rightarrow$$

$$\rightarrow\left[U_j\left(y_i(x)\right)\right].\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix} incomp$$

b) Si el problema no homogéneo es compatible indeterminado:

$$\left[U_j\left(y_i(x)\right)\right].\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \varepsilon_1-U_1(\varphi) \\ \varepsilon_2-U_2(\varphi) \\ ... \\ \varepsilon_n-U_n(\varphi) \end{bmatrix} comp\ in\det erm \rightarrow$$

$$\rightarrow\left|U_j\left(y_i(x)\right)\right|=0 \wedge rang\left[U_j\left(y_i(x)\right)\right]=rang\left[U_j\left(y_i(x)\right),\varepsilon_j-U_j(\varphi)\right]<n\rightarrow$$

$$\rightarrow\left[U_j\left(y_i(x)\right)\right].\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix} comp\ in\det$$

c) Si el problema no homogéneo es incompatible:

$$\left[U_j\left(y_i(x)\right)\right].\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \varepsilon_1-U_1(\varphi) \\ \varepsilon_2-U_2(\varphi) \\ ... \\ \varepsilon_n-U_n(\varphi) \end{bmatrix} incomp \rightarrow$$

$$\rightarrow \left| U_j\left(y_i(x) \right) \right| \neq 0 \wedge rang\left[U_j\left(y_i(x) \right) \right] \neq rang\left[U_j\left(y_i(x) \right), \varepsilon_j - U_j(\varphi) \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[U_j\left(y_i(x) \right) \right] . \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} comp\ in\det$$

04. **Bibliogrqfía**.

CASTRO, A. de; Complementos de Matemáticas. SAETA, Madrid, 1970
CODDINGTON, E.A.; Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. CECSA, 1968
CASTRO, A. de; MARAVAL, D.: Métodos matemáticos de la Ingeniería, DOSSAT, 1961