LA INVARIANZA DE ESCALA
UNA PROPIEDAD POCO MANEJADA DE LOS SISTEMAS COMPLEJOS

Joaquín González Álvarez

Resumen
Se muestra un acercamiento al concepto de Invarianza de Escala, una propiedad que presentan los sistemas complejos en la cercanía de los puntos críticos o de transiciones de fase de segundo orden, característica frecuentemente olvidada en la literatura al respecto.

Abstract
An approach to the Scale Invariance, a feature of the complex systems in the neighborhood of critical points of second order phase transition, a frequently forgotten subject, is shown in the present paper.

Introducción
En los artículos, monografías, libros, etc. que tratan la Teoría de la Complejidad, aparecen como características definitorias de los Sistemas Complejos, la aparición de Propiedades Emergentes, esto es, las que surgen en el colectivo pero no presentadas por los componentes aislados, así como la longitud en bits del programa informático correspondiente entre otras de menor peso. Sin embargo no suele hacerse alusión a una propiedad muy importante de dichos sistemas que se presentan en la cercanía de los puntos críticos o de transición de fase. Esa propiedad es la de Invarianza de Escala y para tener idea de en que consiste, tendremos que referirnos a las teorías del Fractal y de la Renormalización, así como al concepto de *autosemejanza.*

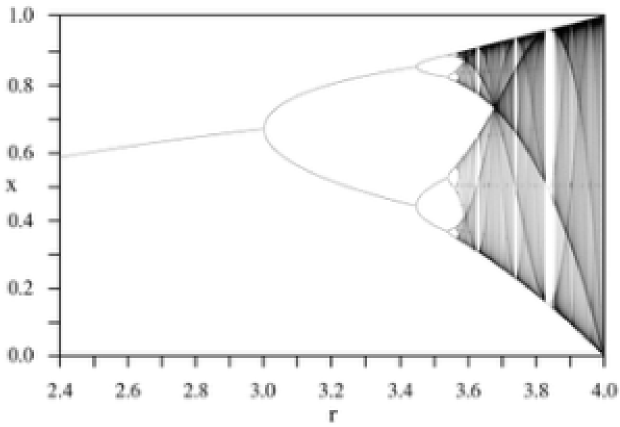
Desarrollo
Aunque fractales encontramos en la naturaleza y son los que nos van a interesar en lo que sigue, el concepto de Fractal es esencialmente geométrico. El Fractal es un ente geométrico el cual en su desarrollo espacial va repitiendo una misma forma, esto es, se repite autosemejantemente, y esto se realiza a una escala cada vez menor. Tal proceso permite que un "zoom" de una pequeña parte del fractal reproduzca la forma total del mismo. De manera que la forma reiterada va teniendo menor tamaño, pero hay algo que se mantiene constante y es la Dimensión Fractal o Dimensión de Hausdorff, la cual en los fractales es fraccionaria.

Ejemplos de fractales en la naturaleza lo constituyen las costas de los territorios. Una costa, vista desde muy alto, se muestra como una curva suave, pero en un acercamiento o zoom,, nos mostrará su compleja estructura fractal. La propiedad de autosemejanza permitirá observar a distintas escalas propiedades del objeto observado perceptibles a determinada escala que en otras no lo son. La técnica para utilizar la autosemejanza para advertir propiedades a determinada escala que a otra no lo podemos hacer, se basa en la muy importante y no muy fácil de asimilar (ver Feynman 1988), Teoría de la Renormalización debida a Kenneth Wilson la que esencialmente se basa en la Invarianza de la Escala a la cual implícitamente ya hicimos mención al referirnos a la permanencia de la Dimensión Fractal en la iteración de la forma fundamental.

Como ya adelantamos, la Invarianza de la Escala se presenta como propiedad de los Sistemas Complejos en la proximidad de los puntos críticos o de transición de fase. Para explicar lo expuesto, tomaremos como ejemplo el proceso del sistema dinámico no lineal del crecimiento poblacional de una especie animal conociendo el número x de ejemplares en un momento dado y el valor r de la tasa de crecimiento, el cual irá variando de acuerdo a las condiciones que influyen sobre el proceso. El proceso se modela matemáticamente mediante un mapa iterativo conocido como Mapa Logístico, el cual lo presentamos así: $f=rx(1-x)$ donde f es el número de ejemplares que seguirá en la siguiente iteración a la que correspondió un número x de ejemplares de la especie animal en cuestión. Un valor de x tal que $x=f$, corresponde a lo que se denomina un punto fijo y si además se cumple que para un valor de r, $\partial f/\partial x=0$ donde x es la del punto fijo, a dicho punto se le llama superestable y el correspondiente valor de r se designa por R_n donde n es el número de renormalizaciones que se efectúen como explicaremos mas adelante.

Con un ejemplo numérico mostraremos como se emplea el mapa iterativo para seguir la evolución cuantitativa de una población. Si el número de ejemplares al inicio es de $x= 0.8$ millares y la tasa de crecimiento es de $r=2$, ponemos estos valores en el mapa obteniendo $f=0.32$. Este será la nueva x, la ponemos en el mapa y dará $f=0.44$. con esta nueva x volvemos al mapa y da 0.5. Tratamos de seguir iterando y nos vuelve a dar 0.5 y eso se repetiría claro está, eternamente. Indica que el crecimiento se ha estacionado en 0.5 millares de ejemplares. A un valor estacionario como 0.5 se le llama atractor. Si la tasa de crecimiento se hace igual a 3 y comenzamos la iteración con 0.699 millares y comenzamos a iterar nos dará primero 0.63. Al continuar nos vuelve a dar 0.699 y así, nos encontramos con dos atractores o ciclo de dos atractores. En realidad el atractor es el ciclo pero en aras de la brevedad suele llamársele atractores a sus componentes también.. Con una tasa de 3.4, al iterar nos encontraremos con un ciclo de cuatro atractores. Al aumentar la tasa a 3.5, el ciclo será de ocho atractores. De esta forma para ciertos valores de la tasa, el ciclo se irá duplicando. Para valores de la tasa de crecimiento 4 en adelante, se pierde toda periodicidad, no se producirán mas atractores, se habrá llegado a lo que se conoce como Caos. El valor de aproximadamente 4 para r marcará un punto crítico en el proceso que hemos analizado, un punto crítico, una transición de fase de segundo orden lejos del equilibrio, comparable al paso de un material de ser paramagnético a ferromagnético.

Para comprender mejor la Invarianza de la Escala en las condiciones expuestas para los Sistemas Complejos, lo cual es el tema que nos ocupa, necesitamos referirnos a un famoso diagrama perfeccionado por Mitchel Feigenbaum basado en la idea de Robert May. En el eje horizontal del diagrama se sitúan los valores de la tasa r para los cuales se producen las duplicaciones de ciclos. Esos valores de r toman el nombre de puntos de bifurcación. Se sitúan en el eje vertical del diagrama los valores x de la población a los cuales, cuando se necesite destacarlos, les corresponderá una línea horizontal que en el primer punto de bifurcación se desdoblará en dos, semejando una horquilla en la cual a cada rama le corresponderá un valor resultado de la iteración que le dio lugar. Así en el ejemplo anterior al valor de x=0.8 le corresponderá una línea horizontal (tronco de la horquilla) que al llegar al punto de bifurcación de abscisa r=3 se desdoblará en dos valores (ramas de la horquilla): 0.699 y 0.63, Esas ramas se prolongarán hasta el punto de bifurcación r=3.4, y cada una de ellas se prolongará hasta el puno de bifurcación r=3.5 y cada una de las cuatro ramas se bifurcarán y así seguirá un proceso de bifurcaciones que evidencia aumento en la medida de la Complejidad según se vaya acercando a r=4 en la frontera del Caos, dando lugar a la figura que en las publicaciones ilustran al Diagrama de Feigenbaum y que ha pasado a constituir un icono de la Teoría del Caos.



Ejemplo de Diagrama de Feigenbaum

Mitchell J. Feigenbaum, Ph.D.
Universidad Rockefeller

La frontera del Caos (r algo mayor que 4), constituye lo que hemos estado llamando punto crítico donde ocurre algo similar a una transición de fase no equilibrada. En la ruta hacia el Caos y a las puertas del mismo, se manifiesta un desarrollo de autosemejanza a escala constante (Invarianza de la Escala) de reducción que nos muestra un comportamiento fractal.

El fenómeno de periodicidad descrito, motivó a Mitchel Feigenbaum para buscar una matematización del proceso en cuestión. La "imagen" que se reitera en el proceso fractal en la ruta hacia el Caos, la conforma la horquilla. En su periodicidad encontró Feigenbaum dos relaciones invariantes. Una de ellas entre las distancias de cada punto de bifurcación con el que le antecedente y al que le sigue. La otra relación es entre la separación de las ramas de cada horquilla con esa separación en las horquillas que le siguen.

Para el tema que nos ocupa, esa relación entre separación de ramas de las horquillas es la que nos interesa. Feigenbaum encontró que para un número *muy grande* de iteraciones (gran acercamiento entre las r de bifurcación), esa relación a la cual llamó α, tiende a un valor cada vez mas próximo a 2.5029. Este valor constituye la escala de reducción invariante y ha venido a constituir una constante universal de la misma índole que π.

En lo anterior hemos recalcado lo muy grande del número de iteraciones para tomar cuenta de la existencia del factor de escala de reducción α, pudiera decirse factor de aproximación de las ramas. Sólo en esa gran aproximación imposible materialmente de observar pudo Feigenbaum demostrar la existencia de α y para ello se valió del ya citado recurso de la renormalización, reduciendo matemáticamente una iteración observable mediante el escalado $x \rightarrow x/\alpha$.

Si se designa por f(x,r) la Ecuación Logística para cierto valor de x y por f^2 la iteración de f que inicia la bifurcación, se cumplirá la siguiente igualdad: $f(x, R_0)=\alpha f^2 (x/\alpha, R_1)$ para una primera normalización, y para n normalizaciones se cumplirá: $f(x, R_0)=\alpha^n f^{2n}(x/\alpha^{n}{}', R_n)$ que será una función *universal,* entendiéndose por ello que es independiente de la f original, la cual a las puertas del Caos *sobrevive* en función de x/α^n y así con n tendiendo a infinito. ésto es a las puertas del Caos, se tiene:

$g(x)=\alpha^n f^{2n}(x/\alpha^n, R_{n+1}) = \alpha g^2(x/\alpha)$ para n tendiendo a infinito (gran acercamiento entre las r de bifurcación), igualdad que se cumplirá si α=-2.5029 para los valores de r a las puertas del Caos, constante que Feingenbaum calculó y demostró mediante la Teoría de la Renormalización.

Conclusiones

La propiedad de los Sistemas Complejos que hemos expuesto, la Invarianza de Escala, no obstante su importancia, es un tema poco tratado en la literatura de divulgación de la Teoría de la Complejidad, y esto se debe en gran parte a la necesidad de utilizar la matemática para su explicación, lo cual significa un obstáculo para quienes se han acercado a tan importante teoría de interés multidisciplinario, sin poseer una formación académica en matemáticas. Dada la posibilidad, que mucho nos agradaría de que lo aquí expuesto sea utilizado también por quienes no cuentan con el suficiente background, e intentando atenuar en lo posible dicha dificultad, hemos preparado este trabajo utilizando una matemática muy elemental que pretende estar didácticamente dosificada

Bibliografía

Feynman, R. 1988. The Strange Theory of Light and Matter. Princeton University Press. Princeton.
Gleick, J. 1988. Caos. Pinguin Books. New York.
Peitgen, H. 2004. Chaos and Fractals. Springer. New York.
Strogatz, S. 2000. Non Linear Dynamics and Chaos. Perseus Books Publishing. Cambridge.

Joaquín GONZÁLEZ ÁLVAREZ
j.gonzalez.a@hotmail.com