Sobre la inversión del plano euclídeo respecto a una circunferencia

La inversión de los puntos del plano con respecto a una circunferencia es una transformación biyectiva y continua del plano en sí mismo que aparece de forma natural en la idea de la geometría hiperbólica.

Veremos aquí que es una transformación que conserva los ángulos (conforme).

La idea de inversión es en matemática un concepto elemental. Dos números reales son inversos si su producto es la unidad: a, b inversos sii a.b=1, o dos segmentos AB y CD son inversos si su producto es la unidad.

También podemos definir la inversión con respecto a una cantidad m: dos elementos, a y b, son inversos respecto a m sii su producto es m. La inversión de dos segmentos AB y AC respecto a una circunferencia de radio r y centro en A, se define por la condición de que estén contenidos en la misma recta y que su producto sea el cuadrado del radio de la circunferencia: $AB.AC=r^2$.

Vamos a ver en las líneas siguientes algunos conceptos elementales que nos permitan establecer formalmente la idea de inversión con respecto a una circunferencia.

01. **Circunferencia, circulo, exterior**.

Dado un plano π, se llama circunferencia de centro *O* y radio *r* al lugar geométrico de los puntos del plano π que distan *r* del punto *O.*

Circunferencia de centro *O* y radio *r* en el plano π: $C_{o,r}=\{x \in \pi / d(O,x)=r\}$

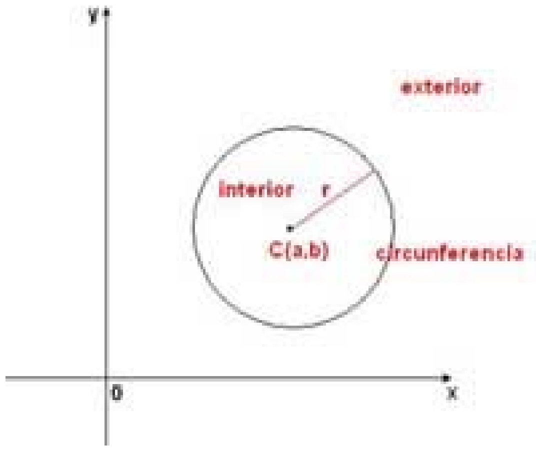
El círculo $Ci_{o,r}$ de frontera $C_{o,r}$ se define como la zona del plano cerrada por la circunferencia:

Círculo de centro *O* y radio *r*: $Ci_{o,r}=\{x \in \pi / d(O,x)\leq r\}$

Si al círculo se le quita su frontera, lo que queda es su interior: $\{x \in \pi / d(O,x)< r\}$

El exterior de una circunferencia es el complementario del círculo definido por la misma:

Exterior de la circunferencia de centro *O* y radio *r:* $ExC_{o,r}=\{x \in \pi / d(O,x)> r\}$



Ecuaciones:

- De la circunferencia de centro $O(a,b)$ y radio *r:*

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0$$

- Del círculo de centro $O(a,b)$ y radio *r:*

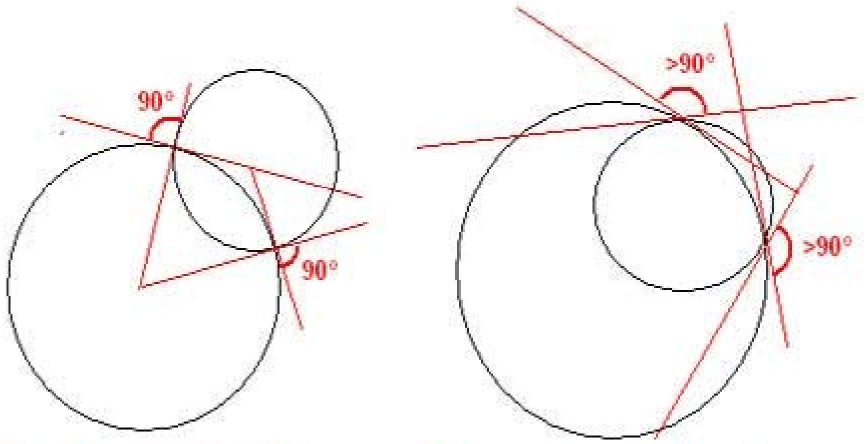
$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2\leq 0$$

- Del exterior a una circunferencia de centro $O(a,b)$ y radio *r:*

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2>0$$

En toda circunferencia, $C_{o,r}$, la recta tangente en el punto $T\in C_{0,r}$ es perpendicular a la recta $\overline{OT}$ (se acostumbra a decir que *la tangente en un punto es perpendicular al radio de la circunferencia por ese punto)*.

Se dice que dos circunferencias se cortan de forma ortogonal, o que son circunferencias entre sí ortogonales, si las dos tangentes a ambas en cada punto de corte son rectas perpendiculares. En dos circunferencias ortogonales, por tanto, los radios de una y otra que tocan el punto de corte son perpendiculares.



Se cortan ortogonalmente — No se cortan ortogonalmente

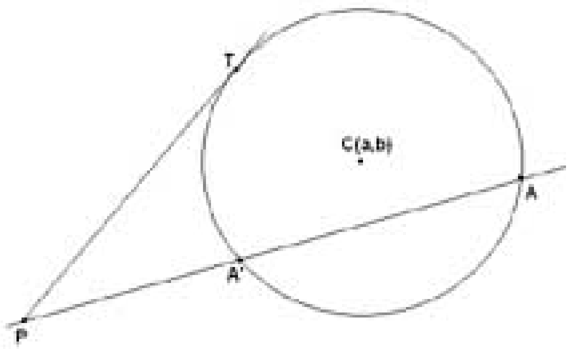
02. Potencia de un punto respecto a una circunferencia.

Se define *potencia del punto P* con respecto a una circunferencia $C_{o,r}$ como el producto de los dos segmentos *PA′ y PA*, definidos por el punto *P* y cada uno de los dos puntos, *A′* y *A*, en los que una recta cualquiera que pase por *P* corta a la circunferencia.

$$pot_{C_{o,r}}(P) = \overline{PA'}.\overline{PA}$$

Si consideramos el punto en el que es tangente una recta que pase por P (punto de corte doble), podemos escribir la potencia así:

$$pot_{C_{o,r}}(P) = \overline{PT}^2$$

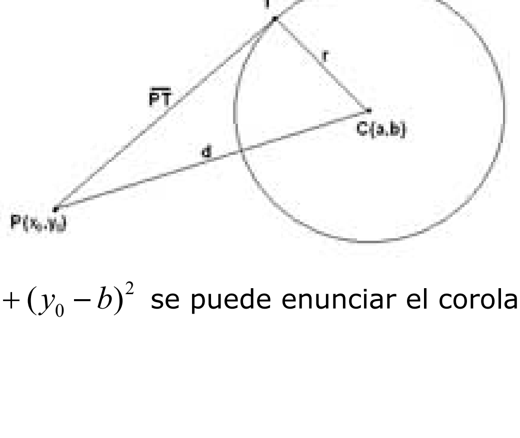


Se tiene, por tanto, para toda recta que pasando por P corte a la circunferencia en dos puntos A′ y A:

$$\overline{PT}^2 = \overline{PA'}.\overline{PA}$$

Teorema 01. La potencia de un punto $P(x_0,y_0)$ con respecto a una circunferencia cualquiera es la diferencia entre el cuadrado de la distancia de $P(x_0,y_0)$ al centro de la circunferencia y el cuadrado del radio de ésta.
Demostración:
Puesto que la recta tangente a una circunferencia en un punto es perpendicular al radio de la circunferencia en ese punto, en la figura observamos que el triángulo PTC es rectángulo en T, por lo que PT es un cateto, r es el otro cateto y d es la hipotenusa:

$$pot_{C_{o,r}}(P) = \overline{PT}^2 = d^2 - r^2$$



Como es $d^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2$ se puede enunciar el corolario siguiente.

Corolario1: La potencia de un punto $P(x_0, y_0)$ con respecto a una circunferencia C de ecuación $(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0$ se obtiene como el valor numérico que resulta de sustituir en el primer miembro de esta ecuación las coordenadas del punto:

$$Pot_C(P(x_0, y_0)) = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2$$

Corolario 2: Si llamamos ext(C), Int(C) al exterior e interior, respectivamente, de la circunferencia C, se cumple que:

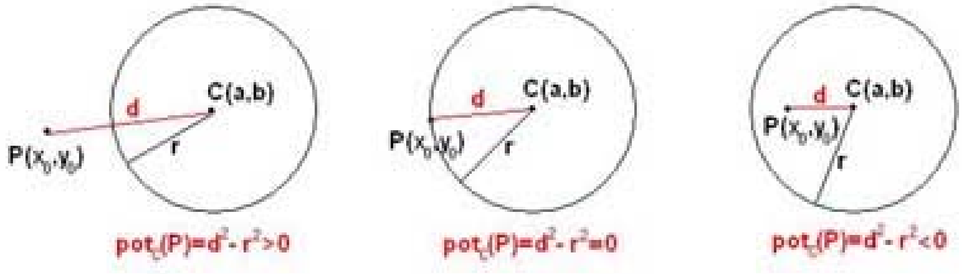
Si $P(x_0, y_0) \in ext(C) \to Pot_C(P(x_0, y_0)) > 0$

Si $P(x_0, y_0) \in C \to Pot_C(P(x_0, y_0)) = 0$

Si $P(x_0, y_0) \in \mathrm{int}(C) \to Pot_C(P(x_0, y_0)) < 0$

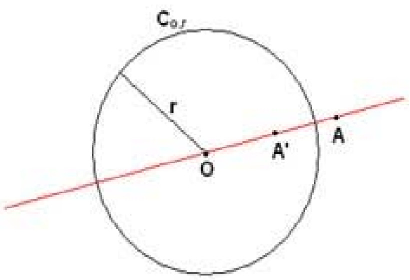
Demostración: Es obvio, de la definición de potencia.

Gráficamente:



03. **Simetría respecto de una circunferencia**.

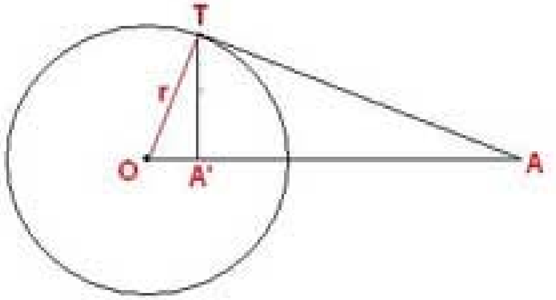
Dos puntos, *A'* y *A*, se dice que son simétricos respecto a una circunferencia de centro *O* y radio *r*, si los puntos *A', A* y *O* están alineados y el producto de las longitudes de los segmentos $\overline{OA'}$ y $\overline{OA}$ es el cuadrado del radio *r* de la circunferencia



$$A', A \text{ simétricos respecto a } C_{o,r} \Leftrightarrow \begin{cases} A', A, O \text{ alineados} \\ \overline{OA'}.\overline{OA} = r^2 \end{cases}$$

Obviamente, si uno de los dos puntos, A', A, está en el interior de la circunferencia, el otro punto está en el exterior. Si uno de ellos pertenece a la circunferencia, el otro también y es coincidente con él.

Teorema 02. Para obtener el punto simétrico del punto exterior A respecto de la circunferencia $C_{o,r}$ bastará trazar la recta tangente a la circunferencia desde el punto A, obteniéndose el punto T de tangencia, y la recta que pasa por el centro O de la circunferencia y dicho punto A. El punto A′ simétrico se obtiene por la intersección de la recta OA con la perpendicular a OA por el punto T de tangencia.
Demostración:
Sea la figura:



Donde el triángulo OTA es rectángulo en T. Se tiene:

$$\overline{OA'}.\overline{OA} = \overline{OA'}.(\overline{OA'} + \overline{A'A}) = \overline{OA'}^2 + \overline{OA'}.\overline{A'A}$$

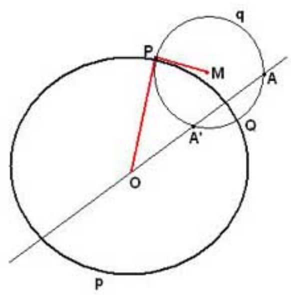
puesto que el triángulo OTA es rectángulo en T se verifica el Teorema de la Altura[1], o sea: $\overline{OA'}.\overline{A'A} = \overline{A'T}^2$, por lo que la igualdad anterior quedaría así:

$$\overline{OA'}.\overline{OA} = \overline{OA'}.(\overline{OA'} + \overline{A'A}) = \overline{OA'}^2 + \overline{OA'}.\overline{A'A} = \overline{OA'}^2 + \overline{A'T}^2 = r^2$$

Lo que nos indica que el punto A' encontrado de la forma indicada por el enunciado del teorema es simétrico del punto dado A.

De igual manera puede encontrarse el punto simétrico de un punto interior dado: para obtener el punto simétrico del punto interior A′ de la circunferencia c trazaremos una recta s que pase por el centro O y por A′, y, a continuación, la perpendicular s′ a la recta s por el punto A′. Por el punto T de corte de s′ con la circunferencia c trazamos una recta tangente que cortará a s en el punto A, simétrico de A′.

Teorema 03: Dada una circunferencia p y dos puntos A′ y A simétricos respecto de p, cualquier otra circunferencia q que pase por A′ y A es ortogonal con p.
Demostración
Sean P y Q los puntos de intersección de las circunferencias $p_{O,r}$ y $q_{M,s}$, donde $q_{M,s}$ pasa por los puntos A′ y A simétricos respecto de $p_{O,r}$. Se tiene la figura:



La dos circunferencias son ortogonales

1 Ver apéndice para demostración del teorema de la altura.

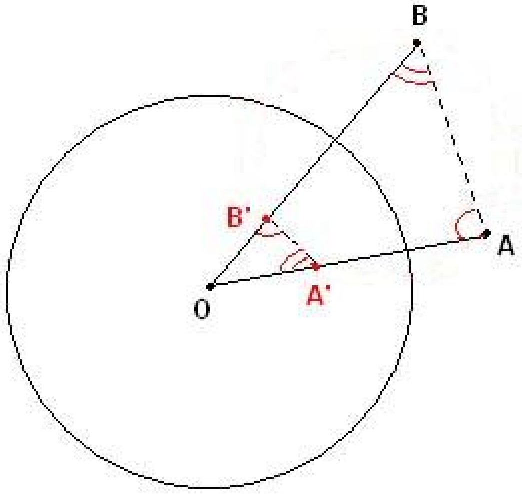
- Si A′ y A no son simétricos respecto de p, entonces $\overline{OA}.\overline{OA'} \neq \overline{OP}^2$
- Si A′ y A son simétricos respecto de p, entonces $\overline{OA}.\overline{OA'} = \overline{OP}^2$. Es decir, en este caso el producto $\overline{OA}.\overline{OA'}$ es la potencia del centro O con respecto a la circunferencia q, y como sabemos en este caso, $\overline{OP}$ es tangente a q, y, consecuentemente, perpendicular a $\overline{MP}$, por lo que ambos radios son perpendiculares y las circunferencias son, pues, ortogonales.

Análogamente, si dos circunferencias son ortogonales, cualquier recta que pase por el centro de una de ellas cortará a la otra en dos puntos, A y A′, que son simétricos respecto de la primera, ya que el producto de los segmentos $\overline{OA}$ y $\overline{OA'}$ coincide con el cuadrado de su radio.

Teorema 04: Dada una circunferencia p de centro O y dos puntos A y B exteriores a p, cuyos simétricos respecto de p son los puntos A′ y B′, respectivamente, se verifica la igualdad de los ángulos

$$O\hat{A}B = O\hat{B'}A' \quad , \qquad O\hat{B}A = O\hat{A'}B'$$

Demostración:
Puesto que si los puntos A y B dados son exteriores sus simétricos han de ser interiores, se tiene la figura siguiente



Puesto que $\overline{OA}.\overline{OA'} = \overline{OB}.\overline{OB'}$ se tiene:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{0B'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA'}}$$

por tanto, los triángulos OAB y $OB'A'$ son semejantes, al tener un ángulo común y proporcionales los dos lados que forman tal ángulo. Al ser ambos triángulos semejantes, tienen iguales sus tres ángulos, por lo que se verifica lo indicado en el enunciado del teorema: $O\hat{A}B = O\hat{B'}A'$, $O\hat{B}A = O\hat{A'}B'$.

04. Inversión de figuras. Polo de inversión.

Denominamos *inversión* a la transformación tal que a cada punto le corresponde su simétrico respecto a una determinada circunferencia c. La circunferencia c se dice que es la *circunferencia de inversión* y su centro O es el *polo de la inversión*.

Si dos puntos, A y A' son simétricos respecto a una circunferencia *c*, se dice que A y A' son inversos respecto de *c*. Si los puntos simétricos del conjunto F son simétricos de los puntos del conjunto F', diremos que las figuras F y F' son inversas.

Teorema 05: Se verifica que

a) El polo, O, de inversión no tiene inverso.
b) Los puntos inversos de los puntos de la circunferencia de inversión son ellos mismos.
c) Toda recta que pase por el polo de inversión se transforma en ella misma salvo un punto, el punto que es el polo de la inversión.

Demostración:

a) Puesto que el inverso de un punto A es otro punto A', alineado con A y O, tal que $\overline{OA}.\overline{OA'} = r^2$, el inverso O' del polo O tendría que verificar que $\overline{OO}.\overline{OO'} = r^2$, lo cual es imposible, pues la distancia $\overline{OO}$ es nula.
b) Si el punto A está en la circunferencia de inversión, será $\overline{OA} = r$, con lo cual $\overline{OA}.\overline{OA'} = r.\overline{OA'} = r^2 \rightarrow \overline{OA'} = r$, lo que indica que el inverso A' también está en la circunferencia de inversión y coincide con A, por la condición de alineamiento con O.
c) Si la recta pasa por el polo de inversión todos sus puntos están alineados con el polo O, por lo que el inverso de un punto cualquiera está contenido en la recta. Salvo el polo de inversión, que no tiene inverso, por a).

Teorema 06: Se tiene:

a) La figura inversa de una línea recta que no pasa por el polo de inversión es una circunferencia que pasa por el polo de inversión.
b) La figura inversa de una circunferencia c' que pasa por el polo de inversión es una línea recta que no pasa por el polo de inversión.

Demostración:

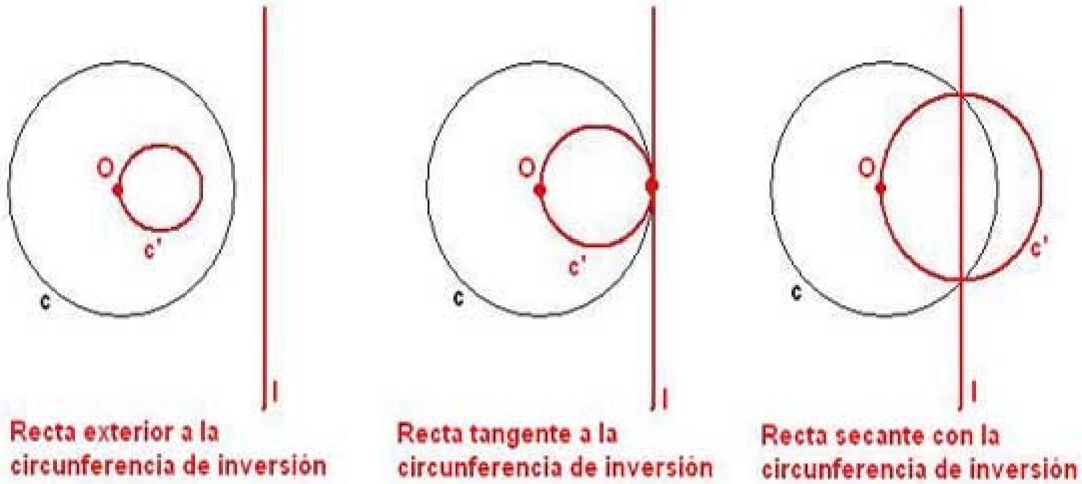
a) Sea l una recta exterior a la circunferencia c de inversión. Tracemos la perpendicular a l por el polo O de inversión. Sea A el punto de corte de l con dicha perpendicular y sea A' el punto inverso de A.

   Tracemos la circunferencia c' de diámetro $\overline{OA'}$ que pasa por O y por A'. Para cualquier otro punto B de la recta l se verifica que su inverso B' está en esta circunferencia, pues por el teorema 04, el ángulo OB'A' es igual al ángulo OAB, que, por construcción, es de 90º. Luego, los inversos de cualesquiera puntos de la recta l son tales que el ángulo que abarca el diámetro de la circunferencia c' es de 90º. Esto quiere decir que tales puntos están formando dicha circunferencia.

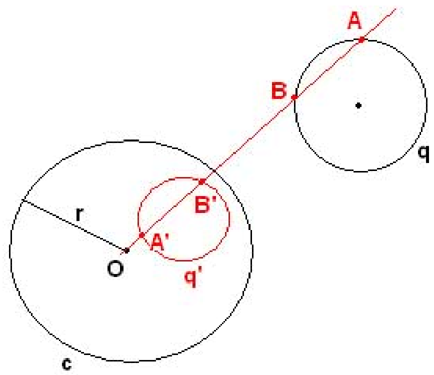
   Si la recta es exterior a la circunferencia de inversión, la circunferencia c' está contenida en el círculo interior de c.

Si la recta l toca a la circunferencia en un único punto T, entonces la circunferencia c' está en el interior de c salvo un único punto que coincide con T.
Si la recta l corta a la circunferencia de inversión en dos puntos, P y Q, entonces la circunferencia c' pasará por los puntos P y Q.

b) Sean O (polo de inversión), A y B, tres puntos de dicha circunferencia c'. Sean A' y B' los respectivos puntos inversos de A y B. Por a) la recta que pasa por A' y B' se transforma en una circunferencia que pasa O y por A y B, esto es, se transforma precisamente en la circunferencia c'. De esto se infiere que la circunferencia c' se transforma en la recta que pasa por A' y B'.



Teorema 07: La figura inversa de una circunferencia que no pasa por el polo de inversión es otra circunferencia que tampoco pasa por el polo de inversión.
Demostración:
Sea c la circunferencia de inversión de centro O y radio r. Consideremos la circunferencia q que no pasa por el polo de inversión O y en ella un punto cualquiera A. Si trazamos una recta s que pase por el polo de inversión y por A entonces s cortará a la circunferencia q en otro punto B. Llamemos A' y B' los respectivos puntos simétricos de A y B, todos, obviamente, alineados con O, tal como se indica en la figura:

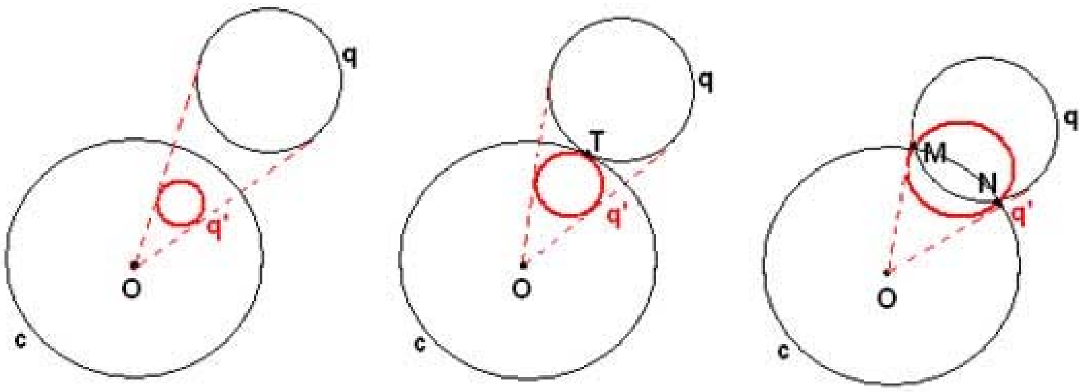


Se cumple, en definitiva, que $\overline{OA}.\overline{OA}' = \overline{OB}.\overline{OB}' = r^2$, o bien $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}'} = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{OA}'}$. También podemos expresar el producto: $\overline{OA}.\overline{OA}'.\overline{OB}.\overline{OB}' = r^4$, y como $\overline{OA}.\overline{OB} = po$ es la potencia del polo O con respecto a la circunferencia q, podemos escribir esta igualdad en la forma $\overline{OA}'.\overline{OB}'=r^4/po$. En definitiva:

$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}'}.\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}'}=\frac{po}{r^4/po}=\frac{po^2}{r^4}$, y como $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}'}=\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}'}$, será $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}'}=\frac{po}{r^2}$. Es decir el cociente $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}'}$ es siempre una constante, para cualquier punto A que elijamos en la circunferencia q (pues po es constante por ser potencia del polo respecto a q, y r es constante por ser el radio de la circunferencia de inversión).

En definitiva lo que vemos es que para cualquier punto A que se elija en la circunferencia q se obtiene otro punto B′ tal que $\overline{OA}=const.\overline{OB}'$, es decir, la figura que forman los puntos B′ es semejante a la circunferencia q, con razón de semejanza $po/r^2=const$ y centro de semejanza el polo O de inversión. Como la figura semejante de una circunferencia es también una circunferencia, se infiere que los puntos B′ que aparecen como inversos de todos los puntos de q forman una circunferencia q′, lo que prueba el teorema.

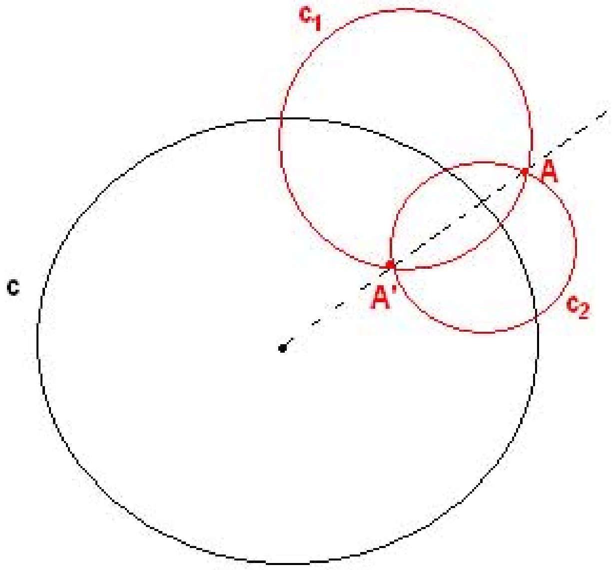
- Si la circunferencia q es exterior a la circunferencia de inversión, la circunferencia inversa q′ es interior.
- Si la circunferencia q toca a la circunferencia de inversión en un único punto T, entonces la circunferencia q′ es interior salvo un único punto que coincide con T.
- Si la circunferencia q corta en dos puntos, M y N, a la circunferencia de inversión, entonces la circunferencia inversa q′ corta a la circunferencia de inversión en esos mismos puntos M y N.



Teorema 08: Los puntos, A y A′, de corte de dos circunferencias ortogonales a la circunferencia c de inversión, son inversos.
Demostración:
Es obvio, pues por el teorema 03, toda circunferencia que pase por dos puntos inversos es ortogonal a la circunferencia de inversión. Si A es uno de los puntos de corte de las dos circunferencias, c1 y c2, ambas ortogonales a la circunferencia de inversión, se tiene:

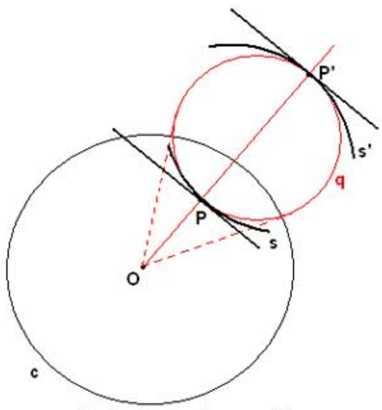
- Por pertenecer A a la circunferencia c1, ortogonal con c, su inverso A′ está también en c1.
- Por pertenecer A a la circunferencia c2, ortogonal con c, su inverso A′ está también en c2.

Luego el punto inverso, A', del punto A, pertenece tanto a c1 como a c2, por lo que se trata del otro punto de corte de ambas circunferencias.

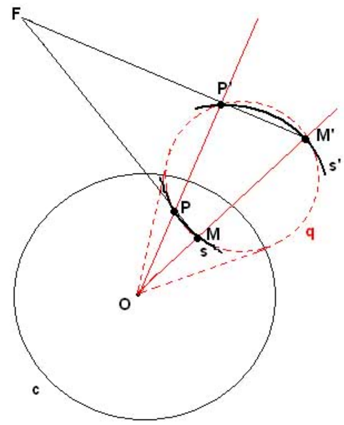


Si dos circunferencias son ortogonales con la circunferencia de inversión sus puntos de corte son puntos inversos

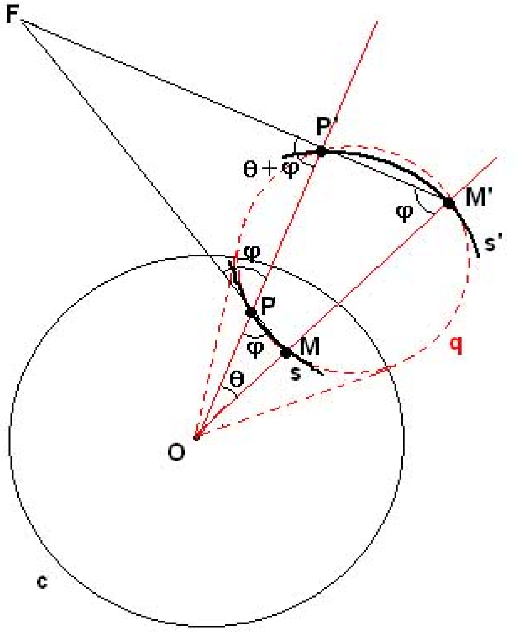
Teorema 09: Sean dos líneas, s y s', la una inversa de la otra con respecto a una circunferencia dada c, y sea P un punto de s que tiene como inverso un punto P' de s'. Se verifica que las rectas tangentes a s y s' en los puntos P y P' respectivamente, son perpendiculares a la recta PP' o bien forman con ella un triángulo isósceles de base PP'.
Demostración:
Si las dos tangentes en P y P' son paralelas entonces, obviamente, son perpendiculares a la recta PP'. En este caso PP' será el diámetro de una circunferencia ortogonal a la circunferencia de inversión.
En caso contrario, consideremos además otro punto M y su correspondiente inverso M', y tracemos las secantes PM y P'M', que se cortarán en un punto F.



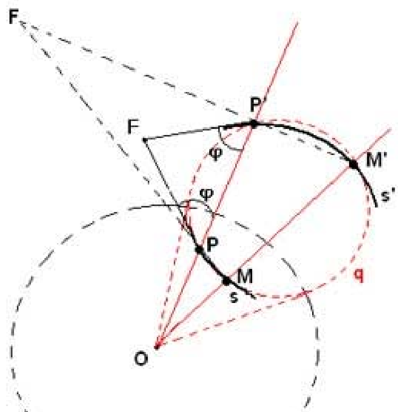
Rectas tangentes paralelas



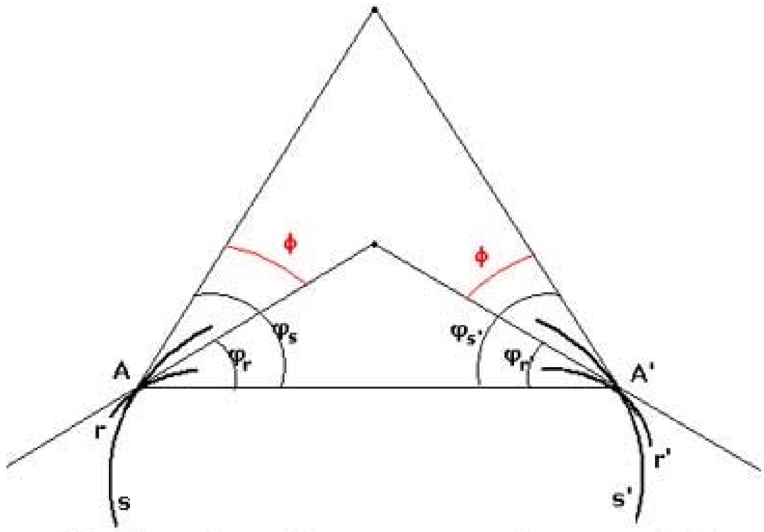
Si llamamos θ al ángulo de vértice O que forman los segmentos OP y OM, y llamamos φ al ángulo de vértice P que forman los segmentos PO y PM, se tiene que, por el teorema 04, los ángulos OPM y P'M'M son iguales, de donde, en el triángulo OP'M' resulta que se conocen dos ángulos, θ y φ, lo que nos indica que el tercer ángulo, PP'M' es suplementario de $\theta+\varphi$, pues los tres han de sumar 180º, de lo cual se deduce que el ángulo PP'F es $\theta+\varphi$. Asimismo, vemos que el ángulo FPP’ es igual al ángulo OPM por ser opuestos por el vértice. Se indican estos ángulos en la siguiente figura



Si mantenemos fijo el punto P y aproximamos a P el punto M, el ángulo θ tiende a cero y el segmento de cuerda PM tiende a un solo punto P, desplazándose el punto F de forma que la recta FP sea ahora tangente a la curva s en P. Lo mismo ocurre en el punto P’ al aproximarse M’.
Cuando $\theta \to 0$ también $\theta + \varphi \to \varphi$, por lo que los ángulos FPP’ y FP’P son iguales a φ, y el triángulo PFP’ es isósceles con base PP’
En definitiva, en los puntos P y P’ el ángulo FPP’ coincide con el ángulo FP’P y el triángulo FPP’ resulta ser isósceles, lo que prueba el teorema.



Teorema 10: La inversión con respecto a una circunferencia es una transformación conforme (mantiene los ángulos).
Demostración:
Bastará probar que si ϕ es el ángulo que forman dos curvas en el punto P, será también ϕ el ángulo que formen las curvas inversas respectivas en el punto P’ inverso de P.
Como el ángulo que forman dos curvas en un punto de intersección es el ángulo que forman sus tangentes en ese punto, podemos utilizar el teorema anterior para probar el enunciado propuesto.



El ángulo que forman dos curvas que se cortan en un punto A y el ángulo que forman las curvas inversas en el punto inverso A' son iguales. La inversión respecto a una circunferencia es una transformación conforme.

Puesto que, por el teorema 09, es $\varphi_r = \varphi_{r'}$ y $\varphi_s = \varphi_{s'}$, se tiene que el ángulo ϕ que forman las dos tangentes en A coincide con el ángulo ϕ' que forman las dos tangentes en A':

$$\phi = \varphi_s - \varphi_r = \varphi_{s'} - \varphi_{r'} = \phi'$$

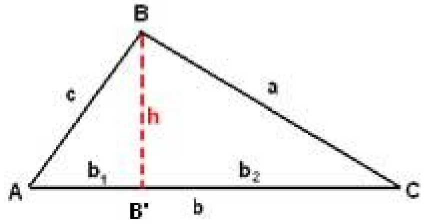
Los ángulos, pues, se conservan en la transformación.

Bibliografía utilizada:

Smogorzhevski, A. S.; *Acerca de la geometría de Lobachevski*, Editorial Mir, Moscú, 1984.
A'Campo, N.;Papadopoulos, A.; *Notes on hyperbolic geometry,* European Mathematical Society, 2012.
Roanes Macías, E.; *Introducción a la geometría*; Anaya editorial, 1980.

Apéndice: Teorema de la Altura en un triángulo rectángulo.

En todo triángulo rectángulo se verifica que el cuadrado de la altura sobre la hipotenusa es igual al producto de los dos segmentos en los que dicha altura divida a la hipotenusa. Gráficamente, será, en el triángulo ABC, rectángulo en B:



$$b_1.b_2 = h^2$$

Demostración:

Aplicamos el Teorema de Pitágoras:
- en el triángulo rectángulo ABB': $h^2 = c^2 - b_1^2$
- en el triángulo rectángulo B'BC: $h^2 = a^2 - b_2^2$
- en el triángulo rectángulo ABC: $b^2 = c^2 + a^2$

Sumando las dos primeras igualdades y sustituyendo la tercera:

$$2h^2 = c^2 + a^2 - b_1^2 - b_2^2 = b^2 - b_1^2 - b_2^2$$

O sea:

$$2h^2 = c^2 + a^2 - b_1^2 - b_2^2 = b^2 - b_1^2 - b_2^2 = (b_1 + b_2)^2 - b_1^2 - b_2^2 = 2b_1.b_2 \rightarrow h^2 = b_1.b_2$$